Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике.

А. А. Арсеньев.

Оглавление

Предисловие.

Предлагаемый вниманию читателя учебник функционального анализа написан на основе лекций, которые автор читал специализирующимся в математической физике студентам физического факультета Московского университета. Лекции имели своей целью подготовить студентов, которые получали специальность физика, к работе в области математической физики. Современная математическая физика в своей существенной части является областью функционального анализа: она использует язык, идеи и методы функционального анализа. Многие понятия и методы функционального анализа формировались процессе решения задач математической физики и обобщают опыт решения этих задач. В задачах квантовой механики роль функционального анализа принципиальна, так как аксиомы квантовой механики формулируются в заимстванных из функционльного анализа терминах.

Автор стремился написать простой учебник, который бы помог начинающему студенту-физику разобраться в математике, связанной с квантовой теорией, теорией рассеяния и т.д. Как введение в предмет, учебник может быть полезен и начинающему математику.

Содержание учебника ясно из оглавления и оно следует сложившемуся за последние приблизительно сорок лет канону учебников по функциональному анализу. Изложение построено так, что при первом чтении читатель может ограничиться минимумом сведений и получить общее предсталение о предмете, а потом присупить к углубленному изучения материала. Книга рассчитана на начинающего исследователя, который готовит себя к работе в области математической физики и смежных дисциплинах. Требования к начальной математической подготовке читателя минимальны: предполагается, что читатель знаком с основами математического анализа и линейной алгебры в объеме курса математики для технических вузов. От читателя ожидается разумная реакция на термины множество, отображение, функция и т. д.

Первая глава посящена изложению теории интеграла Лебега на основе метода Даниэля. Этот подход позволяет использовать уже известные результаты теории интеграла Римана. Необходимый минимум сведений о интеграле Лебега изложен в первом параграфе.

Вторая глава посвящена изложению основ теории метрических пространств. Необходимый минимум сведений о метрических пространствах изложен в первом параграфе.

В первые две главы учебника включены некоторые вопросы (теория меры и элементы общей топологии), которые прямо не относятся к функциональному анализу и на математических факультетах университетов обычно изучаются в курсах теории функций и топологии. Включение этих тем в учебник обусловлено тем, что они не рассматриваются в курсах математики для технических вузов, но знание их подразумевается в учебной литературе по специальным вопросам математической физики. Излагаемые в первой главе сведения по теории функций действительной переменной необходимы в математической теории рассеяния. По мнению автора, собранные в первых двух главах доплнительные сведения составляют необходимый (но не исчерпывающий) “ общеобразовательный минимум” для работающего в области математической физики специалиста.

Третья глава посвящена изложению основ теории банаховых пространств. Собранные в первых трех параграфах сведения о банаховых пространствах могут рассматриваться как достаточное для первого знакомства с предметом введение в теорию банаховых пространств. В дальнешем подробно излагается операторное исчисление для аналитических функций, теория Рисса-Шаудера, аналитическая теория Фредгольма, теория полугрупп, теория возмущений. Подробно исследовано поведение резольвенты оператора в окрестности изолированной особой точки.

Четвертая глава посвящена теории гильбертовых пространств. Первые три параграфа посвящены изложению основ теории гильбертовых пространств. Далее подробно излагается борелевское операторное исчисление, разбирается понятие самосопряженности неограниченного оператора, приводятся критерии самосопряженности, доказывается спектральная теорема.

В пятой главе приведены началаьные сведения из математической теории рассеяния.

Шестая глава посвящена элементарной теории обобщенных функций и пространств Соболева. За исключением теоремы о существовании фундаментального решения, эта глава не требует знания каких-либо сведений из функционального анализа, ее можно читать независимо от предыдущего материала и она вполне доступна студенту технического вуза.

В приложении даны начальные сведения о преобразовании Вейля и дано элементарное доказательство теоремы Дж. фон Неймана о единственности шредингеровского представления CCR в форме Вейля.

Автор стремился сделать отдельные главы учебника максимально независимыми. Все утверждения приведены с подробными доказательствами. Это должно облегчить использование учебника в качестве пособия для самообразования и справочника для начинающего исследователя по отдельным вопросам функционального анализа. В основной текст с полными доказательствами включены некоторые темы, которые в учебниках по функциональному анализу для математиков часто выносятся в задачи для самостоятельной работы. Изложение иллюстрировано достаточным числом решенных в тексте учебника задач и примеров, которые поясняют излагаемый материал, но не могут рассматриваться как пособие для развития навыков в решении задач по функциональному анализу. Автор считает, что начинающему студенту-физику навыки в решении задач по функциональному анализу лучше приобретать под руководством преподавателя, так как преподаватель может указать на ошибку в рассуждениях и показать известные в математическом фольклоре приемы решения задач. Попытки самостоятельно преодолеть все трудности в решении задач часто приводят к неоправдано большим затратам времени.

Список литературы для дополнительного чтения рассчитан на читателя студенческой библиотеки. Аннотированные ссылки на новейшие учебники и пособия по функциональному анализу читатель может найти в Mathematical Review и в Интернете.

Ранее (2009 г.) учебник вышел в Научно-Издательском Центре “Регулярная и хаотическая динамика.” В приводимом ниже тексте исправлены замеченные опечатки, расширен список литературы и сделаны некоторые дополнения в доказательства.

Арсеньев.

{a_arsenev@mail.ru }

Глава 1

Элементарные сведения о интеграле и мере.

1.1 Интеграл Лебега.

1.1.1 Основные структуры, используемые при построении интеграла по схеме Даниэля.

Хорошо известно, что кусочно-непрерывная на отрезке $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}^1$ функция интегрируема по Риману. Одноко уже в простейших случаях предел кусочно-неперывных функций может быть не интегрируемым по Риману. Рассмотрим пример. Пусть $x_1\,,\,x_2\,\ldots$ -все рациональные точки отрезка $[0\,,\,1]$,

$$\mathbb{I}(x_i|x) = \begin{cases} 1\,,\ \text{если } x = x_i, \\ 0\,,\ \text{если } x \neq x_i. \end{cases}$$

Положим

$$f_n(x) = \sum_{1 \le i \le n} \mathbb{I}(x_i|x).$$

Функция $f_n(x)$ равна нулю во всех точках отрезка $[0\,,\,1]$, за исключением точек $x_i\,,\ 1 \le i \le n$, в которых она равна единице. Ясно, что $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$ и

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1\,,\text{если } x \text{ рациональное число}, \\ 0\,,\text{если } x \text{ иррациональное число}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Каждая из функций $f_n(x)$ кусочно непрерывна на отрезке $[0\,,\,1]$ и поэтому интегрируема по Риману на отрезке $[0\,,\,1]$, а её интеграл равен нулю. Предел функций $f_n(x)$ существует в каждой точке отрезка $[0\,,\,1]$. Этот предел называется функцией Дирихле. Функция Дирихле не интегрируема по Риману, так как для любого разбиения отрезка $[0\,,\,1]$ верхняя интегральная сумма функции Дирихле равна единице, а нижняя интегральная сумма равна нулю. Мы видим, что уже простейшие операции предельного перехода приводят к функциям, которые не интегрируемы по Риману.

Наша цель состоит в том, чтобы расширить понятие интеграла Римана так, чтобы интегрируемыми оказались все функции, которые в некотором естественном смысле можно считать пределами интегрируемых по Риману функций и на этот класс функций распространить понятие интеграла так, чтобы оно сохраняло основные свойства интеграла Римана.

Мы используем конструкцию, которая называется построением интеграла по схеме Даниэля. Общая схема наших рассуждений состоит в том, чтобы интеграл от предела функций рассматривать как предел интегралов от этих функций. В рассмотренном примере каждая из функций $f_n(x)$ интегрируема по Риману и ее интеграл равен нулю, Поэтому и предельной функции - функции Дирихле -естественно приписать значение интеграла, равное нулю. Нам нужно разработать общие правила для такой процедуры. Заметим, что в определение интеграла Римана входят три понятия: область, на которой определены интегрируемые функции, интегрируемые функции и интеграл. Множество интегрируемых по Риману функций является линейным пространством относительно операций поточечного сложения и умножения на действительные числа и обладает следующим свойством: если функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то и функция $|f(x)|$ интегрируема по Риману. Интеграл Римана можно рассматривать как линейный функционал (напомним, что функционалом обычно называется отображение, область определения которого есть множество функций, а область значений -область действительных или комплексных чисел) , заданный на множестве интегрируемых функций, причем этот функционал неотрицателен в следующем смысле: если интегрируемая функция принимает только неотрицательные значения, то и её интеграл неотрицателен. Эти свойства интегрируемых по Риману функций и интеграла Римана кладутся в основу предлагаемого в схеме Даниэля обобщения понятия интеграла.

В дальнешем мы будем предполагать, что X -произвольное множество, $L_0(X)$ некоторое множество функций на X со значениями в области действительных чисел:

$$L_0(X) \ni f\colon X \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^1,$$

I_0 -заданный на $L_0(X)$ функционал:

$$I_0\colon L_0(X) \ni f \mapsto I_0(f) \in \mathbb{R}^1.$$

Пространство $L_0(X)$ мы будем называть *пространством элементарных функций.* Функционал I_0 мы будем называть *элементарным интегралом.*

При построении интеграла по схеме Даниэля на область задания интегрируемых функций (множество X) не налагается каких-либо ограничений.

Мы будем предполагать, что пространство $L_0(X)$ удовлетворяет следующим требованиям.

Условие 1.1.1. *Пространство $L_0(X)$ состоит из ограниченных функций:*

$$\forall (f \in L_0(X)) \;:\; \sup\{|f(x)| \mid x \in X\} < \infty.$$

Условие 1.1.2. *Пространство функций $L_0(X)$ есть линейное пространство относительно операций поточечного сложения функций и умножения функций на действительные числа.*

Это означает, что для любых двух функций

$$f(x) \in L_0(X)\,,\; g(x) \in L_0(X)$$

и любых действительных чисел α , $\beta \in \mathbb{R}^1$ функция

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

принадлежит пространству $L_0(X)$.

Условие 1.1.3. *Если функция $f(x) \in L_0(X)$, то $|f(x)| \in L_0(X)$.*

Так как

$$\begin{aligned}\max(f(x)\,,\, g(x)) &= \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|),\\ \min(f(x)\,,\, g(x)) &= -\max(-f(x)\,,\, -g(x)),\end{aligned}$$

то при выполнении условия 1.1.2 условие 1.1.3 эквивалентно условию

Условие 1.1.4. *Если $f(x)\,,\, g(x) \in L_0(X)$ то*

$$\max(f(x)\,,\, g(x)) \in L_0(X)\;,\; \min(f(x)\,,\, g(x)) \in L_0(X).$$

Мы будем предполагать, что элементарный интеграл I_0 удовлетворяет следующим требованиям.

Условие 1.1.5. *Элементарный интеграл I_0 есть линейный функционал, заданный на $L_0(X)$:*

$$I_0\colon L_0(X) \mapsto \mathbb{R}^1 \ , \ I_0(\alpha f + \beta g) = \alpha I_0(f) + \beta I_0(g).$$

Условие 1.1.6. *Элементарный интеграл I_0 неотрицателен:*

$$(\forall x : \ f(x) \geq 0) \Rightarrow (I_0(f) \geq 0).$$

Условие 1.1.7. *Элементарный интеграл I_0 непрерывен в следуюшем смысле:*

$$\textit{если}\ \forall (x \in X) : f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad \textit{и} \quad \forall (x \in X) : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} I_0(f_n) = 0. \tag{1.2}$$

Так как

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

то из неотрицательности элементарного интеграла следует неравенство

$$|I_0(f)| \leq I_0(|f|). \tag{1.3}$$

Если функция $f(x) \equiv 1$ принадлежит пространству элементарных функций, то отсюда следует неравенство

$$|I_0(f)| \leq I_0(1) \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}. \tag{1.4}$$

Для построения интегрла по схеме Даниэля нужны только свойства 1.1.1 -1.1.7 пространства элементарных функций и элементарного интегала. Но в важных и интересных для приложений случаях (которые рассмотрены, например, в примерах 1.1.1 , 1.1.2 , 1.1.7) пространство элементарных функций $L_0(X)$ удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

Условие 1.1.8. *Функция $f(x) \equiv 1$ принадлежит пространству $L_0(X)$.*

В этом случае элементарный интеграл обычно нормируют условием

$$I_0(1) = 1. \tag{1.5}$$

Условие 1.1.9. *Если* $f(x) \in L_0(X)$, *то*

$$\forall (p \geq 1) : |f(x)|^p \in L_0(X).$$

Если эти условия выполнены, то построенный по схеме Даниэля интеграл обладает дополнительными свойствами, которые часто используются в приложениях.

В дальнейшем мы предполагаем, что условия (1.1.8) *и* (1.1.9) *выполнены.*

Хотя при построении интеграла по схеме Даниэля на область задания интегрируемых функций формально не налагается каких-либо ограничений, но в действительности дело обстоит не совсем так. Если множество элементарных функций бесконечно, то для суждения о том, принадлежит или нет данная функция пространству элементарных функций и выполнено ли условие (1.1.7), нам нужно как-то описать свойства элементарных функций, а сделать это, ничего не зная об области задания элементарных функций, невозможно. Поэтому в практических применениях на область задания элементарных функций налагаютя дополнительные требования. Часто рассматривается следующая ситуация.

Условие 1.1.10. *Прстанство* X *-это компактное топологическое пространство*[1], *пространство элементарных функций* $L_0(X)$ *- это пространство* $C(X)$ *всех непрерывных функций на компакте* X, *а элементарный интеграл* I_0 *это линейный неотрицательный функционал на* $C(X)$.

Заметим, что такой функционал в силу неравенства (1.4) является непрерывным в метрике пространства $C(X)$.

Выполнение условия (1.1.7) тогда следует из теоремы Дини и условия 1.1.8-1.1.7 также выполнены. Условие компактности топологического пространства X в некоторых случаях может быть заменено условием компактности носителя каждой функции $f \in L_0(X)$.

Рассмотрим примеры.

Утверждение 1.1.1. *Пусть* $X = [a\,,b] \subset \mathbb{R}^1\,,\, L_0(X) = C([a\,,b])$ *- пространство всех непрерывных функций на отрезке* $[a\,,b]$, *а элементарный интеграл задан как интеграл Римана:*

$$I_0 : C([a\,,b]) \ni f \mapsto I_0(f) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1.6)$$

[1] В этой главе под терминами компакт, компактное топологическое пространство и компактное множество можно понимать определенное равенством (1.7) подпространство евклидова пространства.

В этом случае выполнены условия 1.1.1-1.1.4 для пространства $L_0(X)$ и условия 1.1.5-1.1.7 для элементарного интеграла.

Проверим выполнение условия 1.1.7 Из признака равномерной сходимсти Дини следует, что если последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ монотонно сходится к нулю в каждой точке отрезка $[a\,,\,b]$, то она сходится к нулю равномерно на отрезке $[a\,,\,b]$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

Обобщением предыдущего примера служит следующий пример.

Утверждение 1.1.2. *Пусть пространство X есть параллелипипед K:*

$$K := \{x | x = (x_1\,,\,\dots\,,x_d) \in \mathbb{R}^d\,,\, a_i \le x_i \le b_i\,,\, a_i < b_i\,\}. \tag{1.7}$$

Пусть $L_0(X) := C(K)$ -пространство всех непрерывных функций на параллелипипеде K, а элементарный интеграл задан как интеграл Римана:

$$I_0\colon\ C(K) \ni f \mapsto I_0(f) = \int_K f(x)dx\,,\, dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d.$$

В этом случае условия 1.1.1-1.1.4 для пространства $L_0(X)$ и условия 1.1.5-1.1.7 для элементарного интеграла выполнены.

Эти примеры являются основными для дальнешего изложения: *в дальнешем (если не оговорено другое) можно предполагать, что пространство X, пространство элементарных функций $L_0(X)$ и элементарный интеграл I_0 заданы так, как в 1.1.1 или 1.1.2.* Все другие примеры при первом чтении можно не рассматривать.

Читателю предлагается проверить, что в следующих случаях выполнены условия 1.1.1 -1.1.7.

Пример 1.1.1. Пусть $X = [a\,,\,b] \subset \mathbb{R}^1$, $L_0(X)$ -пространство всех кусочнолинейных функций (кусочно-линейная функция -это такая непрерывная функция, график которой есть ломанная линия) на отрезке $[a\,,\,b]$, а элементарный интеграл задается формулой (1.6).

Пример 1.1.2. Пусть

$$X = K := \{x | x = (x_1\,,\,\dots\,,x_d) \in \mathbb{R}^d\,,\, a_i \le x_i \le b_i\,,\, a_i < b_i\,\},$$

$L_0(X) := C(K)$ -пространство всех непрерывных функций на параллелипипеде K , $g \in C(K)$, $g(x) \ge 0$, $x \in K$, а элементарный интеграл задан как интеграл Римана:

$$I_0\colon C(K) \ni f \mapsto I_0(f) = \int_K f(x)g(x)dx\,,\, dx = dx_1 dx_2 \dots dx_d.$$

Будет ли в этом примере выполнено условие неотрицательности элементарного интеграла, если функция $g(x)$ в некотроых точках будет принимать отрицательные значения?

Пример 1.1.3. Пусть $X = [a\,,\,b] \subset \mathbb{R}^1$, $L_0(X) = C([a\,,\,b])$ -пространство всех непрерывных функций на отрезке $[a\,,\,b]$, $\{x_j\} \subset [a\,,\,b]$, а элементарный интеграл задается формулой

$$I_0(f) = \sum_j a(j) f(x_j)\,, \tag{1.8}$$

где $\{a(j)\}$ -такая последовательность , что

$$\forall j:\ a(j) > 0 \quad \text{и} \quad \sum_j a(j) < \infty. \tag{1.9}$$

Проверка условий 1.1.5-1.1.7 предоставляется читателю.

Пример 1.1.4. Пусть $X = \mathbb{Z}_+$ -множество неотрицательных целых чисел, $L_0(X) = l^\infty$ -пространство ограниченных числовых последовательностей:

$$(\{b(j)\} \in l^\infty) \iff (\sup\{|b(j)| \mid j \in \mathbb{Z}_+\} < \infty),$$

$\{a(j)\}$-числовая последовательность, которая удовлетворяет условиям (1.9), а элементарный интеграл задан формулой

$$I_0(\{b(j)\}) = \sum_j a(j) b(j). \tag{1.10}$$

Проверим, что выполнено условие 1.1.7. Пусть $\{b_n(j)\}$ такая последовательность элементов пространства l^∞, которая удовлетворяет условию:

$$\forall j:\ b_n(j) \to 0\,,\ n \to \infty\,,\ b_{n+1}(j) \le b_n(j).$$

Справедливо равенство

$$I_0(\{b_n\}) = \sum_{j \le N} a(j) b_n(j) + \sum_{j > N} a(j) b_n(j). \tag{1.11}$$

Вторую сумму в (1.11) оценим так:

$$|\sum_{j>N} a(j) b_n(j)| \le \sup\{|b_1(j)| \mid j \in \mathbb{Z}_+\} \sum_{j>N} a(j).$$

Теперь ясно, что вторая сумма в (1.11) может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора N, а первая сумма может быть сделана малой за счет выбора n.

Пример 1.1.5. Пусть $X = \mathbb{Z}_+$ -множество неотрицательных целых чисел, $L_0(X) = l^2$ -пространство числовых последовательностей, которые удовлетворяют условию:

$$(\{b(j)\} \in l^2) \iff ((\sum_j |b(j)|^2) < \infty). \tag{1.12}$$

Пусть последовательность $\{a(j)\}$удовлетворяет условию: $\{a(j)\} \in l^2$, $a(j) > 0$. Зададим элементарный интеграл формулой (1.10).

Проверим выполнение условий 1.1.5-1.1.7. Для этого сначала заметим, что пространство l^2 есть линейное пространство относительно операций сложения и умножения на действительны числа, если эти операции определены по правилу

$$\alpha\{b(j)\} + \beta\{g(j)\} = \{\alpha b(j) + \beta g(j)\},$$

так как

$$|b(j) + g(j)|^2 \leq 2(|b(j)|^2 + |g(j)|^2).$$

Проверим выполнение условия 1.1.7. Пусть $\{b_n(j)\}$ такая последовательность элементов пространсва l^2, которая удовлетворяет условию:

$$\forall j : b_n(j) \to 0\,,\ n \to \infty\,,\ b_{n+1}(j) \leq b_n(j).$$

Справедливо равенство

$$I_0(\{b_n\}) = \sum_{j \leq N} a(j) b_n(j) + \sum_{j > N} a(j) b_n(j) \tag{1.13}$$

Воспользуемся неравенством

$$|\sum_{j>N} a(j) b_n(j)| \leq (\sum_{j>N} |a(j)|^2)^{1/2} (\sum_{j>N} |b_n(j)|^2)^{1/2}.$$

В силу этого неравенства за счет выбора параметра N второе слагаемое в (1.13) можно сделать сколь угодно малым сразу для всех n, а первую сумму в (1.13) можно сделать малой за счет выбора n.

Пример 1.1.6. Пусть

$X = (a\,,\, b]\,, a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N = b$
-фиксированные точки и
$\forall (j \leq N-1) \,:\, A_j = (\alpha_j\,,\, \alpha_{j+1}]\,,\,.$ (1.14)

Пусть $L_0(X)$ -линейное пространство функций вида

$$L_0(X) \ni f(x) = \sum_{0 \le j \le N-1} \beta(j)\mathbb{I}(A_j|x)\,,\ \beta(j) \in \mathbb{R}^1. \qquad (1.15)$$

Определим на $L_0(X)$ элементарный интеграл формулой

$$I_0\colon L_0(X) \ni f(x) \mapsto I_0(f) = \int_a^b f(x)dx =$$
$$\sum_{0 \le j \le N-1} \beta_j(\alpha_{j+1} - \alpha_j) \qquad (1.16)$$

Проверка условий 1.1.1 -1.1.7 в даннам случае предоставляется читателю.

Пример 1.1.7. Пусть $X = (a\,,\,b]$ и $L_0(X)$ -линейное пространство всех функций вида (1.15) при *всех возможных* выборах точек α_j и всех $N = 1\,,\,2\ldots$. Определим элементарный интеграл формулой (1.16). Условия 1.1.1 -1.1.7 в этом случае будут выполнены.

Нетривиальна только проверка условия 1.1.7. В дальнейшем результаты нижеследующих рассуждений нами не используются.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\} \subset L_(X)$ удовлетворяет условиям:

$$\forall x\colon\ f_{n+1} \le f_n(x)\ ,\ f_n(x) \to 0\,,\, n \to \infty.$$

Каждая из функций $f_n(x)$ имеет только конечное число точек разрыва на отезке $[a\,,\,b]$, поэтому множество всех точек разрыва всех функций $f_n(x)$ не более чем счетно. Пусть это будет множество $\{x_j\}\,,\ j = 1\ldots$. Положим

$$B_\epsilon = \bigcup_i V_i\ ,\ V_i = (x_i - 4^{-i}\epsilon\,,\,x_i + 4^{-i}\epsilon). \qquad (1.17)$$

Множество $\mathbf{C}(B_\epsilon)$ замкнуто, функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонно стемится к нулю в каждой точке этого множества и каждая функция $f_n(x)$ непрерывна на $\mathbf{C}(B_\epsilon)$, поэтому в силу теоремы Дини функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ стремится к нулю равномерно на $\mathbf{C}(B_\epsilon)$. Пусть $n(\epsilon)$ выбрано так, что

$$\forall (x \in \mathbf{C}(B_\epsilon)\,,\, n > n(\epsilon))\,:\ f_n(x) < \epsilon.$$

При $n > n(\epsilon)$ представим функцию (1.15) как сумму двух функций

$$f_n(x) = f'_n(x) + f''_n(x),$$
где
$$f'_n(x) = \sum_j \beta'_j \mathbb{I}(A'_j|x), \tag{1.18}$$
$$f''_n(x) = \sum_j \beta''_j \mathbb{I}(A''_j|x). \tag{1.19}$$

В (1.18) суммирование ведется по тем j, для которых $A'_j \bigcap \mathbf{C}(B_\epsilon) \neq \emptyset$, а в (1.19) суммирование ведется по тем j, для которых $A''_j \subset B_\epsilon$. Так как в (1.18) β'_j есть одно из значений функции $f_n(x)$ на множестве $\mathbf{C}(B_\epsilon)$, то $\forall j : \beta'_j < \epsilon$ и

$$\int_a^b f_n(x)' dx \leq (b-a)\epsilon$$

Так как все точки α_j по определению принадлежат множеству B_ϵ, то для всех тех j, по которым ведется суммирование в (1.19), выполнено включение $[\alpha_j\, , \, \alpha_{j+1}] \subset B_\epsilon$. В силу леммы Гейне-Бореля каждый отрезок $[\alpha_j\, , \, \alpha_{j+1}]$ покрывается конечным числом интервалов V_i вида (1.17). Входящие в (1.19) множества A''_j не пересекаются и их объединение покрывается конечной системой открытых интервалов V_i, суммарная длина которых меньше ϵ. Пусть

$$M = \sup\{f_1(x) \mid x \in X\}$$

Тогда

$$\int_a^b f''_n(x)\, dx \leq M \int_a^b \Big(\sum_j \mathbb{I}(A''_j|x)\Big)\, dx \leq (\sup_x f_1(x)) \cdot \epsilon,$$

и при $n > n(\epsilon)$:

$$\int_a^b f_n(x)\, dx \leq (M + b - a) \cdot \epsilon.$$

Итак, мы доказали выполнение условия 1.1.7 в рассматриваемом нами примере.

Читателю рекомендуется обобщить этот пример на случай пространства $\mathbb{R}^d$.

Другим обобщением этого примера является

Пример 1.1.8. Пусть $F(x)$ -монотонно неубывающая непрерывная справа функция на отрезке $[a\,,\,b]\subset\mathbb{R}^1$ и пусть $L_0([a\,,\,b])$ -линейное пространство всех функций вида (1.15). На пространстве $L_0([a\,,\,b])$ определим элементарный интеграл формулой

$$I_0(f)=\sum_{0\le j\le N-1}\beta(j)(F(\alpha_{j+1})-F(\alpha_j)). \tag{1.20}$$

Проверка условия 1.1.7 получается дословным повторением предыдущих рассуждений.

В примерах 1.1.6-1.1.8 каждая функция из пространства элементарных функций принимала только конечное число значений. Прием, состоящий в рассмотрении подобного класса функций, часто используется в теории интеграла.

1.1.2 Множества меры ноль.

Рассмотим пример. Пусть $X=[0\,,\,1]$, $L_0(X)=C([0\,,\,1])$, а элементарный интеграл задается формулой

$$I_0(f)=f(1/2) \tag{1.21}$$

Ясно, что в расматриваемом примере поведение интегрируемых функций на интервалах $[0\,,\,1/2)$ и $(1/2\,,\,]$ никак не влияет на интеграл. Чтобы в общем случае выделить несущественные для интеграла подмножества области задания интегрируемых функций, вводится понятие множества меры ноль.

Определение 1.1.1. Подмножество Z простанства X есть множество меры ноль, если для каждого $\epsilon>0$ существует такая неубывающая последовательность

$$\{f_n^\epsilon(x)\}\subset L_0(X)\ ,\ f_{n+1}^\epsilon(x)\ge f_n^\epsilon(x)$$

неотрицательных:

$$\forall(n\,,\,x):\ f_n^\epsilon(x)\ge 0$$

элементарных функций, что

$$\forall(x\in Z):\ \sup\{f_n^\epsilon(x)\mid 1\le n<\infty\}\ge 1 \quad \text{и} \quad \forall n: I_0(f_n^\epsilon)\le\epsilon.$$

Пустое подмножество считается множеством меры ноль по определению.

Если множество $Z \subset X$ есть множество меры ноль, то мы будем писать

$$mes(Z) = 0.$$

Таким образом, $mes(Z) = 0$ в том и только том случае, если:

$$\begin{aligned}
&\forall(\epsilon > 0)\ ,\ \exists\{f_n^\epsilon(x)\} \subset L_0(X)\ : 0 \leq f_n^\epsilon(x) \leq f_{n+1}^\epsilon(x)\ldots, \\
&\forall(x \in Z) : \ \sup\{f_n^\epsilon(x) \mid 1 \leq n < \infty\} \geq 1, \\
&\forall n\colon I_0(f_n^\epsilon) < \epsilon.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Непосредственно из определения сразу же следует важное для дальнейшего

Утверждение 1.1.3. *Если $Z \subset X$ есть множество меры ноль и $Z' \subset Z$ то Z' есть множество меры ноль.*

Замечание 1.1.1. Позже мы введем понятие меры множества и у нас появятся множества, мера которых равна нулю, а множества меры ноль в смысле определения 1.1.1 как раз и окажутся множествами, мера которых равна нулю. Но, вообще говоря, при иных определениях понятия меры множества меры ноль в смысле определения 1.1.1 и множества, мера которых равна нулю, -это разные классы множеств. Эти классы множеств могут совпадать при одних определениях понятия меры множества и не совпадать при других определениях понятия меры множества. Более подробно мы остановимся на этом при обсуждении понятия меры множества.

Приведем примеры.

Пример 1.1.9. В рассмотренном в начале этого параграфа примере множество $[0\,,\,1/2)\bigcup(0\,,\,1/2]$ есть множество меры ноль.

Пример 1.1.10. В примерах и 1.1.1 1.1.2 одноточечные множества $x_0 \in [a\,,\,b]$ и $x_0 \in K$ есть множества меры ноль.

В качестве последовательности $f_n^\epsilon(x)$ можно взять последовательность

$$f_n^\epsilon(x) \equiv \max\{0\,,\,1 - |x - x_0|/\epsilon\} \text{ при } \epsilon \ll 1.$$

Пример 1.1.11. В примере 1.1.3 каждая точка $x_0 \notin \{x_j\}$ есть множество меры ноль и никакая точка x_j не есть множество меры ноль.

Пример 1.1.12. В примерах 1.1.4-1.1.5 единственные множества меры ноль -это пустые множества.

Как видно из рассмотренных нами примеров, свойство множества быть множеством меры ноль зависит и от пространства элементарных функций $L_0(X)$, и от заданного на пространстве $L_0(X)$ элементарного интеграла I_0.

Лемма 1.1.1. *Счетное объединение множеств меры ноль есть множество меры ноль.*

Доказательство.Пусть $Z_k \subset X$, $k = 1, \ldots$ -множества меры ноль и $Z = \bigcup\limits_k Z_k$. По определению множества меры ноль для каждого k существует такая последовательность

$$\{f_{n,k}(x)\} \subset L_0(X)\,,\, n = 1\ldots \quad \text{что} \quad \forall (n\,,\,k) : 0 \le f_{n,k}(x) \le f_{n+1,k}(x)$$

и

$$\forall (x \in Z_k) : \, \sup\{f_{n,k}(x) \mid n \in \mathbb{Z}\} \ge 1 \,,\, I_0(f_{n,k}) < 2^{-k}\epsilon.$$

Пусть

$$g_n(x) := \max\{f_{n,k}(x) \mid 1 \le k \le n\}.$$

Функциональная последовательность g_n удовлетворяет условиям:

$$\{g_n\} \subset L_0(X)\,,\, 0 \le g_n(x) \le g_{n+1}(x)\,,\, \forall (x \in Z_k) : \\ \sup\{g_n(x) \mid 1 \le n < \infty\} \ge 1,$$

поэтому

$$\forall (x \in Z) : \, \sup\{g_n(x) \mid 1 \le n < \infty\} \ge 1$$

и

$$I_0(g_n) \le I_0\left(\sum_{1 \le k \le n} f_{n,k}\right) \le \epsilon$$

Так как ϵ произвольно, то множество Z удовлетворяет условиям определения 1.1.1 Лемма доказана.

Введем понятие *свойства, справедливого почти всюду.* Рассмотрим некоторое зависящее от точки $x \in X$ свойство $P(x)$.

Определение 1.1.2. Мы будем говорить, что свойство $P(x)$ справедливо почти всюду, если множество точек $x \in X$, где свойство $P(x)$ не справедливо, есть множество меры ноль.

Это определение можно переформулировать так. Пусть $P(x)$ -функция на множестве X, которая принимает два значения:

$$P\colon X \ni x \mapsto P(x) \in \{truth\,,\,false\}$$

Определение 1.1.3. P(x)=truth почти всюду, если $mes(\{x \mid P(x) = false\}) = 0$.

Для выражения "почти всюду "мы будем использовать сокращение п.в. Таким образом,

$$(\text{п.в.}\, P(x) = truth) \iff (mes(\mathbf{C}(\{x \mid P(x) = truth\})) = 0)$$

Особо отметим свойство сходимости почти всюду последовательности $f_n(x)$.

Определение 1.1.4. Последовательность $f_n(x)$ сходится почти всюду, если

$$mes(\mathbf{C}(\{x \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}) = 0.$$

Отметим, что так как свойство множества быть множеством меры ноль зависит от выбранного пространства элементарных функций $L_0(X)$ и от заданного на пространстве $L_0(X)$ элементарного интеграла I_0, то свойство *почти всюду* зависит от выбранного пространства элементарных функций $L_0(X)$ и от заданного на пространстве $L_0(X)$ элементарного интеграла I_0. В дальнейшем у нас возникнут ситуации, когда нужно пояснить, в каком именно смысле употреблен термин почти всюду. Тогда мы будем писать п.в. $mod(\mu)$. Смысл этого обозначения и его связь с интегралом будут пояснены позже на стр. 60.

Приведем пример.

На отрзке $[0\,,\,1]$ определим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, x \in [0\,,\,1/2) \\ 1\,, x \in [1/2\,,\,1]. \end{cases} \tag{1.23}$$

Эта функция нерперывна во всех точках отрезка $[0\,,\,1]$, за исключением точки $x = 1/2$. Если мы определим элементарный интеграл так, как в утверждении 1.1.1, то силу приведенного выше примера 1.1.10 точка $x = 1/2$ имеет меру ноль. Следовательно, в этом случае функция (1.23) непрерывна почти всюду. Однако если мы определим элементарный интеграл формулой (1.21), то точка $1/2$ уже не будет множеством меры ноль, и при определении элементарного интеграла формулой (1.21) функция (1.23) не будет непрерывна почти всюду.

Используем понятие множества меры ноль для уточнения условий сходимости к нулю интеграла от последовательности функций.

Лемма 1.1.2. *Если последовательность элементарных функций* $\{f_n\} \subset L_0(X)$ *удовлетворяет условиям:*

$$\forall\, x\colon 0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x) \text{ и п.в. } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} I_0(f_n) = 0.$$

Доказательство. Так как последовательность элементарных функций $f_n(x)$ монотонно не возрастает, то числовая последовательность $I_0(f_n)$ монотонно не возрастает и предел $\lim_{n\to\infty} I_0(f_n)$ существует. Нужно доказать, что этот предел равен нулю.

Пусть

$$M = \sup\{f_1(x) \mid x \in X\}\ ,\ Z = \{x \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ne 0\}.$$

Так как $mes(Z) = 0$, то существует такая последовательность элементарных функций g_n^ϵ, что

$$\forall (n\,,\, x \in X) : 0 \le g_n^\epsilon(x) \le g_{n+1}^\epsilon(x)\ ,$$

и

$$\forall (x \in Z) :\ \sup\{g_n^\epsilon(x) \mid 1 \le n < \infty\} \ge 1.$$

Положим

$$h_n(x) = f_n(x) - M g_n^\epsilon(x).$$

Последовательность $h_n(x)$ состоит из элементарных функций и монотонно не возрастает, поэтому у неё в каждой точке существует предел (но в некотрых точках он может быть равен $-\infty$).

Так как последовательность $\{h_n(x)\}$ монотонно не возрастает и

$$\forall (n\,,\, x) :\ f_n(x) \le M,$$

то

$$\forall (x \in Z) :\ \lim_{n\to\infty} h_n(x) \le \lim_{n\to\infty} f_n(x) - M \le 0,$$

Если $x \in \mathbf{C}(Z)$ то $\lim_{n\to\infty} h_n(x) \le -M \le 0$.

Поэтому

$$\forall x :\ \lim_{n\to\infty} h_n(x) \le 0\,,$$

В дальнешем мы будем использовать обозначение

$$f^+(x) := \max\{0\,,\, f(x)\}.$$

Заметим, что если $f(x)$ -элементарная функция, то $f^+(x)$ -тоже элементарная функция.

Последовательность $h_n^+(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}
&h_n^+(x) \in L_0(X)\,,\ \forall (x \in X\,,\, n): h_{n+1}^+(x) \le h_n^+(x)\,, \\
&\forall (x \in X):\ \lim_{n\to\infty} h_n^+(x) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_0(f_n) - MI_0(g_n) = I_0(h_n) \le I_0(h_n^+) \to 0\,,\ n \to \infty$$

В силу выбора последовательности $g_n(x)$ отсюда следует, что

$$0 \le \lim_{n\to\infty} I_0(f_n) \le \limsup MI_0(g_n) \le M\epsilon.$$

Так как ϵ произвольно, то лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает

Следствие 1.1.1. *Если $f(x) \in L_0(X)$ и п.в. $f(x) = 0$, то $I_0(f) = 0$.*

Для доказательства этого следствия достаточно рассмотреть последовательность $f_n(x) \equiv |f(x)|$, применить к этой последовательности доказанную лемму и неравенство $|I_0(f)| \le I_0(|f|)$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения.

Если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям

$$\forall n\colon a_{n+1} \le a_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

то мы будем писать

$$a_n \searrow a.$$

Если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям

$$\forall n\colon a_{n+1} \ge a_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = a,$$

то мы будем писать

$$a_n \nearrow a.$$

Лемма 1.1.3. *Если для каждого n множество*

$$Z_n := \{x \mid f_{n+1}(x) > f_n(x)\}$$

есть множество меры ноль и

$$\text{п.в.} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\,,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} I_0(f_n) = 0.$$

Во-первых заметим, что если для каждого n множество $Z_n := \{x \mid f_{n+1}(x) > f_n(x)\}$ есть множество меры ноль, то множество $\bigcup\limits_n Z_n$ есть множество меры ноль, а при $x \notin \bigcup\limits_n Z_n$ справедливо утверждение

$$\forall n\colon f_{n+1}(x) \le f_n(x).$$

Аналогичные рассуждения в дальнейшем позволят нам не делать различия между утверждением, что некоторое свойство, справедливо почти всюду сразу для всех $n \in \mathbb{Z}$ и утверждением, что это свойство, справедливо почти всюду для каждого $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть

$$Z_0 = \{x \mid f_n(x) \not\to 0\,,\ n \to \infty\} \text{ и } Z = \bigcup_{0\le n\le\infty} Z_n.$$

По условию, $mes(Z) = 0$. Пусть $g_n(x) := \min\{f_k(x) \mid 1 \le k \le n\}$. Если $x \notin Z$, то $g_n(x) = f_n(x)$ и п.в. $g_n(x) \searrow 0\,,\ n \to \infty$. Так как

$$\text{п.в.} \quad g_n(x) = f_n(x)\,,\ \text{то}\ I_0(f_n) = I_0(g_n).$$

Так как последовательность $g_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1.1.2, то $I_0(f_n) = I_0(g_n) \to 0\,,\ n \to \infty$.

1.1.3 Построение интеграла по схеме Даниэля.

Мы приступаем к построению расширеня пространства элементарных функций и распространению элементарного интеграла на это расширенное пространство. Расширять пространство элементарных функций мы будем в два этапа: сначала мы добавим некоторые поточечные пределы элементарных функций, а потом мы добавим функции, которые представимы как разность тех функций, которые мы добавили на первом этапе.

Лемма 1.1.4. *Пусть последовательность элементарных функций* $\{f_n\}$ *удовлетворяет двум условиям:*

$$\forall n : \textit{п.в.} \quad f_{n+1}(x) \geq f_n(x)\,, \tag{1.24}$$

$$\sup\{I_0(f_n) \mid 1 \leq n < \infty\} = C < \infty\,. \tag{1.25}$$

Тогда

$$\textit{п.в.} \quad \exists f(x) : \; f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) < \infty. \tag{1.26}$$

Доказательство. Во-первых заметим, что условие (1.24) эквивалентно условию:

$$\forall n : mes\{x \mid f_n(x) > f_{n+1}(x)\} = 0. \tag{1.27}$$

Во-вторых заметим, что утверждение леммы эквивалентно утверждению:

$$mes\{x \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\} = 0. \tag{1.28}$$

Рассмотрим последовательность

$$g_n(x) := \max\{(f_k(x) - f_1(x))^+ \mid k \leq n\}.$$

Ясно, что

$$Z := \{x \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\} = \{x \mid \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \infty\} \tag{1.29}$$

Последовательность неотрицательных элементарных функций $g_n(x)$ удовлетворяет условиям:

$$\forall (x\,,\,n) : g_{n+1}(x) \geq g_n(x)\;, \text{ п.в. } g_n(x) = f_n(x) - f_1(x),$$

поэтому

$$I_0(g_n) = I_0(f_n) - I_0(f_1)$$

и

$$\forall n : I_0(g_n) \leq 2C.$$

Следовательно, монотонно неубывающая последовательность неотрицательных элементарных функций $\epsilon g_n(x)/2C$ удовлетворяет условиям (1.22) для множества (1.29), так как

$$\forall n : I_0(\epsilon g_n(x)/2C) < \epsilon\,, \text{ и } \forall (x \in Z) : \; \sup\{\epsilon g_n(x)/2C \mid 1 \leq n < \infty\} = \infty.$$

Лемма доказана.

Определение 1.1.5. Заданая на множестве X функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_+(X)$, если существует такая монотонно неубывающая последовательность элементарных функций $\{f_n(x)\}$, что

$$\text{п.в. } f_n(x) \nearrow f(x)\,,\ n \to \infty \text{ и } \sup\{|I_0(f_n)| \mid 1 \le n < \infty\} < \infty. \qquad (1.30)$$

Лемма 1.1.5. *1. Если $f(x) \in L_+(X)$ и п.в. $g(x) = f(x)$, то $g(x) \in L_+(X)$.*

2. Каждая функция из пространства $L_+(X)$ ограничена почти всюду:

$$(f \in L_+(X)) \Longrightarrow (\text{п.в. } |f(x)| < \infty).$$

3. Если $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ и $f(x)$, $g(x) \in L_+(X)$ то $\alpha f(x) + \beta g(x) \in L_+(X)$.

4. Если $f(x)$, $g(x) \in L_+(X)$ то

$$\min(f(x)\,,\ g(x)) \in L_+(X)\,,\ \max(f(x)\,,\ g(x)) \in L_+(X).$$

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из определения. Второе утверждение следует из леммы 1.1.3. Третье утверждение очевидно. Для доказательства четвертого утверждения достаточно воспользоваться непрерывностю функций max , min и очевидным неравенством

$$\begin{aligned}
&\min(f_n(x)\,,\ g_n(x)) \le \max(f_n(x)\,,\ g_n(x)) \le \\
&\max(f_n(x) - f_1(x) + |f_1(x)|\,,\ g_n(x) - g_1(x) + |g_1(x)|) \\
&\le f_n(x) + 2|f_1(x)| + g_n(x) + 2|g_1(x)|.
\end{aligned}$$

Ясно, что всегда $L_0(X) \subset L_+(X)$. В примере 1.1.3 пространство $L_+(X)$ совпадает с пространством $L_0(X)$. Рассмотрим другие прмеры.

Утверждение 1.1.4. *Если пространство X есть отрезок $[a\,,\ b]$, пространство элементарных функций есть множество $C([a\,,\ b])$ всех непрерывных функций на отрезке $[a\,,\ b]$, а элементарный интеграл есть интеграл Римана, то характеристические функции любого интервала $(\alpha\,,\ \beta) \subset [a\,,\ b]$ и отрезка $[\alpha\,,\ \beta] \subset [a\,,\ b]$ (а также характеристические функции полуинтервалов $(\alpha\,,\ \beta] \subset [a\,,\ b]$, $[\alpha\,,\ \beta) \subset [a\,,\ b]$) принадлежат пространству $L_+(X)$.*

Так как в рассматриваемой ситуации одноточечное множество (а также любое множество, состоящее из конечного чиса точек) есть множество меры ноль, то достаточно доказать, что характеристическая функция $\mathbb{I}((\alpha\,,\ \beta) \mid x)$ любого интервала $(\alpha\,,\ \beta) \subset [a\,,\ b]$ принадлежит пространству $L_+(X)$. Но

$$\forall\, x\colon \mathbb{I}((\alpha\,,\ \beta) \mid x) = \lim_{n\to\infty} \min(1\,,\ n(x-\alpha)^+\,,\ n(\beta - x)^+). \qquad (1.31)$$

Стоящая в правой части равенства (1.31) последовательность есть та последовательность, которая требуется в определении 1.1.5.

Аналогично доказывается

Утверждение 1.1.5. *Если пространство X есть параллелипипед*

$$K := \{x \mid x = (x_1 \ldots x_d) \in \mathbb{R}^d \,,\, a_j \le x_j \le b_j \,,\, a_j < b_j\},$$

пространство элементарных функций есть множество $C(K)$ всех непрерывных функций на параллелипипеде K, а элементарный интеграл есть интеграл Римана, то характеристические функции любого открытого параллепипеда

$$K_{\alpha\,,\beta} := \{x \mid x = (x_1 \ldots x_d) \in \mathbb{R}^d \,,\, a_j \le \alpha_j < x_j < \beta_j \le b_j\}$$

а также замкнутого параллелипипеда или параллелипипеда с некоторыми присоединенными гранями принадлежат пространству $L_+(X)$.

Ниже мы будем предполагать, что пространство элементарных функций -это множество непрерывных функций на соответствующей области задания, а элементарный интеграл -это интеграл Римана.

Пример 1.1.13. Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всех точках параллелипипеда K за исключением точки $x_0 \in K$, неотрицательна, удовлетворяет условию $\lim f(x) = +\infty \,,\, x \to x_0$ и интегрируема по Риману в несобственном смысле. Тогда $f \in L_+(K)$.

Для доказательства этого утвержденя достаточно рассмотреть последовательность

$$f_n(x) = \min(n \,,\, f(x)),$$

для которой выполнены условия

$$\text{п.в.} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \,,\, \int f_n(x)\,dx \le \int f(x)\,dx < \infty. \tag{1.32}$$

В правой части неравенства (1.32) стоит несобственный интеграл Римана.

Из этого примера следует, что функция $f(x) = 1/\sqrt{x}$ принадлежит пространству $L_+([0\,,\,1])$. Но функция $f(x) = -1/\sqrt{x}$ не принадлежит пространству $L_+([0\,,\,1])$, так как не существует такой непрерывной функции $f_n(x)$, которая почти всюду на $[0\,,\,1]$ удовлетворяет неравенству $f_n(x) \le -1/\sqrt{x}$.

Таким образом, пространство $L_+(X)$ *не есть линейное пространство.*

Распространим на пространство $L_+(X)$ понятие интеграла.

Определение 1.1.6. Пусть $f \in L_+(X)$ и функциональная последовательность элементарных функций $\{f_n\} \subset L_0(X)$ удовлетворяет условию

$$\text{п.в. } f_n(x) \nearrow f(x). \tag{1.33}$$

Тогда мы по определению положим

$$I_+(f) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} I_0(f_n). \tag{1.34}$$

В силу условия (1.30) предел в (1.34) всегда существует и конечен. Докажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$, а определяется только функцией $f \in L_+(X)$.

Лемма 1.1.6. *Пусть последовательности элементарных функций* $\{f_n\}$, $\{\phi_n\}$ *удовлетворяют условиям:*

$$\textit{п.в } f_n(x) \nearrow f(x)\ ,\ \textit{п.в } \phi_n(x) \nearrow \phi(x)\,,\, n \to \infty \textit{ и п.в. } f(x) \le \phi(x).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} I_0(f_n) \le \lim_{n\to\infty} I_0(\phi_n). \tag{1.35}$$

Доказательство. Пределы интегралов в (1.35) всегда существуют (как пределы монотонных числовых последовательностей), но так как в этой лемме мы не предполагаем равномерной ограниченности интегралов в (1.35), эти пределы могут быть равны $+\infty$.

Фиксируем $m < \infty$ и рассмотрим последовательность

$$h_n(x) = f_m(x) - \min(f_m(x)\,,\, \phi_n(x)).$$

Эта последовательность удовлетворяет условиям:

$$\text{п.в. } h_n(x) \searrow (f_m(x) - \min(f_m(x)\,,\, \phi(x)) = 0\,,\, n \to \infty.$$

Поэтому

$$\forall m : I_0(h_n) = I_0(f_m) - I_0(\min(f_m\,,\, \phi_n)) \to 0\,,\, n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\forall\, m\colon I_0(f_m) = \lim_{n\to\infty} I_0(\min(f_m\,,\, \phi_n)) \le \lim_{n\to\infty} I_0(\phi_n),$$

и

$$\lim_{m\to\infty} I_0(f_m) \le \lim_{n\to\infty} I_0(\phi_n).$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что предел в (1.34) зависит только от функции $f \in L_+(X)$ и поэтому определение 1.1.6 корректно.

На пространстве $L_0(X)$ интеграл I_+ совпадает с элементарным интегралом I_0.

В условиях примера 1.1.13 интеграл I_+ совпадает с несобственным интегралом Римана.

По построению, определенная равенством (1.1) функция Дирихле $f(x)$ принадлежит пространству $L_+([0\,,\,1])$ и $I_+(f) = 0$. Напомним, что фунция Дирихле не интегрируема по Риману, и из этого примера следут, что пространство $L_+(X)$ шире пространства $L_0(X)$.

Лемма 1.1.7. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Если $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $f(x)$, $g(x) \in L_+(X)$ то $I_+(\alpha f + \beta g) = \alpha I_+(f) + \beta I_+(g)$.

2. Если $f(x) \in L_+(X)$ и п.в. $f(x) \geq 0$, то $I_+(f) \geq 0$.

3. Если п.в. $f(x) = 0$, то $f(x) \in L_+(X)$ и $I_+(f) = 0$.

Первое утверждение леммы очевидно, а для доказательства второго утверждения заметим, что если п.в. $f(x) \geq 0$ и п.в. $f_n(x) \nearrow f(x)$, то п.в. $f_n^+(x) \nearrow f(x)$. Третье утверждение леммы следует из первого утверждения леммы 1.1.5 и только что доказанного утверждения 2 нашей леммы.

Третье утверждение нашей леммы можно сформулировать и в следующей форме.

Утверждение 1.1.6. *Если Z -это множество меры ноль в смысле определения 1.1.1, то характеристическая функция $\mathbb{I}(Z \mid x)$ множества Z принадлежит пространству $L_+(X)$ и интеграл от нее равен нулю:*

$$(mes(Z) = 0) \Rightarrow (\mathbb{I}(Z \mid x) \in L_+(X)\ ,\ I_+(\mathbb{I}(Z \mid \cdot) = 0).$$

Так как область определения функционала I_+ -пространство $L_+(X)$ -не есть линейное пространство, то функционал I_+ не есть линейный функционал.

Лемма 1.1.8. *Если последовательность $\{f_n(x)\} \subset L_+(X)$ такова, что*

$$\forall n\ :\ \text{п.в. } f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \text{ и } \sup\{I_+(f_n) \mid 1 \leq n < \infty\} < \infty, \tag{1.36}$$

то

$$\exists\,(f \in L_+(X)):\ \text{п.в. } f_n(x) \nearrow f(x) \text{ и } I_+(f_n) \to I_+(f)\,,\, n \to \infty. \tag{1.37}$$

Доказательство. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ почти всюду монотонно не убывает, то почти всюду существует (конечный или бесконечный) предел

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{1.38}$$

Для каждого n существует такая последовательность элементарных функций $\{g_{n,k}(x)\}$, $k = 1, \ldots$, что

$$\text{п.в. } g_{n,k}(x) \nearrow f_n(x)\,,\ k \to \infty \text{ и } I_0(g_{n,k}) \le I_+(f_n) < C, \tag{1.39}$$

и константа в (1.39) не зависит от n. Положим

$$h_k(x) := \max\{g_{n,k}(x) \mid n \le k\}. \tag{1.40}$$

В силу неравенств (1.39) последовательность элементарных функций (1.40) почти всюду монотонно не убывает и ограничена сверху опеределенной равенством (1.38)функцией $f(x)$:

$$\begin{gathered}\text{п.в. } h_{k+1}(x) = \max_{1\le n\le k+1} g_{n,k+1}(x) \ge \max_{1\le n\le k+1} g_{n,k}(x) \ge \max_{1\le n\le k} g_{n,k}(x) = \\ h_k(x) \text{ и п.в. } h_k(x) \le \max_{1\le n\le k} f_n(x) = f_k(x) \le f(x),\end{gathered} \tag{1.41}$$

поэтому

$$\forall\, k\,:\ I_0(h_k) \le I_+(f_k) < C. \tag{1.42}$$

Так как последовательность элементарных функций $\{h_k(x)\}$ монотонно не убывает и интегралы $I_0(h_k)$ ограничены не зависящей от k константой, то по лемме 1.1.4 почти всюду существует предел

$$h(x) := \lim_{k\to\infty} h_k(x), \tag{1.43}$$

и по определению пространства $L_+(X)$ заданная равенством (1.43) функция $h(x)$ принадлежит пространству $L_+(X)$, а по определению интеграла в пространстве $L_+(X)$ справедливо равенство

$$I_+(h) = \lim_{k\to\infty} I_0(h_k). \tag{1.44}$$

Из (1.40) следует, что

$$\text{п.в. } h(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x) \le f(x). \tag{1.45}$$

Следовательно,

$$\forall (n \le k)\,:\ \text{п.в. } g_{n,k}(x) \le h_k(x) \le h(x) \le f(x). \tag{1.46}$$

В неравенстве (1.46) перейдем к пределу $k \to \infty$. Получим:

$$\text{п.в.} f_n(x) = \lim_{k\to\infty} g_{n,k}(x) \le h(x) \le f(x). \tag{1.47}$$

В неравенстве (1.47) перейдем к пределу $n \to \infty$. Получим:

$$\text{п.в. } f(x) \le h(x) \le f(x).$$

Следовательно, почти всюду справедливо равенство

$$f(x) = h(x),$$

поэтому предел в (1.38) конечен почти всюду, определенная равенством (1.38) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_+(X)$ и $I_+(f) = I_+(h)$. Из неравенства (1.42) следует, что

$$I_+(f) = I_+(h) = \lim_{k\to\infty} I_0(h_k) \le \lim_{k\to\infty} I_+(f_k),$$

а из неравенства (1.47) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} I_+(f_n) \le I_+(h) = I_+(f),$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} I_+(f_n) = I_+(f).$$

Лемма доказана.

Введем основное для дальнешего понятие *пространства интегрируемых функций.*

Определение 1.1.7. Функция $f : X \mapsto \mathbb{R}^1$ *принадлежит пространству интегрируемых функций* $L(X)$, если эта функция почти всюду представима как разность двух функций из $L_+(X)$:

$$\text{п.в. } f(x) = \phi(x) - g(x)\ ,\ \phi\,,\, g \in L_+(X). \tag{1.48}$$

Таким образом,

$$(L(X) \ni f) \Leftrightarrow (\exists(\phi \in L_+(X)\,,\, g \in L_+(X))\,, \text{п.в. } f(x) = \phi(x) - g(x)).$$

Принадлежащие пространству $L(X)$ функции мы будем называть *интегрируемыми функциями.*

Если справедливо представление (1.48), то

$$\forall\, h \in L_0(X) : \text{п.в. } f(x) = (\phi(x) + h(x)) - (g(x) + h(x)),$$
$$(\phi + h)\,,\,(g + h) \in L_+(X), \tag{1.49}$$

поэтому представление (1.48) не единственно. В дальнешем нам будет важно, что этой неоднозначностью можно распорядиться специальным образом.

Лемма 1.1.9. *Если функция $f(x)$ принадлежит пространству $L(X)$, то для любого $\epsilon > 0$ существует ее представление в виде разности таких двух функций из $L_+(X)$, что*

$$\textit{п.в. } f(x) = \phi_\epsilon(x) - g_\epsilon(x)\ ,\ g_\epsilon(x) \geq 0\ ,\ I_+(g_\epsilon(x)) < \epsilon. \tag{1.50}$$

Доказательство.Пусть справедливо равенство (1.48). Так как $g \in L_+(X)$, то существует такая последовательность $\{g_n\} \subset L_0(X)$, что почти всюду $g_n(x) \nearrow g(x)\ ,\ n \to \infty$ и $I_0(g_n) \nearrow I_+(g)\ ,\ n \to \infty$. Запишим равество

$$\text{п.в. } f(x) = \phi(x) - g(x) = \phi(x) - g_n(x) - (g(x) - g_n(x)). \tag{1.51}$$

При достаточно большом n это представление является искомым.

Ясно, что $L_+(X) \subset L(X)$. Из определения следует, что если $f \in L(X)$, то $(-f) \in L(X)$, поэтому из леммы 1.1.5 следует

Лемма 1.1.10. *Пространство $L(X)$ -линейное пространство относительно операций поточечного сложения и умножения на действительные числа и если функция $f(x)$ принадлежит пространству $L(X)$, то и функция $|f(x)|$ принадлежит пространству $L(X)$.*

Действительно, из (1.48) следует, что если $f(x) \in L(X)$, то справедливо представление (1.48), поэтому

$$|f(x)| = \max(\phi(x)\,,\,g(x)) - \min(\phi(x)\,,\,g(x))\,,\,\phi\,,\,g \in L_+(X),$$

но в силу леммы 1.1.5

$$\max(\phi(x)\,,\,g(x)) \in L_+(X)\ ,\ \min(\phi(x)\,,\,g(x)) \in L_+(X),$$

поэтому $|f(x)| \in L_+(X)$.

Введем основное для дальнейшего понятие интеграла Даниэля на пространстве $L(X)$.

Определение 1.1.8. Если функция $f(x)$ принадлежит пространству $L(X)$ и для нее справедливо равенство (1.48), то ее интегралом Даниэля $I(f)$ называется число

$$I(f) := I_+(\phi) - I_+(g). \tag{1.52}$$

Докажем, что правая часть (1.52) не зависит от представления (1.48), а определяется только функцией $f(x)$. Пусть

$$\text{п.в. } f(x) = \phi(x) - g(x) = \phi_1(x) - g_1(x).$$

Тогда

$$\text{п.в. } \phi(x) + g_1(x) = \phi_1(x) + g(x).$$

Так как

$$(\phi(x) + g_1(x)) \in L_+(X)\,,\ (\phi_1(x) + g(x)) \in L_+(X),$$

то в силу леммы 1.1.6 отсюда следует равенство

$$I_+(\phi) + I_+(g_1) = I_+(\phi_1) + I_+(g),$$

поэтому

$$I_+(\phi) - I_+(g) = I_+(\phi_1) + I_+(g_1).$$

Таким образом, интеграл Даниэля определяется заданием трех объектов: основного пространства X, пространства элементарных функций $L_0(X)$ и элементарного интеграла I_0.

Приведем примеры.

Пусть основное пространство X есть полуотркрытый интервал: $X = [0\,,\,1)$. Определим множества

$$A_1 = [0\,,\,0.25)\ ,\ A_2 = [0.25\,,\,0.5)\ ,\ A_3 = [0.5\,,\,0.75)\ ,\ A_4 = [0.75\,,\,1).$$

Определим пространство элементарных функций как множество функций вида

$$f(x) = \sum_{1 \le j \le 4} a_j \mathbb{I}(A_j \mid x)\,,\ a_j \in \mathbb{R}^1. \tag{1.53}$$

Если на этом пространстве элементарных функций мы определим элементарный интеграл как функционал, который каждой функции ставит в соответствие число 0, то пространство $L(X)$ будет состоять из всех функций, заданных на $[0\,,\,1)$ и интеграл Даниэля будет каждой функции ставить в соответствие число 0.

Если на пространстве функций вида (1.53) мы определим элементарный интеграл как интеграл Римана:

$$I_0(f) = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4),$$

то множеством меры ноль будет только пустое множество и пространство $L(X)$ будет совпадать с пространством $L_0(X)$, а никакие другие функции, кроме функций из $L_0(X)$, не будут интегрируемы.

Если мы определим пространство элементарных функций как множество *всех* конечных линейных комбинаций характеристических функций *всех* непересекающихся полуинтервалов множества $[0\,,\,1)$ а элементарный интеграл определим как интеграл Римана, то пространство $L(X)$ будет совпадать с пространством интегрируемых по Лебегу функций (мы подробно обсудим этот случай позже в разделе, посвященном понятию меры).

После того, как мы введем понятие меры и обсудим связь между интегралом Даниэля и классическим понятием интеграла Лебега, наряду с обозначением (1.52) мы будем использовать следующие общепринятые обозначения для интеграла

$$I(f) \equiv \int_X f\,d\mu \equiv \int_X f(x)\,d\mu(x) \equiv \int_X f(x)\,\mu(dx). \tag{1.54}$$

Очевидна

Лемма 1.1.11. *Интеграл Даниэля $I(f)$ есть линейный неотрицательный функционал на пространстве интегрируемых функций $L(X)$:*

$$\begin{aligned}
&I : L(X) \mapsto \mathbb{R}^1\,;\ \forall(\alpha \in \mathbb{R}^1\,,\,\beta \in \mathbb{R}^1\,,\,f \in L(X)\,,\ \ g \in L(X)) :\\
&I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)\\
&(f(x) \geq 0) \Rightarrow (I(f) \geq 0).
\end{aligned}$$

Доказательство. Линейность очевидна, а для доказательства неотрицательности интеграла заметим, что если почти всюду $f(x) \geq 0$, то в равенстве (1.48) :

$$\phi(x) \geq g(x),$$

и в силу неотрицательности интеграла I_+ справедливо неравенство $I_+(\phi) \geq I_+(g)$.

Ясно, что на пространстве элементарных функций интеграл Даниэля совпадает с элементарным интегралом. Больше того, справедлива

Лемма 1.1.12. *Если функция $f(x)$ принадлежит пространству $L(X)$, то существует такая последовательность элементарных функций $\{f_n(x)\}$, что*

$$\text{п.в. } f_n(x) \to f(x)\ ,\ I(|f - f_n|) \to 0\ ,\ n \to \infty\,. \qquad (1.55)$$

Доказательство. Пусть

$$\text{п.в. } f(x) = \phi(x) - g(x)\ ,\ \phi\,,\, g \in L_+(X)\,.$$

Тогда существуют такие последовательности элементарных функций $\{\phi_n\}$, $\{g_n\}$, что

$$\text{п.в. } \phi_n(x) \nearrow \phi(x)\ ,\ g_n(x) \nearrow g(x),$$

Положим

$$f_n = \phi_n - g_n.$$

Тогда

$$\text{п.в.}:\ \ |f - f_n| \le |(\phi - \phi_n) - (g - g_n)| \le (\phi - \phi_n) + (g - g_n) \to 0\ ,\ n \to \infty,$$

и по определению интеграла в пространстве $L_+(X)$

$$\begin{gathered} I(|f - f_n|) \le I(\phi - \phi_n) + I(g - g_n) = \\ I_+(\phi - \phi_n) + I_+(g - g_n) \to 0\ ,\ n \to \infty. \end{gathered}$$

Конструкция обычно используемого в современном анализе понятия интеграла принадлежит Лебегу (и именно для интеграла Лебега обычно используются обозначения (1.54)). В введенных нами терминах классическую конструкцию интеграла Лебега в общих чертах можно описать так. Рассматривается ситуация, описанная в 1.1.1 (или в 1.1.2) и сначала интеграл распространяется на такие функции, которые принимают значения 0 и 1, а потом с помощью линейных комбинаций этих функций интеграл распространяется на те функции, которые можно приблизить такими линейными комбинациями. Конструкция Лебега дает более подробную информацию о пространстве интегрируемых функций, но она требует и больших трудов на превоначальном этапе исследования. Интеграл Лебега будет обсужден нами после введения понятия меры множества. В большинстве случаев интеграл Лебега и интеграл Даниэля совпадают при соответствующем соглосовании при выборе элементарного интеграла и меры, поэтому в дальнейшем, следуя традиции, в тех случаях, когда интеграл Даниэля и интеграл Лебега совпадают, полученное нами расширение интеграла мы будем называть интегралом Лебега.

Справедливо

Утверждение 1.1.7. *Пусть пространство X есть параллелипипед $K \subset \mathbb{R}^d$:*

$$K := \{x | x = (x_1\,,\, \ldots\,, x_d) \in \mathbb{R}^d\,,\, a_i \leq x_i \leq b_i\,,\, a_i < b_i\,\},$$

(и отезок $[a\,,\, b]$ в случае $d = 1$). Пусть пространство элементарных функций $L_0(K)$ есть пространство всех непрерывных функций, заданных на K : $L_0(K) = C(K)$, а элементарный интеграл I_0 на $L_0(K)$ есть интеграл Римана:

$$I_0(f) = \int_K f(x)\, dx.$$

Тогда построенный по схеме Даниэля интеграл I совпадает с классическим интегралом Лебега. Это означает, что:

1. Функция $f(x)$ принадлежит пространству $L(K)$ в том и только том случае, если она интегрируема по Лебегу на K.

2. Интегал Даниэля функции f равен ее интегралу Лебега:

$$\forall\, (f \in L(K)) : \int_K f(x)\, dx := I(f). \tag{1.56}$$

В левой части (1.56) *стоит интеграл Лебега, в правой части -интеграл Даниэля.*

3. Множество $Z \subset K$ есть множество меры ноль в смысле определения (1.1.1) *в том и только том случае, если мера Лебега множества Z равна нулю.*

Так как мы не вводили интеграл Лебега, то мы сейчас не будем доказывать это утверждение, но обсудим его позже после введения понятия меры множества. Сейчас это утверждение можно принять за определение интеграла Лебега в $\mathbb{R}^d$.

Равенство (1.56) мы будем рассматривать как определение стоящего в левой части этого равенства символа.

Утверждение 1.1.7 дает нам основание дать

Определение 1.1.9. Мы будем говорить, что определенная в параллелипипеде $K \subset \mathbb{R}^d$ функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу в параллелипипеде K, если она принадлежит пространству $L(K)$ интегрируемых по Даниэлю функций, причем при построении пространства $L(K)$ в качестве элементарных функций взято пространство непрерывных в параллелипипеде функций и в качестве элементарного интеграла взят интеграл Римана.

Заметим, что часто под интегралом Лебега понимают интеграл, построеннный по предложенной Лебегом схеме, но с произвольной мерой. Такой интеграл также называется интегралом Лебега-Стильтеса.

В дальнейшем мы будем придерживаться следующих определений.

Определение 1.1.10. Пусть D -ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ и K -параллелипипед, который содержит область $D : K \supset D$. Мы будем говорить, что заданная в области D функция $f(x)$ интегрируема по области D, если

1. Функция $\mathbb{I}(D \mid x)$ интегрируема в параллелипипеде K.
2. Функция $f(x)\mathbb{I}(D \mid x)$ интегрируема в параллелипипеде K.

При этих условиях мы полагаем по определению

$$\int_D f(x)\, dx = \int_K f(x)\mathbb{I}(D \mid x)\, dx. \tag{1.57}$$

Читателю предлагается проверить, что правая часть (1.57) не зависит от выбора объемлющего параллелипипеда K.

В дальнейшем интеграл в смысле определений 1.1.10-1.1.12 мы будем называть просто *интегралом* или *интегралом Лебега*, если уточнение необходимо.

В общем случае при построении интеграла Даниэля не предполагается выполнение условия 1.1.8. Однако если это условие не выполнено и если функция $f(x) \equiv 1$ не принадлежит пространству $L(X)$, то работать с таким интегралом довольно трудно, и здесь часто помогает конструкция, аналогичная конструкции несобственного интеграла Римана в многомерном случае. Это обобщение понятия интеграла в смысле определения 1.1.8 можно назвать *несобственным интегралом.* В общем случае мы определим это понятие так.

Условие 1.1.11. *Пусть $K(m)$, $m = 1 \ldots$ -последовательность множеств, которая удовлетворяет условиям:*

$$\bigcup_m K(m) = D\ ,\ K(m) \subset K(m+1). \tag{1.58}$$

Предположим, что для каждого m построено пространство $L(K(m))$ и интеграл I_m на пространстве $L(K(m))$, причем выполнены условия:

$$\begin{aligned}
&1.\forall m :\ \textit{если}\ f(x) \in L(K(m))\\
&\textit{то}\ f(x)\mathbb{I}(K(m) \mid x) \in L(K(m+1)) && (1.59)\\
&2.\, \forall m : \mathbb{I}(D \bigcap K(m) \mid x) \in L(K(m)). && (1.60)\\
&3.\, \forall (m\, ,\, f \in L(K(m))) :\\
&I_m(f) = I_{m+1}(f\mathbb{I}(K(m) \mid \cdot)). && (1.61)\\
&4.\forall\, m\colon (f(x) \equiv 1) \in L(K(m)). && (1.62)
\end{aligned}$$

При выполнении этих условий мы определяем несобственный интеграл от заданной в области D функции так.

Определение 1.1.11. Мы говорим, что заданная в области D функция $f(x)$ интегрируема в области D в несобственном смысле, если конечен предел

$$\lim_{m\to\infty} I_m(|f|\mathbb{I}(D\bigcap K(m)\mid\cdot)) < \infty,$$

и в это случае мы по определению полагаем

$$\int_D f(x)\nu(dx) := \lim_{m\to\infty} I_m(f\mathbb{I}(D\bigcap K(m)\mid\cdot)). \tag{1.63}$$

В случае неограниченной области D в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ и классического интеграла Лебега это определение конкретизируется так.

Пусть $K(m)$, $m=1\ldots$ -последовательность параллелипипедов, которая удовлетворяет условию:

$$\bigcup_m K(m) = \mathbb{R}^d\ ,\ K(m)\subset K(m+1). \tag{1.64}$$

Определение 1.1.12. Мы будем говорить, что заданная в неограниченной области $D\subset\mathbb{R}^d$ функция $f(x)$ интегрируема по области D, если

1. При любом m функция $\mathbb{I}(D\bigcap K(m)\mid x)$ интегрируема в параллелипипеде $K(m)$.

2. Функция $f(x)\mathbb{I}(D\bigcap K(m)\mid x)$ интегрируема в параллелипипеде $K(m)$.

3. Конечен предел:

$$\lim_{m\to\infty}\int_{K(m)} |f(x)|\mathbb{I}(D\bigcap K(m)\mid x)\,dx < \infty. \tag{1.65}$$

В этом случае мы по определению полагаем

$$\int_D f(x)\,dx := \lim_{m\to\infty}\int_{K(m)} f(x)\mathbb{I}(D\bigcap K(m)\mid x)\,dx. \tag{1.66}$$

В дальнейшем интеграл в смысле определений 1.1.11-1.1.12 мы также будем называть *интегралом* или *интегралом Лебега*, если уточнение необходимо и не будем специально фиксировать внимание на том, что интеграл понимается как несобственный.

Из леммы 1.1.12 следует, что интеграл в смысле определения 1.1.9 есть предел интегралов Римана от непрерывных функций, поэтому на интеграл в смысле определения 1.1.9 с помощью операции предельного перехода легко переносятся обычные правила действия с интегралами (замена переменных, интегрирование по частям, аддитивность относительно области интегрирования и т.д.) Однако сама операция предельного перехода в интеграле Лебега отличается от операции предельного перехода в интеграле Римана и будет изучена нами ниже.

1.1.4 Предельный переход в интеграле Лебега.

Нас будет интересовать следующая задача. Пусть последовательность интегрируемых функций $\{f_n\}$ при $n \to \infty$ в каком-то смысле сходится к предельной функции f. При каких условиях предельная функция f интегрируема и ее интеграл есть предел интегралов от функций f_n? Основными результатами этой части являются две теоремы: теорема Лебега о предельном переходе в интеграле и теорема Рисса-Фишера о полноте пространства $L(X)$.

Мы начнем с доказательства теоремы Беппо Леви.

Теорема 1.1.1. *Пусть последовательность $\{\phi_n\} \subset L(X)$ удовлетворяет условиям:*

$$\text{п.в. } \phi_n(x) \geq 0 \ , \ I(\sum_{1\leq k\leq n} \phi_k) < C \, , \tag{1.67}$$

где C не зависит от n. Тогда:

1. Ряд

$$\phi(x) = \sum_n \phi_n(x)$$

сходится почти всюду и его сумма $\phi(x)$ принадлежит пространству $L(X)$.

2. Справедливо равенство

$$I(\phi) = \sum_n I(\phi_n). \tag{1.68}$$

Доказательство. В силу леммы 1.1.9 каждую функцию $\phi_n(x)$ можно представить в виде

$$\phi_n(x) = f_n(x) - g_n(x) \ , \tag{1.69}$$

где

$$f_n \, , \, g_n \ \in L_+(X) \ , \ g_n(x) \geq 0 \, , \, I(g_n) < 2^{-n}. \tag{1.70}$$

Из неотрицательности функций $\phi_n(x)$ следует неравенство

$$f_n(x) = \phi_n(x) + g_n(x) \geq 0,$$

поэтому

$$I_+(\sum_{1\leq k\leq n} f_k) = I_+(\sum_{1\leq k\leq n} \phi_k) + I_+(\sum_{1\leq k\leq n} g_k) \leq C + 1.$$

Мы видим, что последовательности частных сумм

$$S_n(f) = \sum_{1\le k\le n} f_n \ , \ S_n(g) = \sum_{1\le k\le n} g_k$$

удовлетворяют условиям леммы 1.1.8: это монотонно неубывающие последовательности функций из пространства $L_+(X)$ с ограниченными в совокупности интегралами. Следовательно, в силу леммы 1.1.8 почти всюду при $n \to \infty$ эти суммы имеют пределы, эти пределы принадлежат пространству $L_+(X)$:

$$\text{п.в. } \exists S(f)(x) : \lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = S(f)(x) \ , \ S(f) \in L_+(X),$$
$$\text{п.в. } \exists S(g)(x) : \lim_{n\to\infty} S_n(g)(x) = S(g)(x) \ , \ S(g) \in L_+(X),$$

и справедливы равенства:

$$I_+(S(f)) = \lim_{n\to\infty} I_+(S_n(f)) \ , \ I_+(S(g)) = \lim_{n\to\infty} I_+(S_n(g)).$$

Поэтому почти всюду существует предел

$$\phi(x) := \lim_{n\to\infty} (S_n(f)(x) - S_n(g)(x))$$

и справедливо равенство

$$I(\phi) = \lim_{n\to\infty} (I_+(S_n(f)) - I_+(S_n(g))) = \lim_{n\to\infty} \sum_{1\le k\le n} I(\phi_k).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1.2. *Если принадлежащая пространству $L(X)$ последовательность функций $\{f_n(x)\}$ имеет равномерно ограниченные интегралы:*

$$f_n \in L(X) \ , \ |I(f_n)| < C,$$

где C не зависит от n, и почти всюду

$$\text{либо } f_n(x) \nearrow f(x) \ , \ \text{либо } f_n(x) \searrow f(x), \qquad (1.71)$$

то определенная в (1.71) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L(X)$:

$$f \in L_+(X) \text{ и } I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n).$$

Для доказательства этого утверждения достоточно рассмотреть либо последовательность

$$\phi_n = f_{n-1} - f_n \ , \ f_0 = 0 \, ,$$

либо последовательность

$$\phi_n = f_n - f_{n-1} \ , \ f_0 = 0 \, ,$$

и применить доказанную теорему.

Следствие 1.1.3. *Если принадлежащая пространству $L(X)$ функция $f(x)$ почти всюду неотрицательна и интеграл от нее равен нулю, то функция $f(x)$ почти всюду равна нулю.*

Для доказательства данного утверждения достаточно применить теорему Беппо-Леви к ряду

$$\sum_n n f(x).$$

В частности, справедливо

Следствие 1.1.4. *Если характеристическая функция*

$$\mathbb{I}(A \mid x) = \begin{cases} 1 \ , \ x \in A \\ 0 \ , \ x \notin A \end{cases}$$

множества $A \subset X$ интегрируема:

$$\mathbb{I}(A \mid x) \in L(X)$$

и интеграл от нее равен нулю:

$$I(\mathbb{I}(A \mid \cdot)) = 0,$$

то множество A есть множество меры ноль в смысле определения 1.1.1.

Следующая теорема называется теоремой Лебега о предельном переходе в интеграле и часто применяется в приложениях.

Теорема 1.1.2. *Если последовательность интегрируемых функций $\phi_n \in L(X)$ почти всюду имеет предел:*

$$\text{п.в.} \ \exists \, \phi(x) : \ \phi(x) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(x) \, , \tag{1.72}$$

и существует такая интегрируемая функция $\phi_0(x) \in L(X)$, *что*

$$\forall\, n : \text{п.в. } |\phi_n(x)| \le \phi_0(x), \tag{1.73}$$

то определенная равенством (1.72) *функция интегрируема:*

$$\phi \in L(X), \tag{1.74}$$

и справедливо равенство

$$I(\phi) = \lim_{n\to\infty} I(\phi_n)\,. \tag{1.75}$$

Таким образом, если выполнены условия (1.72)-(1.73), *то мы можем утверждать, что обе части равенства*

$$\lim_{n\to\infty} I(\phi_n) = I(\lim_{n\to\infty} \phi_n),$$

сущесвуют и равны.

Доказательство. Определим функции

$$f_{n,k}(x) := \max\{\phi_{n+j}(x) \mid 0 \le j \le k\}\ ,\ g_{n,k}(x) := \min\{\phi_{n+j}(x) \mid 0 \le j \le k\}.$$

Справедливы оценки

$$|g_{n,k}(x)| \le \phi_0(x)\ ,\ |f_{n,k}(x)| \le \phi_0(x). \tag{1.76}$$

Очевидно, что

$$f_{n,k+1}(x) \ge f_{n,k}(x)\ ,\ g_{n,k+1}(x) \le g_{n,k}(x).$$

В силу следствия 1.1.2 и оценки (1.73) справедливы утверждения

$$\exists (f_n(x) \in L(X)) \colon \lim_{k\to\infty} f_{n,k}(x) = f_n(x), \tag{1.77}$$

$$\exists (g_n(x) \in L(X)) \colon \lim_{k\to\infty} g_{n,k}(x) = g_n(x). \tag{1.78}$$

В силу (1.72) определенные равенствами (1.77) -(1.78) функции удовлетворяют условиям:

$$f_n(x) \searrow \phi(x)\ ,\ g_n(x) \nearrow \phi(x)\,,\ n \to \infty;$$
$$\forall n : |g_n(x)| \le \phi_0(x)\ ,\ |f_n(x)| \le \phi_0(x).$$

Снова примения следствие 1.1.2, мы можем утверждать, что

$$\phi \in L(X) \text{ и } I(\phi) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} I(g_n).$$

Но очевидно, что
$$I(g_n) \le I(\phi_n) \le I(f_n).$$
Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть
$$a_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx\,,\ \text{где}\ f_n(x) = (\cos(1/x))^{2n}\,,\ x > 0\,,\ f_n(x) = 0\,,\ x = 0.$$
Ясно, что
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\ ,\ x \ne \frac{1}{\pi m}\ ,\ m = 1\ \ldots\ ,\ f_n(\frac{1}{\pi m}) = 1.$$
Так как $|f_n(x)| \le 1$, а множество точек $\{x_m \mid x_m = \frac{1}{\pi m}\ ,\ m = 1, \ldots\}$ есть множество меры ноль, то мы можем утверждать что $a_n \to 0\ ,\ n \to \infty$.

Иногда полезно следующее уточнение теоремы 1.1.2.

Следствие 1.1.5. *Если выполнены условия теоремы 1.1.2, то*
$$I(|\phi_n - \phi|) \to 0\ ,\ n \to \infty. \tag{1.79}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что
$$\text{п.в.}\ |\phi_n(x) - \phi(x)| \to 0\ ,\ n \to \infty\ ,\ \forall n : |\phi_n(x) - \phi(x)| \le 2\phi_0(x),$$
и применить доказанную теорему.

Доказання теорема показывает существенное отличие интеграла Лебега от интеграла Римана: интеграл Лебега при очень общих предположениях "выдерживает"поточечный предельный переход под знаком интеграла.

Фиксируем внимание читателя на следующем обстоятельстве: теорема Лебега 1.1.2 доказана нами для интеграла, понимаемого в смысле определения 1.1.8. Если же интеграл понимается как несобственный в смысле определения 1.1.11, то необходимо еще рассмотреть возможность перестановки операций предельного перехода в 1.63

Следующие три леммы являются вариациями на тему теоремы Лебега и часто исползуются в приложениях.

Лемма 1.1.13. *Если последовательность интегрируемых функций* $\{\phi_n(x)\}$ *почти всюду сходится к функции* $\phi(x)$*:*
$$\textit{п.в.}\ \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x),$$

и модуль функции $\phi(x)$ ограничен сверху интегрируемой функцией:

$$\text{п.в.}\ |\phi(x)| \leq \phi_0(x)\ ,\ \phi_0(x) \in L(X),$$

то функция $\phi(x)$ интегрируема:

$$\phi(x) \in L(X)$$

и справедливо неравенство

$$|I(\phi)| \leq I(\phi_0).$$

Доказательство. Определим функцию

$$\psi_n(x) = \max(\min(\phi_n(x)\,,\, \phi_0(x))\,,\, -\phi_0(x)).$$

Ясно, что

$$\text{п.в. :}\ |\psi_n(x)| \leq \phi_0(x)\ ,\ \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \phi(x).$$

Поэтому в силу теоремы Лебега

$$\phi(x) \in L(X) \text{ и } \lim_{n\to\infty} I(\psi_n) = I(\phi).$$

Но

$$|I(\psi_n)| \leq I(\phi_0),$$

поэтому

$$|I(\phi)| \leq I(\phi_0). \tag{1.80}$$

Утверждение доказано.

Лемма 1.1.14. *Если последовательность интегрируемых функций $\{\phi_n(x)\}$ удовлетворяет условиям:*

$$\text{п.в.}\ \phi_n(x) \geq 0\ ,\ \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)\ ,\ I(\phi_n) \leq C, \tag{1.81}$$

где C не зависит от n, то определенная в равенстве (1.81) *функция $\phi(x)$ интегрируема и выполнено неравенство:*

$$I(\phi) \leq C.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$\psi_n(x) = \inf\{\phi_k(x) \mid k \leq n < \infty\}.$$

Эта последовательность удовлетворяет условиям:

$$\text{п.в. :}\ \psi_n(x) \nearrow \phi(x)\ ,\ I(\psi_n) \leq C.$$

Поэтому в силу следствия из теоремы Беппо Леви

$$\phi(x) \in L(X)\ ,\ I(\phi) \leq C.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.1.15. *Если последовательность интегрируемых функций $\{\phi_n(x)\}$ удовлетворяет условиям:*

$$\text{п.в. } \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi(x)\ ,\ \forall n : I(|\phi_n|) \le C, \tag{1.82}$$

то определенная в равенстве (1.82) *функция* $\phi(x)$ *интегрируема и выполнено неравенство:*

$$|I(\phi)| \le C.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\text{п.в. } \lim_{n\to\infty} |\phi_n(x)| = |\phi(x)|.$$

Поэтому в силу леммы 1.1.14 $|\phi(x)| \in L(X)$. Теперь достаточно воспользоваться леммой 1.1.13.

Теперь мы готовы к доказательству одного из основных для нас фактов теории интеграла Лебега: теоремы Рисса-Фишера о полноте пространства $L(X)$.

Теорема 1.1.3. *Если последовательность интегрируемых функций $f_n(x)$ удовлетворяет условию:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{I(|f_n - f_{n+m}|) \mid 0 \le m < \infty\} = 0, \tag{1.83}$$

то

1. В пространстве $L(X)$ существует такая функция $f(x)$, что

$$\lim_{n\to\infty} I(|f_n - f|) = 0. \tag{1.84}$$

2. Существует такая подпоследовательность $\{f_{n(j)}(x)\}$ последовательности $\{f_n(x)\}$, что

$$\text{п.в. } f_{n(j)}(x) \to f(x)\ ,\ j \to \infty.$$

Доказательство. Напомним, что про последовательность, которая удовлетворяет условию (1.83), говорят, что она удовлетворяет *условию Коши* в метрике $L(X)$ или *фудаментальна* в метрике $L(X)$.

Из условия (1.83) следует, что существует такая подпоследовательность $f_{n(j)}(x)$ последовательности $f_n(x)$, которая удовлетворяет условию:

$$\forall (m > n(j)) : I(|f_{n(j)} - f_m|) < 2^{-j}.$$

Для такой подпоследовательности сходится ряд

$$\sum_{1\le j<\infty} I(|f_{n(j+1)} - f_{n(j)}|) < \infty,$$

Функции
$$x \mapsto |f_{n(j+1)}(x) - f_{n(j)}(x)|$$
интегрируемы, поэтому из сходимости этого ряда в силу теоремы Беппо Леви следует, что

$$\text{п.в.} \sum_{1\le j<\infty} |f_{n(j+1)}(x) - f_{n(j)}(x)| < \infty,$$

и поэтому

$$\text{п.в.} \sum_{1\le j<\infty} (f_{n(j+1)}(x) - f_{n(j)}(x)) < \infty,$$

Но

$$\sum_{1\le j\le m} (f_{n(j+1)}(x) - f_{n(j)}(x) = f_{n(m+1)}(x) - f_{n(1)}(x),$$

поэтому
$$\text{п.в } \exists f(x): \lim_{m\to\infty} f_{n(m)}(x) = f(x). \tag{1.85}$$
Так как

$$\forall\, m\colon I(|f_{n(m)}|) \le I(|f_{n(m)} - f_{n(1)}|) + I(|f_{n(1)}|) < 1 + I(|f_{n(1)}|),$$

то к последовательности $\{f_{n(m)}\}$ мы можем применить лемму 1.1.15 и на основе этой леммы мы можем утверждать, что определенная равенством (1.85) функция $f(x)$ принадлежит пространству $L(X)$. Применяя лемму 1.1.15 к последовательности

$$\phi_m(x) = f_{n(m)}(x) - f_k(x)\ ,\ k > N(\epsilon),$$

мы получим, что
$$I(|f - f_k|) \le \epsilon\ ,\ k > N(\epsilon).$$
Теорема доказана.

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ удовлетворяет равенству (1.84) то говорят, что она сходится к функции $f(x)$ в пространстве $L(X)$. Из теоремы Рисса-Фишера следует, что в этом случае из последовательности $\{f_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, которая будет сходится к функции $f(x)$ почти всюду. Однако сама последовательность $\{f_n(x)\}$ при этом может не сходится ни в одной точке. Приведем соответствующий классический пример.

Пример 1.1.14. На отрезке $[0\,,\,1]$ определим функции

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 1\,,\ x \in \left[\frac{k}{n}\,,\ \frac{k+1}{n}\right]\,,\ 0 \le k < n\,, \\ 0,\ x \notin \left[\frac{k}{n}\,,\ \frac{k+1}{n}\right]. \end{cases}$$

Упорядочим индексы функциий $f_{n,k}$: Будем считать, что $\{n, k\} > \{n', k'\}$, если $n > n'$, а при $n = n'$ если $k > k'$. Ясно, что

$$\int_0^1 f_{n,k}(x)\,dx = 1/n \to 0\,,\ n \to \infty\,,$$

но предела при $\{n, k\} \to \infty$ у функций $f_{n,k}(x)$ не существует ни в одной точке $x \in [0\,,\,1]$.

1.1.5 Пространства $L^p(X)$.

В этой части мы будем считать, что пространство элементарных функций $L_0(X)$, по которому мы строим интеграл, удовлетворяет условиям 1.1.8 и 1.1.9.

В силу принятого нами условия 1.1.9 для любой *основной* функции $\phi \in L_0(X)$ выполнено включение

$$\forall p > 1 :\ |\phi|^p \in L_0(X) \subset L(X).$$

Но, вообще говоря, может случиться так, что $f(x) \in L(X)$, но $|f(x)|^p \notin L(X)$ при $p > 1$. Примером может служить функция $f(x) = x^{-1/p}$, $0 < x \le 1$. Так как эта функция неотрицательна и интегрируема по Риману в несобственном смысле на отрезке $[0\,,\,1]$, то она интегрируема по Лебегу, однако очевидно, что функция $|f(x)|^p$ не интегрируема по Лебегу на отрезке $[0\,,\,1]$. Мы посвятим эту часть изучению функций, которые обладают тем свойством, что они сами и некоторая степень их модуля интегрируемы.

Лемма 1.1.16. *1. При любом $p > 1$ для $a \ge 0$, $b \ge 0$ справедливо неравенство*

$$(a + b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{1.86}$$

2. При любых $p > 1$, $q > 1$, таких, что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{1.87}$$

для $a \ge 0$, $b \ge 0$ справедливо неравенство

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.88}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (1.86) рассмотрим функцию
$$\phi(t) = 2^{p-1}(1 + t^p) - (1 + t)^p.$$
Эта функция удовлетворяет условиям:
$$\phi(0) > 0 \ , \forall t : \ \frac{d\phi}{dt}(t) > 0.$$
Следовательно,
$$\forall (a \geq 0 \ , \ b > 0) : \ \phi(a/b) > 0,$$
что эквивалентно (1.86).

Для доказательства неравенства (1.88) рассмотрим функцию
$$\phi(t) = \frac{a^p}{p} + \frac{t^q}{q} - at.$$
Справедливы утверждения:
$$\phi(0) > 0 \ , \phi(\infty) = \infty,$$
и существует единственная точка $t = a^{1/(q-1)}$, в которой производная функции ϕ равна нулю, причем сама функция в этой точке тоже равна нулю. Следовательно, $\forall \, t > 0 : \phi(t) \geq 0$, что эквивалентно (1.88). Лемма доказана.

Показатели степени $p > 1 \ , \ q > 1$, которые удовлетворяют условию (1.87), называются *сопряженными* показателями степени. Сопряженные показатели степени удовлетворяют условию:
$$p + q = pq.$$

Определение 1.1.13. Если выполнены условия 1.1.8 и 1.1.9, то мы говорим, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $L^p(X)$, если сама функция $f(x)$ принадлежит пространству $L(X)$ и функция $|f(x)|^p$ также принадлежит пространству $L(X)$.

Лемма 1.1.17. *Пространство $L^p(X)$ есть линейное пространство: если функции $f(x)$, $g(x)$ принадлежат пространству $L^p(X)$, то и их линейная комбинация $\alpha f(x) + \beta g(x)$ принадлежит пространству $L^p(X)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что функция $\phi(x) = f(x) + g(x)$ принадлежит пространству $L^p(X)$. Ранее мы уже доказали, что пространство $L(X)$ есть линейное пространство, поэтому $|f(x) + g(x)| \in L(X)$. Осталось доказать, что $|f(x) + g(x)|^p \in L(X)$. Согласно лемме

1.1.12 существуют такие последовательности элементарных функций $f_n(x)$, $g_n(x)$, что

$$\text{п.в. } f_n(x) \to f(x)\ ,\ g_n(x) \to g(x)\ ,\ n \to \infty. \qquad (1.89)$$

Из 1.1.9 и (1.89) следует, что

$$|f_n(x) + g_n(x)|^p \in L(X) \text{ и п.в. } |f_n(x) + g_n(x)|^p \to |f(x) + g(x)|^p.$$

Но в силу неравенства (1.88):

$$|f(x) + g(x)|^p \le 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \in L(X),$$

поэтому в силу леммы 1.1.13

$$|f(x) + g(x)|^p \in L(X).$$

Лемма доказана.

Положим по определению

$$\forall\,(f \in L^p(X)) :\ \|f \mid L^p(X)\| = I(|f|^p)^{1/p} \qquad (1.90)$$

Определенный равенством (1.90) функционал $f \mapsto \|f \mid L^p(X)\|$ называется L^p-нормой функции f.

Теорема 1.1.4. *Если $f(x) \in L^p(X)$, $g(x) \in L^q(X)$, то $f(x)g(x) \in L(X)$ и справедливо неравенство Гельдера*

$$I(|fg|) \le \|f \mid L^p(X)\| \cdot \|g \mid L^q(X)\|. \qquad (1.91)$$

Доказательство. Пусть последовательности элементарных функций $f_n(x)$, $g_n(x)$ удовлетворяют условию (1.89). Тогда

$$\text{п.в. } |f_n(x)g_n(x)| \to |f(x)g(x)| \le \left(\frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)^q}{q}\right) \in L(X). \qquad (1.92)$$

В силу леммы 1.1.13 отсюда следует, что $|f(x)g(x)| \in L(X)$. В неравенстве (1.92) сделаем замену $f(x) \mapsto f(x)/\|f \mid L^p(X)\|$, $g(x) \mapsto g(x)/\|g \mid L^q(X)\|$ и потом проинтегрируем. После умножения на $\|f \mid L^p(X)\|\|g \mid L^q(X)\|$ получим (1.91). Теорема доказана.

Теорема 1.1.5. *Если $f \in L^p(X)$, $g \in L^p(X)$, то справедливо неравенство Минковского:*

$$\|f + g \mid L^p(X)\| \le \|f \mid L^p(X)\| + \|g \mid L^p(X)\|. \qquad (1.93)$$

Доказательство. Если p , q -сопряженные показатели, то справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} &I(|f+g|^p) \le I(|f+g|^{p-1}|f|) + I(|f+g|^{p-1}|g|) \\ &\le I(|f+g|^{(p-1)q})^{1/q} I(|f|^p)^{1/p} + I(|f+g|^{(p-1)q})^{1/q} I(|g|^p)^{1/p}. \end{aligned}$$

Разделив обе части полученного неравенства на $I(|f+g|^{(p-1)q})^{1/q}$ и учитывая, что $(p-1)q = p$, $1 - 1/q = 1/p$, мы получим (1.93). Теорема доказана.

Теорема 1.1.6. *Если последовательность функций* $\{f_n(x)\} \subset L^p(X)$ *удовлетворяет условию:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\||f_n - f_{n+m}| \mid L^p(X)\| \mid 0 \le m < \infty\} = 0, \tag{1.94}$$

то

1. В пространстве $L^p(X)$ существует такая функция $f(x)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \||f_n - f| \mid L^p(X)\| = 0. \tag{1.95}$$

2. Существует такая подпоследовательность $f_{n(j)}(x)$ последовательности $f_n(x)$, что

$$\text{\textit{п.в.}}\ f_{n(j)}(x) \to f(x)\ ,\ j \to \infty.$$

Если последовательность функций $\{f_n(x)\} \subset L^p(X)$ удовлетворяет условию (1.94), то говорят, что она *фундаментальна* в пространстве $L^p(X)$, а описываемое в утверждении 1 свойство пространства $L^p(X)$ называется *полнотой* пространства $L^p(X)$.

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера к (1.94) и учитывая условие 1.1.8, мы получаем:

$$I(|f_n - f_m|) \le I(1)^{1/q} I(|f_n - f_m|^p)^{1/p} \to 0\ ,\ n\, m \to \infty. \tag{1.96}$$

Таким образом, при выполнении условия 1.1.8 фундаментальная в $L^p(X)$ последовательность фундаментальна в $L(X)$. Следовательно, из последовательности $\{f_n(x)\}$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{f_{n(j)}(x)\}$, что

$$\text{п.в. } f_{n(j)}(x) \to f(x) \in L(X)\ ,\ j \to \infty. \tag{1.97}$$

Учитывая (1.94), мы получаем

$$\text{п.в. } |f_{n(j)}(x)|^p \to |f(x)|^p\ ,\ I(|f_{n(j)}|^p) \le C.$$

Применяя лемму 1.1.15 к последовательности $\phi_j(x) = f_{n(j)}(x)$, мы получаем, что определенная равенством (1.97) функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

$$f(x) \in L(X)\ ,\ |f(x)|^p \in L(X).$$

Применяя лемму 1.1.15 к последовательности $\phi_j(x) = |f_{n(j)}(x) - f_m(x)|^p$, мы получаем, что

$$I(|f - f_m|^p) = I(\lim_{j\to\infty} |f_{n(j)} - f_m|^p) \le \epsilon\ ,\ m > N(\epsilon).$$

Теорема доказана.

Если функция $f(x) \equiv 1$ не принадлежит пространству $L(D)$, то L^p-норма функции f и пространство $L^p(D)$ обычно определяются так, что в правой части (1.90) стоит несобственный интеграл в смысле определения 1.1.11.

Остановимся на этом подробнее. Пусть выполнены условия 1.1.11. Тогда мы определяем пространство $L^p(D)$ так.

Определение 1.1.14. Мы говорим, что заданная в области D функция $f(x)$ принадлежит пространству $L^p(D)$, если

$$\forall\, m\colon f(x)\mathbb{I}(D \bigcap K(m) \mid x) \in L^p(K(m))$$

и конечен предел

$$\lim_{m\to\infty} I_m((|f|\mathbb{I}(D \bigcap K(m) \mid \cdot))^p) < \infty,$$

и в это случае мы по определению полагаем

$$\|f \mid L^p(X)\|^p := \lim_{m\to\infty} I_m((|f|\mathbb{I}(D \bigcap K(m) \mid \cdot))^p). \tag{1.98}$$

Для определенной равенством (1.98) L^p-нормы справедливы неравенства Гельдера и Минковского: для доказательства этого утверждения достаточно выписать соответствующие неравенства в каждом прстранстве $L^p(K(m))$ и потом перейти к пределу $m \to \infty$. Пространство $L^p(D)$ с определенной равенством (1.98) L^p-нормой полно. Доказательство проводится небольшим изменением доказательства теоремы 1.1.6: замечаем, что из того, что последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна в смысле нормы (1.98), следует, что она фундаментальна по норме каждого пространства $L^p(D \bigcap K(m))$, и поэтому с помощью диагонального процесса последовательность $\{f_{n(j)}\}$ можно выбрать так, что она будет сходиться в каждом пространстве $L(D \bigcap K(m))$. Дальнейшие рассуждения остаются без изменения.

Остановимся на операции предельного перехода в простанстве $L^p(D)$ для того случая, когда норма определяется равенством (1.98).

Лемма 1.1.18. *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и функциональная последовательность* $\{f_n(x)\} \subset L^p(D)$ *удовлетворяет условиям:*

$$1.\exists f : \forall m \, \|f_n - f \mid L^p(D \bigcap K(m))\| \to 0, \tag{1.99}$$

$$2. \lim_{m\to\infty} \sup\{I(\mathbb{I}(D \bigcap (K(m+s) \setminus K(m)))|f_n|^p \mid n \, , \, s\} = 0. \tag{1.100}$$

Тогда определенная в равенстве (1.99) *функция* $f(x)$ *принадлежит пространству* $L^p(D)$ *и*

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \, , \; n \to \infty. \tag{1.101}$$

Для доказательства достаточно проверить, что из условий (1.99) и (1.100) следует, что последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна в норме пространства $L^p(D)$.

Для пространства $L^p(\mathbb{R}^d)$ можно дать следующее уточнение леммы 1.1.18

Лемма 1.1.19. *Пусть* $K(m)$ *-куб в пространстве* $\mathbb{R}^d$: $K(m) = \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_d) \; , \; |x_i| \le m.\}$. *Пусть функциональная последовательность* $\{f_n(x)\} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ *при некотором* p , $1 \le p < \infty$, *удовлетворяет следующим условиям.*

$$1. \; \forall m : \text{п.в. } f_n(x) \to f(x), , \; n \to \infty \, , \; x \in K(m), \tag{1.102}$$

$$2. \; \forall (m \, , \, n) : \text{п.в. } |f_n(x)| \le \phi_m(x) \in L^p(K(m)), \; \phi_m(x) \text{ не зависит от } n.$$

$$3. \; \lim_{m\to\infty} \sup\{\int_{|x|>m} |f_n(x)|^p dx \mid 1 \le n < \infty\} = 0. \tag{1.103}$$

Тогда определенная равенством (1.102) *функция* $f(x)$ *принадлежит пространству* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n(x) - f(x)|^p \, dx = 0.$$

Чтобы пояснить роль условия (1.100) рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \exp(-(x-n)^2)$$

в пространстве $L^1(\mathbb{R}^1)$. Ясно, что

$$\forall a \, , \, b : \int_b^a \exp(-(x-n)^2) \, dx \to 0 \, , \; n \to \infty,$$

но

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x-n)^2) \, dx \equiv \sqrt{\pi}$$

Условия (1.100)-(1.103) аналогичны условию равномерной сходимости несобственного интеграла Римана и является упрощенным вариантом условия равномерной интегрируемости (см. [4, 5]). При исследовании вопроса о предельном переходе в интеграле условия типа равномерной интегрируемости обычно налагаютя в том случае, если интеграл понимается как несобственный или как интеграл по σ-конечной, но не конечной мере.

Заметим, что в определении 1.1.14 *не предполагается*, что $f(x) \in L(D)$. Рассмотрим пример. Пусть

$$f(x) = (x(x+1)^2(x-1)^{-2}\ln^2 x)^{-1/\alpha}\ ,\ \alpha > 1.$$

Легко проверить, что $f(x) \in L^\alpha([0\,,\,\infty))$, но $f(x) \notin L^p([0\,,\,\infty))\ ,\ p \neq \alpha$.

1.2 Мера и измеримые функции.

1.2.1 Сводка основных определений теории меры.

Понятие меры часто встречается в анализе и математической физике. Приведем краткую сводку соответствующих определений. Подробно с этими понятиями в классической трактовке можно ознакомиться по приведенному в конце главы списку литературы. В следующем пункте мы разберем, как эти понятия вводятся в принятой нами схеме Даниэля.

Определение 1.2.1. Система $\mathcal{A}$ подмножетсв множества X называется *алгеброй множеств*, если выполнены условия:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}\ ,\ X \in \mathcal{A}$.
2. $\forall (A \in \mathcal{A}\ ,\ B \in \mathcal{A}) : A \bigcap B \in \mathcal{A}\ ,\ A \bigcup B \in \mathcal{A}\ ,\ A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Алгебра множеств называется *σ-алгеброй*, если она замкнута относительно счетных объединений и пересечений множеств:

$$\forall (A_i \in \mathcal{A}) : \bigcup A_i \in \mathcal{A}\ ,\ \bigcap_i A_i \in \mathcal{A}.$$

Поскольку σ-алгебра есть алгебра множеств, то было бы достаточно потребовать замнутости только относительно счетных объединений множеств: в силу формул де Моргана отсюда уже следовало бы, что σ-алгебра замкнута относительно образования счетных пересечений множеств и их дополнений.

Рассмотрим отрезок $[0\,,\,1]$. Наименьшая σ-алгебра, которая содержит все открытые интервалы $(a\,,\,b)\subset[0\,,\,1]$, называется *борелевской* алгеброй множеств отрезка $[0\,,\,1]$.

Если X -топологическое пространство, то *борелевской алгеброй* множества X называется наименьшая σ-алгебра, которая содержит все открытые подмножества множества X.

Алгебру борелевских множеств топологического пространства X мы будем обозначать символом $\mathcal{B}(X)$.

Определение 1.2.2. Заданная на σ-алгебре $\mathcal{A}$ функция множеств

$$\mu:\mathcal{A}\mapsto[0\,,\,1]$$

называется *мерой*, если она удовлетворяет условиям нормировки:

$$\mu(\emptyset)=0\ ,\ \mu(X)=1 \qquad (1.104)$$

и σ-аддитивна:

$$\forall(A_i\in\mathcal{A}\,,\,A_i\bigcap A_j=\emptyset\,,\,i\neq j):\mu(\sum_i A_i)=\sum_i\mu(A_i). \qquad (1.105)$$

Иногда условие σ-аддитивности не включается в определение меры.

Из (1.105) следует, что σ-аддитивная мера μ удовлетворяет условию: если A_n такая система подмножеств множества X, что

$$A_n\in\mathcal{A}\ ,\ A_{n+1}\subset A_n\ ,\ \bigcap_n A_n=\emptyset, \qquad (1.106)$$

то

$$\mu(A_n)\to 0\ ,\ n\to\infty. \qquad (1.107)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что

$$\mathbf{C}(A_n)=\bigcup_{1\leq m\leq n}\mathbf{C}(A_n)\setminus\mathbf{C}(A_{n-1}),\ A_0=\emptyset,$$

поэтому

$$\begin{aligned}&1=\mu(X)=\lim_{n\to\infty}\mu(\mathbf{C}(A_n))=\\&1-\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).\end{aligned}$$

σ-аддитивные меры также называют счетно-аддитивными мерами. Часто рассматривают меры, которые не удовлетворяют условию нормировки, а меры, которые этому условию удовлетворяют, называют вероятностными мерами. В этом параграфе мы будем рассматривать меры, которые удовлетворяют условию нормировки, т.е. вероятностные меры.

Можно доказать, что существует единственная мера μ_0, область задания которой есть борелевская алгебра подмножеств отрезка $[0\,,\,1]$ и которая удовлетворяет условию

$$\forall\,(a\,,\,b) \subset [0\,,\,1] : \mu_0((a\,,\,b)) = b - a. \tag{1.108}$$

Эту меру мы будем называть стандатрной *мерой Бореля* или просто *борелевской мерой* на отрезке $[0\,,\,1]$.

Если X -топологическое пространство, то в общем случае *борелевской мерой* на пространстве X называется любая мера, область определения которой есть наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества множества X.

Если на σ-алгебре $\mathcal{A}$ задана некоторая мера μ, то отвечающей этой мере *внешней мерой* называется функция множеств $\mu^\star$, которая для всех подмножеств множества X определена равенством

$$\forall A \subset X : \mu^\star(A) = \inf\{\mu(B) \mid B \in \mathcal{A}\,,\, A \subset B\}. \tag{1.109}$$

Определение 1.2.3. Множество $A \subset X$ называется *измеримым по Лебегу*, если выполнено равенство

$$\mu^\star(A) + \mu^\star(X \setminus A) = 1. \tag{1.110}$$

и в этом случае мерой Лебега множества A называется число $\mu^\star(A)$.

Множество всех измеримых по Лебегу множеств образует σ-алгебру, которая зависит как от исходной σ-алгебры $\mathcal{A}$, так и от меры μ. Обозначим эту σ-алгебру символом $Ext_\mu(\mathcal{A})$. Она называется лебеговским расширением σ-алгебры $\mathcal{A}$. Функция множеств $\mu^\star(A)$ на σ-алгебре $Ext_\mu(\mathcal{A})$ определяет меру, которую называют *лебеговским продолжением меры* μ (или мерой Лебега) и обозначают тем же символом μ.

Определение 1.2.4. Заданная на σ-алгебре $\mathcal{A}$ мера μ называется *полной мерой*, если из того факта, что $Z \subset A$, $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ следует, что $Z \in \mathcal{A}$, $\mu(Z) = 0$.

Мера Лебега полна, а лебеговское расширение σ-алгебры с заданной на ней счетно-адитивной мерой можно получить (см. доказательство в [9] . гл. 1, предложение 1.4.6). , если дополнить область определения меры всеми подмножествами множеств меры ноль и на этих подмножествах доопределить меру нулем.

Другой способ построения лебеговского расширения σ-алгебры $\mathcal{A}$ состоит в следующем. Рассмотрим симметричную разность двух множеств

$$A \triangle B := (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B).$$

Легко видеть, что

$$\mathbb{I}(A \triangle B \mid x) = |\mathbb{I}(A \mid x) - \mathbb{I}(B \mid x)|,$$

поэтому функция

$$d(A\,,\,B) := \mu^{\star}(A \triangle B) \tag{1.111}$$

определяет расстояние на подмножествах множества X (или, в другой интерпретации, на множестве всех характеристических функций подмножеств множества X). Замыкание σ-алгебры $\mathcal{A}$, рассмативаемой как подмножество полного метрического пространства с расстоянием (1.111), и будет лебеговским расширением σ-алгебры $\mathcal{A}$.

В рамках схемы Даниэля лебеговское расширение σ-алгебры $\mathcal{A}$ можно получить так. Определим на пространстве X множество элементарных функций $L_0(X)$ как множество функций вида

$$f(x) = \sum_{1 \le j \le N} \alpha_j \mathbb{I}(A_j \mid x)\,,\; \alpha_j \in \mathbb{R}^1,$$

где

$$A_j \in \mathcal{A}\;,\; \bigcup_j A_j = X\;,\; A_j \bigcap A_i = \emptyset\;,\; j \neq i.$$

На этом пространстве элементарных функций определим элементарный интеграл формулой

$$I_0(f) := \sum_j \alpha_j \mu(A_j)$$

и далее будем действовать по схеме Даниэля. Тогда элементами пополнения σ-алгебры $\mathcal{A}$ будут те подмножества, характеристические функции которых принадлежат пространству $L(X)$.

Часто по умолчанию считают, что если на σ-алгебре задана мера μ, то эта σ-алгебра множеств уже пополнена по мере μ, т.е. считают, что $\mathcal{A} = Ext_{\mu}(\mathcal{A})$. Ниже мы *не будем* делать это предположение. Следует заметить, что если в область определения меры входит больше нулевых подмножеств, то входит и больше их дополнений, поэтому изменяется содержание понятия почти всюду.

Пусть на множестве X задана σ-алгебра $\mathcal{A}$, на множестве Y задана σ-алгебра $\mathcal{B}$ и

$$f : X \mapsto Y$$

-отображение X в Y. Легко проверить, что при любом отображении f полный прообраз $f^{-1}(\mathcal{B})$ σ-алгебры $\mathcal{B}$ есть некоторая σ-алгебра в X.

Определение 1.2.5. Отображение $f\colon X \mapsto Y$ измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{A} \subset X$ и σ-алгебры $\mathcal{B} \subset Y$, если

$$f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}.$$

Понятие измеримости отображения *никак не связано с понятием меры* и опирается только на понятие σ-алгебры, однако если на σ-алгебре задана мера, то часто говорят об измеримости отображения относительно меры, подразумевая σ-алгебру, на которой задана мера.

Если $Y = \mathbb{R}^1$, то обычно по умолчанию считают, что в качестве σ-алгебры $\mathcal{B}$ в $\mathbb{R}^1$ взята *не пополненная* (это важно!) σ-алгебра борелевских множеств, т.е. *наименьшая* σ-алгебра, относительно которой измеримы все открытые множества. В этом случае определение 1.2.5 эквивалентно следующему.

Определение 1.2.6. Заданная на множестве X функция $f\colon X \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}^1$ называется измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств множества X, если при любом $a \in \mathbb{R}^1$ множество $\{x \mid f(x) < a\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{A}$.

Определение 1.2.7. Подмножество $A \subset X$ называется измеримым, если его характеристическая функция измерима в смысле определения 1.2.6.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^1$ задана σ-алгебра борелевских множеств (т.е. наименьшая σ-алгебра, которая содержит все открытые множества), в пространстве X задана произвольная σ-алгебра и

$$f : X \mapsto \mathbb{R}^1$$

-измеримое в смысле определения 1.2.6 отображение. Докажем, что оно измеримо в смысле определения 1.2.5. Если функция $f(x)$ измерима в смысле определения 1.2.6, то множество

$$A = \{x \mid f(x) \le a\} = \bigcap_{j>1} \{x \mid f(x) < a + 1/j\} \tag{1.112}$$

измеримо, так как счетное пересечение принадлежащих σ-алгебре множеств снова принадлежит этой σ-алгебре.

Если функция $f(x)$ такова, что при любом $a \in \mathbb{R}^1$ множество

$$A = \{x \mid f(x) \le a\} \tag{1.113}$$

измеримо, то при любом $a \in \mathbb{R}^1$ множество

$$B = \{x \mid f(x) < a\} = \bigcup_{j>1} \{x \mid f(x) \leq a - 1/j\} \qquad (1.114)$$

измеримо, так как счетное объединение принадлежащих σ-алгебре множеств снова принадлежит этой σ-алгебре.

Далее заметим, что если функция $f(x)$ измерима, то множества

$$\{x \mid f(x) \geq a\} = X \setminus \{x \mid f(x) < a\},$$
$$\{x \mid f(x) > a\} = X \setminus \{x \mid f(x) \leq a\}$$

измеримы как дополнения к измеримым множествам.

Таким образом, мы доказали следующе

Утверждение 1.2.1. *Функция $f(x)$ измерима в смысле определения 1.2.6 в том и только том случае, если при всех $a \in \mathbb{R}^1$ какое либо из множеств*

$$\{x \mid f(x) < a\}\ ,\ \{x \mid f(x) \leq a\},$$
$$\{x \mid f(x) > a\}\ ,\ \{x \mid f(x) \geq a\}$$

измеримо, и измеримости при всех $a \in \mathbb{R}^1$ одного из этих множеств следует измеримость остальных.

Аналогично доказывается

Утверждение 1.2.2. *Функция $f(x)$ измерима в смысле определения 1.2.6 в том и только том случае, если каково бы ни было борелевское множество $B \subset \mathbb{R}^1$, полный прообаз $f^{-1}(B)$ множества B принадлежит σ-алгебре $\mathcal{A}$, т.е. определения 1.2.6 и 1.2.5 эквивалентнны.*

В задачах теории функций действительной переменной в качестве множества X обычно рассматривается отрезок $[0\,,\,1]$ с σ-алгеброй измеримых по Лебегу множеств. В этом случае понятие измеримости оказывается очень широким и примеры неизмеримых функций строятся с трудом.

В задачах теории вероятности интересуются измеримостью функции $g(x)$ относительно наименьшей σ-алгебры, которая содержит все σ-алгебры вида $f^{-1}(\mathcal{B})$, где f -отображение из некоторого класса отображений. Эта задача нетривиальна, так как справедливо утверждение: функция $g(x)$ измерима относительно σ-алгебры $f^{-1}(\mathcal{B})$, если существует такая функция ϕ, что $g(x) = \phi(f(x))$. Это очевидно в том случае, если функция f простая, т.е. принимает конечное число значений, а общий случай получается аппроксимацией произвольной функции простыми.

Приведем простой пример. Пусть пространство X есть отрезок $[-1\,,\,1]$, простанство Y есть отрезок $[0\,,\,1]$ и σ-алгебра $\mathcal{Y}$ есть σ-алгебра борелевских множеств отрезка $[0\,,\,1]$. Пусть $f(x)=x^2$. Тогда функция $g(x)=|x|$ измерима относительно σ-алгебры $f^{-1}(\mathcal{Y})$, а функция $g(x)=\max(0\,,\,x)$ -нет.

Определение 1.2.8. Если функция $f(x)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$ с заданной на σ-алгебре $\mathcal{A}$ мерой μ, то ее интегралом Лебега по мере μ называется предел

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) := \lim_{n\to\infty} \sum_{-\infty<k<\infty} 2^{-n}k\mu(\{x \mid 2^{-n}k \le f(x) < 2^{-n}(k+1)\}), \tag{1.115}$$

если этот предел существует и если ряд в правой части (1.2.8) сходится абсолютно при всех n.

Пусть $\mu_0^\star$ внешняя мера для определенной равенством (1.108) борелевской меры. Отвечающую этой внешней мере меру Лебега мы будем называть классической мерой Лебега или просто мерой Лебега. На борелевской алгебре множеств отрезка $[0\,,\,1]$ мера Лебега, конечно, совпадает с мерой Бореля (1.108).

1.2.2 Построение меры множества в схеме Данизля.

При построении интеграла по схеме Даниэля мера множества определяется через интеграл.

Итак, предположим, что нам задано множество X, пространство элементарных функций $L_0(X)$ и элементарный интеграл I_0, причем выполнены условия 1.1.1-1.1.7. В этой части, как и в предыдущей, мы будем считать, что пространство элементарных функций $L_0(X)$ дополнительно удовлетворяет условиям 1.1.8 и 1.1.9, причем выполнено условие нормировки (1.5). Пусть I -интеграл и $L(X)$ -пространство интегрируемых функций, которые построены по схеме Даниэля на основе пространства элементарных функций $L_0(X)$ и элементарного интеграла I_0.

Мы покажем, что в рассматриваемой ситуации интеграл I порождает некоторую σ-алгебру множеств в X и меру на этой σ-алгебре.

Определение 1.2.9. Множество $A \subset X$ измеримо (относительно интеграла I) , если его характеристическая функция интегрируема:

$$\mathbb{I}(A \mid x) \in L(X),$$

и мерой $\mu(A)$ множества A называется интеграл от его характеристической функции

$$\mu(A) := I(\mathbb{I}(A \mid \cdot)). \tag{1.116}$$

Докажем, что определение 1.2.9 согласуется с определением меры, которое дано выше.

Теорема 1.2.1. *Естественная область определения меры в смысле определения 1.2.9 есть σ-алгебра множеств и на этой σ-алгебре мера в смысле определения 1.2.9 σ-аддитивна.*

Доказательство теоремы мы разобъем на несколько лемм.

Лемма 1.2.1. *Если множества A и B измеримы в смысле определения 1.2.9 , то множества $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$ тоже измеримы в смысле этого определения.*

Доказательство. Если множества A и B измеримы в смысле определения 1.2.9, то согласно лемме 1.1.12 существуют такие последовательности $f_n^A(x)$, $f_n^B(x)$ элементарных функций, что

$$\text{п.в.} : f_n^A(x) \to \mathbb{I}(A \mid x) \ , \ f_n^B(x) \to \mathbb{I}(B \mid x) \, , \, n \to \infty.$$

Положим

$$\phi_n(x) = \min(1 \ , \ |f_n^A(x)| \ , \ |f_n^B(x)|).$$

Очевидно, что

$$\text{п.в.} : \phi_n(x) \to \mathbb{I}(A \bigcap B \mid x) \ , \ \phi_n(x) \in L(X) \ , \ 0 \le \phi_n(x) \le 1.$$

По теореме Лебега о предельном переходе мы можем утверждать, что функция $\mathbb{I}(A \bigcap B \mid x)$ интегрируема, т.е. множество $A \bigcap B$ измеримо. Но

$$\mathbb{I}(A \bigcup B \mid x) = \mathbb{I}(A \mid x) + \mathbb{I}(B \mid x) - \mathbb{I}(A \bigcap B \mid x).$$

Отсюда следует, что множество $A \bigcup B$ измеримо. Измеримость множества $A \setminus B$ следует из равенства

$$\mathbb{I}(A \setminus B \mid x) = \mathbb{I}(A \mid x) - \mathbb{I}(A \bigcap B \mid x).$$

Лемма доказана.

Мы доказали, что измеримые в смысле определения 1.2.9 множества образуют алгебру множеств. Докажем, что эта алгебра есть σ-алгебра и определенная на ней равенством (1.116) функция множеств σ-аддитивна.

Лемма 1.2.2. *Пусть последовательность измеримых в смысле определения 1.2.9 множеств A_i удовлетворяет условию*

$$A_i \bigcap A_j = \emptyset \ , \ i \neq j. \tag{1.117}$$

Тогда объединение множеств $A = \bigcup_i A_i$ измеримо в смысле определения 1.2.9 и

$$\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i). \tag{1.118}$$

Доказательство.Во-первых заметим, что из справедливого при всех $A \subset X \ , \ B \subset X$ равенства

$$\mathbb{I}(A \mid x) + \mathbb{I}(B \mid x) = \mathbb{I}(A \bigcup B \mid x) + \mathbb{I}(A \bigcap B \mid x)$$

следует конечная аддитивность определенной равенством (1.116) функции множеств:

$$I(\mathbb{I}(A \mid \cdot)) + I(\mathbb{I}(B \mid \cdot)) = I(\mathbb{I}(A \bigcup B \mid \cdot)) + I(\mathbb{I}(A \bigcap B \mid \cdot)).$$

При выполнении условия (1.117) справедливо равенство

$$\mathbb{I}(A \mid x) = \sum_i \mathbb{I}(A_i \mid x). \tag{1.119}$$

Заметим, что в силу условия (1.117) справедливо неравенство

$$I(\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{I}(A_i \mid \cdot)) \leq 1.$$

В силу леммы Беппо Леви отсюда следует, что правая часть(1.119) есть интегрируемая функция и справедливо равенство (1.118). Лемма доказана.

Из лемм 1.2.1 и 1.2.2 вытекает утверждение теоремы 1.2.1

В теории интеграла известна теорема (теорема Рисса и ее обобщение: теорема Рисса-Маркова-Какутани), которая утверждает, что при определенных условиях любой линейный непрерывный функционал на пространстве $C(X)$ представим как интеграл. При определении интеграла по схеме Даниэля непрерывный функционал по определению есть интеграл, а леммы 1.2.1 и 1.2.2 утверждают, что такой функционал порождает меру, поэтому доказанное нами утверждение можно рассматривать как аналог теоремы Рисса в схеме Даниеля.

В дальнешем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1.2.2. *Пусть основное пространство X есть отрезок действительной оси:*

$$X = [a\,,\,b] \subset \mathbb{R}^1.$$

Если пространство элементарных функций $L_0([a\,,\,b])$ содержит все непрерывные функции:

$$C([a\,,\,b]) \subset L_0([a\,,\,b]),$$

то σ-алгебра всех измеримых в смысле определения 1.2.9 множеств содержит σ-алгебру борелевских множеств отрезка $[a\,,\,b]$, т. е. наименьшую σ-алгебру, которая содержит все открытые множества отрезка $[a\,,\,b]$.

Доказательство. Пусть $a < \alpha < \beta < b$. Нам достаточно доказать, что характеристические функции множеств $[a\,,\,\alpha)$, $(\alpha\,,\,\beta)$, $(\beta\,,\,b]$ интегрируемы.

Положим

$$\begin{aligned}
\phi_{n,1}(x) &= \min(1\,,\,n(\alpha - x)^+),\\
\phi_{n,2}(x) &= \min(1\,,\,n(\beta - x)^+\,,\,n(x - \alpha)^+),\\
\phi_{n,3}(x) &= \min(1\,,\,n(x - \beta)^+).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\forall x : \phi_{n,1}(x) \to \mathbb{I}([a\,,\,\alpha) \mid x)\,,\, n \to \infty,\ |\phi_{n,1}(x) \le 1,\\
&\forall x : \phi_{n,2}(x) \to \mathbb{I}((\alpha\,,\,\beta) \mid x)\,,\, n \to \infty,\ |\phi_{n,2}(x) \le 1,\\
&\forall x : \phi_{n,3}(x) \to \mathbb{I}((\beta\,,\,b] \mid x)\,,\, n \to \infty,\ |\phi_{n,3}(x) \le 1
\end{aligned}$$

и интегрируемость соответствующих характеристических функций множеств вытекает из теоремы Лебега (см. 34). Теорема доказана.

Теорема 1.2.3. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, $\mu(dx)$ -порожденная интегралом мера 1.116,*

$$F(t) := \int\limits_{a \le x \le b} (\mathbb{I}([a\,,\,t] \mid x)\mu(dx). \tag{1.120}$$

Тогда:

1. Функция $F(t)$ монотонно не убывает и непрерывна справа на отрезке $[a\,,\,b]$:

$$\forall t \in [a\,,\,b] : F(t + 0) = F(t).$$

2. Если функция $g(t)$ непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, то справедливо равенство (1.122).

Доказательство. Монотонность функции $F(t)$ очевидна. Докажем ее непрерывность справа. Пусть $\epsilon_n \to +0\,,\; n \to \infty$. Справедливо равенство

$$[a\,,\,t] = \bigcap_n [a\,,\,t+\epsilon_n].$$

Отсюда следует, что

$$\forall (x \in [a\,,\,b]) : \mathbb{I}([a\,,\,t+\epsilon_n] \mid x) \searrow \mathbb{I}([a\,,\,t] \mid x)\,,\; n \to \infty,$$

поэтому в силу теоремы Беппо Леви

$$F(t+\epsilon_n) = \int\limits_{a \le x \le b} (\mathbb{I}([a\,,\,t+\epsilon_n] \mid x)\mu(dx) \to \int\limits_{a \le x \le b} (\mathbb{I}([a\,,\,t] \mid x)\mu(dx) = F(t).$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Функция $F(t)$ называется функцией распределения, порожденной мерой $\mu(dx)$. В дальнешем по умолчанию мы будем функцию распределения нормировать условием

$$F(a) = 0$$

(иначе можно рассматривать отрезок $[a'\,,\,b]\;,\; a' < a$).

Пусть

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

разбиение отрезка $[a\,,\,b]$. Пусть функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$. Положим

$$\begin{aligned} &\forall (x \in (x_j\,,\,x_{(j+1)}]\,,\, 0 \le j \le (n-1)) :\; g_n(x) = g(\xi_j)\,,\, \xi_j \in (x_j\,,\,x_{(j+1)}], \\ &\delta_n = \max\{|x_{j+1} - x_j| \mid 1 \le j \le (n-1)\}. \end{aligned}$$

Функция $g_n(x)$ зависит от разбиения $\{x_j\}$ и выбора точек ξ_j, но

$$\forall (x \in [a\,,\,b]) : g_n(x) \to g(x)\,,\, n \to \infty\,,\, \delta_n \to 0, \qquad (1.121)$$

и

$$|g_n(x)| \le \sup\{|g(x)| \mid x \in [a\,,\,b]\}.$$

Далее мы замечаем, что

1. функция $g_n(x)$ постоянна на полуинтервалах $(x_j\,,\,x_{j+1}]$,

2. характеристическая функция полуинтервала $(x_j\,,\,x_{j+1}]$ есть разность характеристических функций отрезков $[a\,,\,x_{j+1}]$ и $[a\,,\,x_j]$.

Поэтому в силу теоремы Лебега

$$\int\limits_{a\le x\le b} g(x)\mu(dx) = \lim_{\delta_n\to 0} \int\limits_{a\le x\le b} g_n(x)\mu(dx) =$$

$$\lim_{\delta_n\to 0}\left(\sum_{0\le j\le n-1} g(\xi_j)(F(x_{(j+1)}) - F(x_j))\right). \tag{1.122}$$

Теорема доказана.

Сумма, которая стоит в правой части равенства (1.122), называется интегральной суммой Римана-Стильтьеса от функции $g(x)$ по функции распределения $F(x)$, а интеграл, который получается как предел таких сумм, называется интегралом Римана-Стильтьеса и обозначается так:

$$\lim_{\delta_n\to 0}\left(\sum_{0\le j\le n-1} g(\xi_j)(F(x_{(j+1)}) - F(x_j))\right) = \int_a^b g(x)d_xF(x). \tag{1.123}$$

Мы доказали, что если основное пространство есть отрезок $[a\,,\,b]$, пространство элементарных функций содержит все непрерывные функции и в интеграле Даниэля интегрируемая функция непрерывна , то интеграл Даниэля может быть вычислен как предел интегральных сумм Римана-Стильтьеса.

Замечание 1.2.1. Легко видеть, что утверждение теоремы справедливо для более шерокого класса функций: функций $g(x)$, которые можно представить как равномерный предел кусочно постоянных на полуинтервалах $(x_j\,,\,x_{j+1}]$ функций.

Пусть $F(x)$ - непрерывная справа неубывающая функция на отрезке $[a\,,\,b]$, $F(a) = 0$. На множестве всех непрерывных функций $C([a\,,\,b])$ определим элементарный интеграл формулой

$$\forall (g \in C([a\,,\,b]))\colon\ I_0(g) = \lim_{\delta_n\to 0}\left(\sum_{0\le j\le n} g(\xi_j)(F(x_{(j+1)}) - F(x_j))\right). \tag{1.124}$$

Пусть $I(g)$ интеграл Даниэля, построенный по определяемому формулой (1.124) элементарному интегралу $I_0(g)$.

Определение 1.2.10. Интеграл $I(g)$ мы будем называть интегралом Лебега-Стильтьеса.

Мы будем обозначать интеграл Лебега-Стильтьеса символом

$$\int_a^b g(x)d_xF(x) := I(g),$$

хотя его, вообще говоря, нельзя вычислить как предел интегральных сумм.

Обозначим σ-алгебру измеримых в смысле определения 1.2.9 множеств символм $\mathcal{A}_I$.

Лемма 1.2.3. *Если функция $f(x)$ интегрируема:*

$$f(x) \in L(X),$$

то она измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}_I$.

Доказательство.Пусть $f(x) \in L(X)$. Нам нужно доказать, что характеристическая функция $\mathbb{I}(\{x \mid f(x) < a\} \mid x)$ интегрируема. Это следует из теоремы Беппо Леви и равенства

$$\mathbb{I}(\{x \mid f(x) < a\} \mid x) = \lim_{n\to\infty} \min(1\ ,\ n(a - f(x))^+).$$

Измеримая функция может быть не интегрируема в смысле определения 1.2.8. Пример: функция $f(x) = x^{-2}$ на полуинтервале $(0\,,\,1]$ с обычной мерой Лебега. Однако справедлива

Лемма 1.2.4. *Если функция $f(x)$ измерима относительно меры $\mu(dx)$ и почти всюду по мере $\mu(dx)$ ограничена, то она интегрируема в смысле определения 1.2.8 по мере $\mu(dx)$.*

Доказательство. Без оганичения общности мы будем считать, что

$$\text{п.в. } |f(x)| \leq 1.$$

В этом случае стоящая в правой части (1.115) сумма такова:

$$S_n = \sum_{|m|\leq 2^n} m2^{-n}\mu(\{x \mid m2^{-n} \leq f(x) < (m+1)2^{-n}\}). \tag{1.125}$$

Каждое слагаемое в этой сумме можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&m2^{-n}\mu(\{x \mid m2^{-n} \leq f(x) < (m+1)2^{-n}\}) = \\
&2m2^{-(n+1)}\mu(\{x \mid 2m2^{-(n+1)} \leq f(x) < (2m+1)2^{-(n+1)}\}) \\
&\ + 2m2^{-(n+1)}\mu(\{x \mid (2m+1)2^{-(n+1)} \leq f(x) < (2m+2)2^{-(n+1)}\})
\end{aligned}$$

Вычитая после этого из суммы S_n сумму S_{n+1}, мы легко получаем оценку

$$|S_n - S_{n+1}| \leq const.2^{-n},$$

из которой следует, что последовательность S_n фундаментальна и поэтому имеет предел. Лемма доказана.

Эту лемму можно уточнить. Положим

$$A(m\,,\,n) = \{x \mid m2^{-n} \leq f(x) < (m+1)2^{-n}\}.$$

Определим функциональную последовательность

$$F_n(x) := \sum_{|m| \leq 2^n} m2^{-n}\mathbb{I}(A(m\,,\,n) \mid x).$$

Справедлива

Лемма 1.2.5. *Если интеграл (определенный по Даниэлю) и мера μ связаны равенством* (1.116)*, то справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int |F_n(x) - f(x)|\,\mu(dx) = 0. \qquad (1.126)$$

Доказательство. Очевидна оценка

$$\int |F_n(x) - f(x)|\,\mu(dx) =$$
$$\sum_{|m| \leq 2^n} \int \mathbb{I}(A(m\,,\,n) \mid x)|F_n(x) - f(x)|\,\mu(dx) \leq 2^{-n+1},$$

которая и доказывает наше утверждение.

Вычислим интеграл в смысле Даниэля от функции $F_n(x)$. Получим:

$$\int F_n(x)\,\mu(dx) = \sum_{|m| \leq 2^n} m2^{-n}\mu(\{x \mid m2^{-n} \leq f(x) < (m+1)2^{-n}\}),$$

Отсюда и из предыдущей леммы вытекает

Теорема 1.2.4. *Интегал Лебега в смысле определения 1.2.8 совпадает с интегралом Даниэля в смысле определения 1.1.8.*

Мы доказали это утверждение для ограниченных функций, для остальных можно воспользоваться теоремой Лебега.

Выясним связь между множествами меры ноль в смысле определения 1.1.1 и теми измеримыми в смысле определения 1.2.9 множествами, для которых определенная равенством (1.116) мера равна нулю.

Мы уже обсуждали этот вопрос в следствии 1.1.4 и утверждении 1.1.6. Остановимся на этом еще раз.

Лемма 1.2.6. *Множество $Z \subset X$ есть множество меры ноль в смысле определения 1.1.1 в том и только том случае, если множество Z измеримо в смысле определения 1.2.9 и мера множества Z равна нулю: $\mu(Z) = 0$.*

Доказательство. Если Z есть множество меры ноль в смысле определения 1.1.1, то согласно этому определению характеристическая функция множества Z почти всюду равна нулю:

$$\text{п.в. } \mathbb{I}(Z \mid x) = 0, \tag{1.127}$$

поэтому согласно лемме 1.1.7 характеристическая функция множества Z интегрируема:

$$\mathbb{I}(Z \mid x) \in L_+(X),$$

и

$$\mu(Z) = I(\mathbb{I}(Z \mid \cdot)) = 0.$$

Если характеристическая функция множества Z интегрируема и

$$I(\mathbb{I}(Z \mid \cdot)) = 0,$$

то согласно следствию 1.1.4 множество Z есть множество меры ноль в смысле определения 1.1.1. Лемма доказана. Очевидно

Следствие 1.2.1. *Если мера множества и интеграл связаны равенством*

$$\mu(A) = \int \mathbb{I}(A \mid x)\, \mu(dx), \tag{1.128}$$

то определения 1.1.2 1.1.3 эквивалентны определениям

Определение 1.2.11. 1. Свойство $P(x)$ справедливо почти всюду, если множество точек $x \in X$, где свойство $P(x)$ не справедливо, есть множество, мера которого в смысле определения (1.128), равна нулю.

Эквивалентная формулировка: пусть $P(x)$ -функция на множестве X, которая принимает два значения:

$$P \colon X \ni x \mapsto P(x) \in \{truth\,,\, false\}$$

Тогда

Определение 1.2.12. $P(x) = truth$ почти всюду, если $\mu(\{x \mid P(x) = false\}) = 0$.

Именно в этом смысле мы можем теперь понимать термин почти всюду во всех предыдущих рассуждениях.

Когда нужно пояснить, относительно какой меры мы рассматриваем свойство почти всюду, мы будем писать п.в. $\quad mod(\mu)$.

Из доказанной нами леммы вытекает и утверждение 1.1.7.

Из леммы 1.2.6 и утверждения 1.1.3 следует, что мера (1.116) на σ-алгебре $\mathcal{A}_I$ полна в следующем смысле: если $Z \subset A \in \mathcal{A}_I$ и $\mu(A) = 0$, то $Z \in \mathcal{A}_I$ и $\mu(Z) = 0$.

Определение (1.116) не исчерпывает все интересные и важные для приложений случаи задания меры на множестве X: существуют меры, определение которых естественно задавать иначе.

Можно поступить следующим образом. Задать на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X полную вероятностную меру. Далее определить интеграл по 1.2.8. Этот интеграл принять за элементарный интеграл, а потом по построенному интегралу задать новую меру. Можно показать, что мы получим исходную меру. Таким образом, при построении интеграла в конечном счете безразлично с чего начинать: с задания меры или элементарного интеграла.

1.2.3 Измеримые функции.

Пусть $\mathcal{A}_I$ есть σ-алгебра измеримых в смысле определения 1.2.9 множеств, а мера μ на σ-алгебре $\mathcal{A}_I$ и интеграл связаны соотношением (1.128). Обозначим множество измеримых (см. определение 1.2.6) относительно σ-алгебры $\mathcal{A}_I$ функций символом $\mathcal{L}(X)$. Таким образом,

$$(f \in \mathcal{L}(X)) \iff (\forall (a \in \mathbb{R}^1) : \{x \mid f(x) < a\} \in \mathcal{A}_I). \tag{1.129}$$

Множество $\mathcal{L}(X)$ зависит от σ-алгебры $\mathcal{A}_I$. Например, если σ-алгебра состоит из двух множеств: $\emptyset$ и X, то в пространство $\mathcal{L}(X)$ входят только постоянные на X функции. В примере 1.1.6 пространство $\mathcal{L}(X)$ состоит из линейных комбинаций характеристических функций полуинтервалов $A_j = [\alpha_j\,,\,\alpha_{j+1})$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^1$ задана σ-алгебра борелевских множеств, в пространстве X задана произвольная σ-алгебра и $\mathcal{L}(X)$ -множество отображений

$$f : X \mapsto \mathbb{R}^1,$$

-измеримых в смысле определения 1.2.6.

Лемма 1.2.7. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Множество $\mathcal{L}(X)$ есть линейное пространство: если $f(x)\,,\,g(x) \in \mathcal{L}(X)$, то $\alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{L}(X)$.

2. Если $f(x) \in \mathcal{L}(X)$, то $|f(x)| \in \mathcal{L}(X)$.

3. Если $f(x) \in \mathcal{L}(X)$, $g(x) \in \mathcal{L}(X)$, то $f(x)g(x) \in \mathcal{L}(X)$.

4. Если мера μ полна и последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ почти всюду имеет предел:

$$\exists\, f(x) : \textit{п.в. } mod(\mu) \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \tag{1.130}$$

то определенная равенством (1.130) *функция $f(x)$ измерима: $f(x) \in \mathcal{L}(X)$.*

5. Для произвольной последовательности измеримых функций $\{f_n(x)\}$ множество A тех точек x, где последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна (т.е. имеет предел), принадлежит σ-алгебре $\mathcal{A}_I$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что для любых измеримых функций $f(x)$, $g(x)$ множество

$$\{x \mid f(x) + g(x) < a\} = \bigcup_{-\infty<m<\infty\,,\, n\geq 1} (\{x \mid f(x) \leq m/n\} \bigcap \{x \mid g(x) < a - m/n\})$$

измеримо.

Второе утверждение следует из равенства

$$\{x \mid |f(x)| < a\} = \{x \mid f(x) < a\} \bigcap \{x \mid f(x) > -a\}$$

Заметим, что отсюда следует измеримость функции $f^2(x)$, если функция $f(x)$ измерима.

Так как

$$f(x)g(x) = \frac{1}{2}((f(x) + g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x)),$$

то из утверждений 1 и 2 следует утверждение 3.

Перейдем к доказательству четвертого утверждения. Пусть Z множество тех точек x, где последовательность $f_n(x)$ не имеет предела. На множестве $\mathbf{C}(Z) = X \setminus Z$ рассмотрим σ-алгебру

$$\mathcal{A}' = \{A' \mid A' = A \bigcap \mathbf{C}(Z)\,,\, A \in \mathcal{A}\}$$

и сужение меры μ на эту σ-алгебру. Это можно сделать, поскольку мера полна. На множестве $\mathbf{C}(Z)$ справедливо равенство

$$\{x \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq a\} = \bigcap_{q\geq 1} \bigcap_{m>1} \bigcup_{n>m} \{x \mid f_n(x) \leq a + 1/q\}. \tag{1.131}$$

Стоящее в правой части равенства (1.131) множество измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{A}'$. Отсюда в силу полноты меры μ следует измеримость множества $\{x \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \le a\}$ относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Для доказательства последнего утверждения нашей леммы достаточно заметить, что множество (быть может, пустое) тех точек x, где последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна, есть множество

$$A = \bigcap_{k\ge 1} \bigcup_{n\ge 1} \bigcap_{\substack{p\ge n\\ q>0}} \{x \mid |f_p(x) - f_{p+q}(x)| \le 1/k\}.$$

1.2.4 Сходимость по мере.

Пусть нам задана σ-алгебра множеств $\mathcal{A}$ и мера μ на этой σ-алгебре.

Определение 1.2.13. Последовательность измеримых относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$ функций $\{f_n(x)\}$ фундаментальна по мере μ, если для любых $a > 0$, $\epsilon > 0$ существует такой номер $n(a\,, \epsilon)$, что при $n \ge n(a\,, \epsilon)$ для всех $p \ge 1$ выполнено неравенство

$$\mu(\{x \mid |f_n(x) - f_{n+p}(x)| > a\}) < \epsilon. \tag{1.132}$$

Определение 1.2.14. Последовательность измеримых относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$ функций $\{f_n(x)\}$ сходится по мере μ к измеримой функции $f(x)$, если для любых $a > 0$, $\epsilon > 0$ существует такое число $n(a\,, \epsilon)$, что при $n \ge n(a\,, \epsilon)$ выполнено неравенство

$$\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) < \epsilon. \tag{1.133}$$

Ниже предполагается, что σ-алгебра и мера на ней фиксированы.

Из неравенства

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n+p}(x)|$$

следует, что

$$\mu(\{x \mid |f_n(x) - f_{n+p}(x)| > 2a\}) \le \tag{1.134}$$
$$\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) + \mu(\{x \mid |f(x) - f_{n+p}(x)| > a\}), \tag{1.135}$$

поэтому из сходимости по мере следует фундаментальность по мере. Ниже мы докажем, что из фундаментальности по мере следует сходимость по мере. Однако сначала мы докажем, что из сходимости почти всюду следует сходимость по мере.

Лемма 1.2.8. *Если последовательность измеримых функций* $\{f_n(x)\}$ *сходится почти всюду к функции* $f(x)$*, то последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к функции* $f(x)$ *по мере.*

Доказательство.Рассмотрим множество

$$A_a = \bigcap_m \bigcup_{n\geq m} \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}. \tag{1.136}$$

Если $x \in A_a$, то в этой точке x последовательность $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$, поэтому $\mu(A_a) = 0$ и

$$\mu(\bigcup_{n\geq m} \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) \to 0\ ,\ m \to \infty.$$

Следовательно,

$$\mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) \leq \mu(\bigcup_{n\geq m} \{x \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) \to 0\ ,\ m \to \infty.$$

Лемма 1.2.9. *Если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *фундаментальна по мере, то последовательность* $\{f_n(x)\}$ *содержит подпоследовательность, которая сходится почти всюду.*

Доказательство. Из условия 1.132 следует, что для любого $k > 0$ существует такой номер $n(k)$, что мера множества

$$A_k:\ (x \in A_k) \iff (\sup\{|f_{n(k)}(x) - f_m(x)| \mid m > n(k)\} \geq 2^{-k}).$$

удовлетворяет неравенству

$$\mu(A_k) < 2^{-k}.$$

Пусть

$$A = \bigcap_{j\geq 1} \bigcup_{k\geq j} A_k\,. \tag{1.137}$$

Очевидно, что

$$\forall j:\mu(A) \leq \mu(\bigcup_{k\geq j} A_k) \leq \sum_{k\geq j} \mu(A_k) < 2^{1-j} \to 0\ ,\ j \to \infty,$$

поэтому

$$\mu(A) = 0$$

и

$$\mu(\mathbf{C}(A)) = 1.$$

Но

$$\mathbf{C}(A) = \bigcup_{j\geq 1}\bigcap_{k\geq j}\mathbf{C}(A_k).$$

Если $x \in \mathbf{C}(A)$, то существует такое $j \geq 1$, что $x \in \bigcap\limits_{k\geq j}\mathbf{C}(A_k)$, поэтому

$$\begin{aligned}&\forall(k \geq j\,,\, p > 0):\ |f_{n(k)}(x) - f_{n(k+p)}(x)|\\ &< \sup\{|f_{n(k)}(x) - f_m(x)| \mid m \geq n(k)\} < 2^{-k},\end{aligned}$$

а это означает, что последовательность $f_{n(k)}(x)$ фундаментальна. Лемма доказана.

Замечание. Легко заметить, что доказательства двух последних лемм однотипны и основаны на рассмотрении множеств (1.137) и (1.136). В вероятностной интерпретации эти множества представляют некоторые события, которые происходят бесконечное число раз. При определенных условиях такие события должны быть измеримы относительно σ-алгебры, состоящей из двух множеств: $\emptyset$, X, и поэтому их вероятность может быть равна только нулю или единице (это одна из формулировок закона нуля или единицы в теории вероятности).

Из двух предыдущих лемм следует

Лемма 1.2.10. *Если последовательность измеримых функций фундаментальна по мере, то она сходится по мере к измеримой функции.*

Доказательство. Пусть $\{f_n(x)\}$ -фундаментальная по мере последовательность и $\{f_{n(j)}\}$ -ее подпоследовательность, которая сходится почти всюду к функции $f(x)$. Согласно лемме 1.2.7 функция $f(x)$ измерима. При любом $a > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\mu(\{x \mid |f(x) - f_m(x)| > 2a\}) <\\ &\mu(\{x \mid |f(x) - f_{n(j)}(x)| > a\}) + \mu(\{x \mid |f_{n(j)}(x) - f_m(x)| > a\}),\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства может быть сделано сколь угодно малым при $j \to \infty$, так как из сходимости почти всюду следует сходимость по мере. Второе слагаемое может быть сделано сколь угодно малым при выборе достаточно большого m в силу фундаментальности по мере последовательности $\{f_n(x)\}$. Лемма доказана.

Лемма 1.2.11. *При* $a > 0$ *справедливо неравенство*

$$\mu(\{x \mid |f(x)| > a\}) \le \frac{1}{a}\int |f(x)|\,\mu(dx). \tag{1.138}$$

Неравенство (1.138) называется *неравенством Чебышева.*

Для доказательства этого неравенства заметим, что

$$\int (|f(x)|/a)\,\mu(dx) \ge \int (|f(x)|/a)\,\mathbb{I}(\{x \mid |f(x)| > a\} \mid x)\mu(dx) \ge$$
$$\int \mathbb{I}(\{x \mid |f(x)| > a\} \mid x)\,\mu(dx) = \mu(\{x \mid |f(x)| > a\}).$$

Напомним, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в метрике пространства $L(X)$ к функции $f(x)$, если

$$\int |f_n(x) - f(x)|\,\mu(dx) \to 0\ ,\ n \to \infty.$$

Из неравенства (1.138) следует, что

$$\forall a > 0 : \mu(\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > a\}) \le \frac{1}{a}\int |f_n(x) - f(x)|\,\mu(dx),$$

поэтому из сходимости в $L(X)$ следует сходимость по мере.

Собирая доказанные леммы, мы получим

Теорема 1.2.5. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Если последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$ *сходится почти всюду, то она сходится по мере.*

2. Если последовательность измеримых функций сходится в метрике пространства $L(X)$*, то она сходится по мере.*

3. Для сходимости по мере последовательности $\{f_n(x)\}$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{f_n(x)\}$ *была фундаментально по мере.*

4. Фундаментальная по мере последовательность $\{f_n(x)\}$ *содержит сходящуюся почти всюду подпоследовательность.*

В заключении приведем одну полезную формулу. Пусть $\phi(t)$ -непрерывно дифференцируемая на инервале $[0\ ,\ \infty)$ неубывающая функция, $f(x)$ - измеримая функция. Тогда справедливо равенство

$$\int \phi(|f(x)|)\,\mu(dx) = \int_0^\infty \mu(\{x \mid |f(x)| > t\})\frac{d\phi(t)}{dt}\,dt. \tag{1.139}$$

Для доказательства этого равенства достаточно проинтегрировать по мере $\mu(dx)$ очевидное равенство

$$\phi(|f(x)|) = \int_0^\infty \mathbb{I}(\{x \mid |f(x)| > t\} \mid t)\,\frac{d\phi(t)}{dt}dt.$$

1.2.5 Функция Кантора.

Приведем во многих отношениях принципиально важный классический пример: функцию Кантора. Эта функция строится на отрезке $[0\,,\,1]$. Построение будем вести индуктивно. На нулевом шаге индукции мы определим функцию Кантора $\mathrm{Ct}(t)$ на интервалах $t < 0$, $t > 1$:

$$\mathrm{Ct}(t)\colon \mathrm{Ct}(t) = 0\,,\, t < 0\,;\; \mathrm{Ct}(t) = 1\,,\, t > 1.$$

Далее отметим на отрезке $[0\,,\,1]$ интервал $(1/3\,,\,2/3)$ и на этом интервале положим

$$\mathrm{Ct}(t) = (0+1)/2 = 1/2\ ,\ 1/3 < t < 2/3.$$

У нас остались два отрезка: $[0\,,\,1/3]$, $[2/3\,,\,1]$. На каждом отрезке мы отметим среднюю треть: интервалы $(1/9\,,\,2/9)$, $(7/9\,,\,8/9)$ и на отмеченных интервалах положим

$$\mathrm{Ct}(t) = (0+1/2)/2 = 1/4\,,\, 1/9 < t < 2/9,$$
$$\mathrm{Ct}(t) = (1/2+1)/2 = 3/4\,,\, 7/9 < t < 8/9.$$

Предположим, что мы сделали n шагов построения. На шаге $n+1$ мы поступаем так. Двигаясь от точки 0 вправо мы на каждом встретившемся отрезке будем отмечать лежащий посередине отрезка интервал, длина которого равна одной трети длинны отезка, и на отмеченном интервале определим функцию $\mathrm{Ct}(t)$ как полусумму тех значений, которые она имеет на ближайших слева и справа отмеченных ранее интервалах. Так мы будем делать до тех пор, пока не дойдем до точки 1. Затем мы вернемся к точке 0 и повторим построение. Объединение отмеченных в результате такого процесса интервалов называется отрытым множеством Кантора

$$G = (1/3\,,\,2/3)\bigcup(1/9\,,\,2/9)\bigcup(7/9\,,\,8/9)\ldots$$

Дополнение множества G

$$P = [0\,,\,1]\setminus G$$

называется замкнутым множеством Кантора (или еще совершенным множеством Кантора). Так как на каждом шаге построения суммарная длина неотмеченных отрезков уменьшается в $2/3$ раза, мера Лебега замкнутого множества Кантора равна нулю, поэтому мера Лебега открытого множества Кантора равна единице. По построению функция Кантора постоянна на каждой связанной компоненте открытого множества Кантора G и монотонно не убывает на G:

$$\mathrm{Ct}(t_1) \le \mathrm{Ct}(t_2)\ ,\ t_1 \le t_2\ ,\ t_1\,,\,t_2 \in G,$$

причем все числа вида $m2^n$, $0 < m < 2^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ принадлежат множеству значений функции Кантора $\mathrm{Ct}(t)$ на множестве G.

Доопределим функцию Кантора на всех точках отрезка $[0, 1]$ равенствами

$$\mathrm{Ct}(0) = 0\,,\ \mathrm{Ct}(t) = \sup_{\tau \le t} \mathrm{Ct}(\tau)\,,\ \tau \in G, 0 < t \le 1. \tag{1.140}$$

Ясно, что так определенная функция $\mathrm{Ct}(t)$ монотонно не убывает на отрезке $[0, 1]$ и $\mathrm{Ct}(1) = 1$. Докажем, что $\mathrm{Ct}(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. В силу монотонности функции $\mathrm{Ct}(t)$ в каждой точке $t_0 \in [0, 1]$ должны существовать пределы слева и справа. Предположим, что $\mathrm{Ct}(t_0 + 0) > \mathrm{Ct}(t_0 - 0)$. Тогда интервал $(\mathrm{Ct}(t_0 - 0)\ ,\ \mathrm{Ct}(t_0 + 0))$ не может содержать значений функции $\mathrm{Ct}(t)$ в силу монотонности функции $\mathrm{Ct}(t)$, а это противоречит тому, что все числа вида $m2^{-n}$, $0 < m < 2^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ принадлежат множеству значений функции $\mathrm{Ct}(t)$.

Мы доказали, что функция Кантора $\mathrm{Ct}(t)$ обладает следующими свойствами: она непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и монотонно не убывает на этом отрезке, причем $\mathrm{Ct}(0) = 0$, $\mathrm{Ct}(1) = 1$. По построению функция Кантора $\mathrm{Ct}(t)$ постоянна на каждом открытом интервале, объединение которых составляет открытое множество G. Отсюда следует, что функция Кантора дифференцируема в каждой точке открытого множества G и ее производная тождественно равна нулю на G. Так как дополнение множества G имеет меру ноль, мы получаем, что функция Кантора дифференцируема почти всюду на отрезке $[0, 1]$ и ее производная почти всюду равна нулю. Это может противоречить наивным предположениям о том, что с непрерывной функцией на множестве меры ноль ничего произойти не может. В данном случае на множестве меры ноль непрерывная функция возрастает от нуля до единицы.

В наших построениях мы фактически нигде не использовали то обстоятельство, что отмечается именно треть отрезка. К тем же выводам можно было бы прийти, если бы на каждом шаге отмечать, например, открытый интервал длины $4/5$ или $1/5$ отмечаемого отрезка. Классическая конструкция удобна тем, что она позволяет просто доказать, что замкнутое множество P имеет мощность континуума. Действительно, из построения следует, что множеству P принадлежат те и только те числа q, которые имеют вид

$$q = \sum_{1 \le n < \infty} 3^{-n} a(n)\ ,\ \text{где } a(n) = 0\,,\,2$$

-произвольная последовательность из нулей и двоек. Но все такие числа находятся во взаимно однозначном соответствии с числами вида

$$r = \sum_{1 \leq n < \infty} 2^{-n-1} a(n) \;, \text{ где } a(n) = 0 \,, \, 1,$$

а это и есть все числа из полуинтервала $(0\,,\,1]$.

Таким образом замкнутое множество Кантора (или, как его еще называют, совершенное множество Кантора) есть пример множества, которое имеет меру ноль и мощность континуума.

В некотором смысле противоположный пример можно получить, если рассмотреть множество

$$A = [0\,,1] \setminus \bigcup_{1 \leq n < \infty} (x_n - 4^{-n}\epsilon \;,\; x_n + 4^{-n}\epsilon),$$

где $\{x_n\}$ -последовательность всех рациональных точек отрезка $[0\,,\,1]$. Множество A замкнуто и имеет меру, больше чем $1-\epsilon$, но не содержит ни одного открытого интервала.

1.2.6 Теорема Фубини.

Пусть K_1 , K_2 -компактные топологические пространства, $K = K_1 \times K_2$ -декартово произведение пространств K_1 , K_2. Точки пространства $K = K_1 \times K_2$ мы будем обозначать символами $(x\,,\,y) \equiv x \times y$, $x \in K_1$, $y \in K_2$. Пусть $C(K)$ -множество всех непрерывных функций на пространстве K. Возьмем пространство всех непрерывных на компакте K функций $C(K)$ в качестве пространства элементарных функций и пусть

$$I_0 : C(K) \mapsto \mathbb{R}^1$$

-элементарный интеграл на $L_0(K) = C(K)$. Напомним, что элементарный интеграл необходимо удовлетворяет условию

$$\forall (f \in C(K)) : |I_0(f)| \leq I_0(1) \sup\{|f(x\,,\,y)| \mid (x\,,\,y) \in K\}. \tag{1.141}$$

Предположим, что элементарный интеграл I_0 удовлетворяет условию:

$$\forall (f(x\,,\,y) = \phi(x)\psi(y)) : I_0(f) = I_{0,1}(\phi) I_{0,2}(\psi), \tag{1.142}$$

где $I_{0,1}$, $I_{0,2}$ -линейные функционалы на $C(K_1)$, $C(K_2)$ соответственно.

Приведем пример. Пусть $K_1 = K_2 = [0\,,\,1]$. Тогда функционалы

$$I_0 : f(x\,,\,y) \mapsto \int_0^1 \int_0^1 f(x\,,\,y)\, dx dy$$
$$I_0 : f(x\,,\,y) \mapsto f(x_0\,,\,y_0)$$

удовлетворяют условию (1.142), а функционал

$$I_0 : f(x\,,\,y) \mapsto \int_0^1 f(x\,,\,x)\,dx$$

не удовлетворяет условию (1.142).

Из того факта, что элементарный интеграл I_0 удовлетворяет условиям 1.1.5-1.1.7 на пространстве $C(K)$ следует, что функционалы $I_{0,1}$, $I_{0,2}$ в (1.142) удовлетворяют условиям 1.1.5-1.1.7 на пространствах $C(K_1)$, $C(K_2)$ и поэтому могут рассматриваться как элементарные интегралы на этих пространствах.

Элементарные интегралы I_0 , $I_{0,1}$, $I_{0,2}$ по схеме Даниэля порождают пространства $L(K)$, $L(K_1)$, $L(K_2)$ соответственно и этим интегралам соответствуют меры

$$\mu(dxdy)\ ,\ \mu(dx,\cdot)\ ,\ \mu(\cdot,dy).$$

Мы будем говорить, что эти меры порожденны элементарными интегралами I_0 , $I_{0,1}$, $I_{0,2}$.

Определение 1.2.15. Мера $\mu(dxdy)$ на компакте $K = K_1 \times K_2$ называется произведением мер $\mu(dx\,,\,\cdot)$ и $\mu(\cdot\,,\,dy)$:

$$\mu(dxdy) = \mu(dx\,,\,\cdot) \times \mu(\cdot\,,\,dy),$$

если порождающие их элементарные интегралы связаны соотношением (1.142).

Следующее утверждение называется теоремой Фубини.

Теорема 1.2.6. *Пусть выполнены все сделанные выше предположения и $f(x\,,\,y) \in L(K)$. Тогда*

1. Почти всюду по мере $\mu(\cdot\,,\,dy)$ функция

$$K_1 \ni x \mapsto f(x\,,\,y)$$

принадлежит пространству $L(K_1)$.

2. Почти всюду по мере $\mu(dx\,,\,\cdot)$ функция

$$K_2 \ni y \mapsto f(x\,,\,y)$$

принадлежит пространству $L(K_2)$.

3. Функции

$$K_1 \ni x \mapsto \int f(x\,,\,y)\mu(\cdot\,,\,dy),$$
$$K_2 \ni y \mapsto \int f(x\,,\,y)\mu(dx\,,\,\cdot)$$

принадлежат пространствам $L(K_1)$, $L(K_2)$ соответственно.

4. Справедливо равенство

$$\int f(x\,,\,y)\mu(dxdy) = \int \left(\int f(x\,,\,y)\,\mu(\cdot\,,\,dy)\right)\mu(dx\,,\,\cdot), \tag{1.143}$$

где в левой части равенства интегрирование ведется по компакту K, а в правой части равенства внутренний интеграл берется по компакту K_2, а внешний по компакту K_1.

Доказательство. Ясно, что теорему достаточно доказать для $f(x\,,\,y) \in L_+(K)$. В дальнейшем мы будем рассматривать пространство $C(K)$ как банахово пространство с нормой

$$\|f\| = \sup\{|f(x\,,\,y)| \mid (x\,,\,y) \in K\}.$$

В этом пространстве алгебра функций вида

$$f(x\,,\,y) = \sum_{1 \le j \le n} \phi_j(x)\psi_j(y) \tag{1.144}$$

плотна по норме и ее замыкание совпадает с $C(K)$. На каждой функции вида (1.144) формула (1.143) верна в силу предположения (1.142). Следовательно, в силу непрерывности функционалов I_0 , $I_{0,1}$, $I_{0,2}$ формула (1.143) верна для любой непрерывной функции $f \in C(K)$. Пусть теперь $f \in L_+(K)$ и $f_n \in C(K)$ такая последовательность, что $f_n(x\,,\,y) \nearrow f(x\,,\,y)$, $n \to \infty$. Тогда

$$\forall n\colon \int f_n(x\,,\,y)\mu(dxdy) = \int \left(\int f_n(x\,,\,y)\mu(\cdot\,,\,dy\right)\mu(dx\,,\,\cdot). \tag{1.145}$$

Последовательность

$$\phi_n(x) = \int f_n(x\,,\,y)\,\mu(\cdot\,,\,dy)$$

состоит из непрерывных функций, она монотонно не убывает и интегралы от нее ограничены в совокупности. Следовательно, в силу теоремы Беппо Леви почти всюду по мере $\mu(dx\,,\,\cdot)$ существует предел

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x\,,\,y)\,\mu(\cdot\,,\,dy), \tag{1.146}$$

причем

$$\int \phi(x)\mu(dx\,,\,\cdot) = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x\,,\,y)\,\mu(dxdy) = \int f(x\,,\,y)\,\mu(dxdy). \quad (1.147)$$

При тех значениях $x \in K_1$, при которых существует предел в (1.146), последовательность интегралов

$$\int f_n(x\,,\,y)\,\mu(\cdot\,,\,dy),$$

ограничена в совокупности, поэтому при этих значениях x в силу теоремы Беппо Леви функция

$$y \to \lim_{n\to\infty} f_n(x\,,\,y) = f(x\,,\,y) \in L_+(K_2),$$

и справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x\,,\,y)\,\mu(\cdot\,,\,dy) = \int f(x\,,\,y)\,\mu(\cdot\,,\,dy).$$

Теорема доказана.

1.2.7 Разложение Лебега и теорема Радона-Никодима.

Пусть на σ-алгебре $\mathcal{A}$ заданы две меры m_1 и m_2.

Определение 1.2.16. Мера m_1 называется сингулярной относительно меры m_2, если существует такое множество $B \in \mathcal{A}$, что

$$m_2(B) = m_1(\mathbf{C}(B)) = 0. \quad (1.148)$$

Легко видеть, что условие (1.148) эквивалентно условию

$$m_2(B) = 0 \text{ и } \forall(A \in \mathcal{A}) : m_1(A) = m_1(A \bigcap B), \quad (1.149)$$

и если мера m_1 сингулярна относительно меры m_2, то мера m_2 сингулярна относительно меры m_1.

Рассмотрим пример. Пусть $\mathrm{Ct}(t)$, $t \in [0\,,\,1]$ -функция Кантора. Эта функция монотонно не убывает и непрерывна, и поэтому (см. пример 1.1.8) на σ-алгебре $\mathcal{A}$ борелевских подмножеств отрезка $[0\,,\,1]$ она порождает меру m_{Ct}, которая на каждом открытом интервале $(\alpha\,,\,\beta) \subset [0\,,\,1]$ принимает значение

$$m_{\mathrm{Ct}}(\alpha\,,\,\beta) = \mathrm{Ct}(\beta) - \mathrm{Ct}(\alpha).$$

На этой же алгебре $\mathcal{A}$ борелевских множеств отрезка $[0\,,\,1]$ рассмотрим меру Лебега
$$m_l(\alpha\,,\,\beta)=\beta-\alpha.$$
Ясно, что
$$\forall(A\in\mathcal{A}):m_{\mathrm{Ct}}(A)=m_{\mathrm{Ct}}(A\bigcap P),$$
и так как мера Лебега множества P равна нулю, то меры m_{Ct} и мера Лебега сингулярны.

Пусть на некоторой σ-алгебре $\mathcal{A}$ заданы две меры λ и μ.

Определение 1.2.17. Мера λ называется абсолютно непрерывной относительно меры μ, если из того, что $\mu(A)=0$ следует, что $\lambda(A)=0$.

Если $\omega(x)\in L_\mu(X)$, $\omega(x)\geq 0$, то формула
$$\forall(A\in\mathcal{A}):\lambda(A)=\int\mathbb{I}(A\mid x)\omega(x)\,\mu(dx) \tag{1.150}$$
задает меру, которая является абсолютно непрерывной относительно меры μ. Ниже мы увидим, что *любая* абсолютно непрерывная мера имеет такой вид.

Лемма 1.2.12. *Пусть на некоторой σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножств множества X заданы две меры λ и μ. Тогда пространство X есть объединение трех принадлежащих σ-алгебре $\mathcal{A}$ непересекающихся множеств*
$$X=X_{0,\lambda}\bigcup X_{0,\mu}\bigcup X_{\lambda,\mu},$$
причем
$$\lambda(X_{0,\lambda})=\mu(X_{0,\mu})=0, \tag{1.151}$$
а на пространстве $X_{\lambda,\mu}$ определена такая измеримая относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$ функция $\omega(x)$, что
$$\forall(A\subset X_{\lambda,\mu}\,,\;A\in\mathcal{A}):\lambda(A)=\int\mathbb{I}(A\mid x)\omega(x)\,\mu(dx). \tag{1.152}$$

Доказательство. Положим
$$\forall(m\in\mathcal{A})\;:\nu(m)=\lambda(m)+\mu(m).$$
Рассмотрим действительное гильбертово пространство $L^2_\nu(X)$ со скалярным произведением
$$<f\,,\,g>=\int f(x)g(x)\,\nu(dx).$$

В этом гильбертовом пространстве определим линейный функционал

$$l : L^2_\nu(X) \ni f \mapsto l(f) = \int f(x)\,\lambda(dx).$$

Функционал l непрерывен, так как

$$|l(f)| \le \left(\int 1\,\lambda(dx)\right)^{1/2} \left(\int f^2(x)\,\lambda(dx)\right)^{1/2} \le \left(\int f^2(x)\,\nu(dx)\right)^{1/2}$$

По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, в пространстве $L^2_\nu(X)$ существует такая функция $f_0(x)$, что

$$\forall (f \in L^2_\nu(X)) : l(f) =< f_0\,,\, f > .$$

Следовательно,

$$\forall (f \in L^2_\nu(X)) : \int f(x)\,\lambda(dx) = \int f(x) f_0(x)\,\nu(dx) =$$
$$\int f(x) f_0(x)\,\lambda(dx) + \int f(x) f_0(x)\,\mu(dx). \tag{1.153}$$

Так как

$$\forall (f \ge 0) : l(f) \ge 0,$$

то из (1.153) следует, что

$$\text{п.в. } mod(\nu) :\ f_0(x) \ge 0.$$

Из (1.153) следует равенство

$$\forall (f \in L^2_\nu(X)) : \int f(x)(1 - f_0(x))\,\lambda(dx) = \int f(x) f_0(x)\,\mu(dx) \ge 0, \tag{1.154}$$

Пусть

$$A_\epsilon = \{x \mid f_0(x) > 1 + \epsilon\}.$$

Подставив в (1.154)

$$f(x) = \mathbb{I}(A_\epsilon \mid x),$$

мы получим:

$$\lambda(A_\epsilon) = \mu(A_\epsilon) = 0,$$

поэтому

$$\text{п.в. } mod(\nu) :\ 1 - f_0(x) \ge 0.$$

Определим множества

$$
\begin{aligned}
X_{0,\lambda} &= \{x \mid f_0(x) = 0\}, &(1.155)\\
X_{0,\mu} &= \{x \mid f_0(x) = 1\}, &(1.156)\\
X_{\lambda,\mu} &= \{x \mid 0 < f_0(x) < 1\}. &(1.157)
\end{aligned}
$$

Очевидны равенства

$$\forall (A \subset X_{0,\lambda}) : \lambda(A) = 0\ ;\ \forall (A \subset X_{0,\mu}) : \mu(A) = 0. \tag{1.158}$$

Положим в (1.154)

$$f(x) = f_n(x) = \mathbb{I}(A \mid x) \min(n\,,\ (1 - f_0(x))^{-1})\,,\ A \subset X_{\lambda,\mu}.$$

Получим:

$$
\begin{aligned}
&\int \mathbb{I}(A \mid x)(1 - f_0(x)) \min(n\,,\ (1 - f_0(x))^{-1})\, \lambda(dx) = \\
&\int \mathbb{I}(A \mid x) \min(n\,,\ (1 - f_0(x))^{-1}) f_0(x)\, \mu(dx). \qquad (1.159)
\end{aligned}
$$

Но

$$
\begin{aligned}
&\forall A \subset X_{\lambda,\mu} \text{ п.в. } mod(\nu) : \\
&\mathbb{I}(A \mid x)(1 - f_0(x)) \min(n\,,\ (1 - f_0(x))^{-1}) \nearrow \mathbb{I}(A \mid x),
\end{aligned}
$$

поэтому из (1.159) следует, что

$$\forall (A \subset X_{\lambda,\mu})\ :\ \omega(x) := \mathbb{I}(A \mid x)(1 - f_0(x))^{-1} f_0(x) \in L_\mu(X)$$

и

$$\forall (A \subset X_{\lambda,\mu})\ :\ \lambda(A) = \int \mathbb{I}(A \mid x)\omega(x)\, \mu(dx).$$

В силу симметрии между мерами λ и μ аналогичное утверждение справедливо и для меры μ. Лемма доказана.

Пусть на σ-алгебре $\mathcal{A}$ заданы две меры λ и μ. Воспользуемся обозначениями предыдущей леммы и определим меры

$$\lambda_{\perp\mu} \colon A \mapsto \lambda_{\perp\mu}(A) = \lambda(A \bigcap X_{0,\mu}), \tag{1.160}$$

$$\lambda_{\|\mu} \colon A \mapsto \lambda_{\|\mu}(A) = \int \mathbb{I}(A \mid x)\mathbb{I}(X_{\lambda,\mu} \mid x)\omega(x)\, \mu(dx). \tag{1.161}$$

Ясно, что мера $\lambda_{\perp\mu}$ сингулярна относительно меры μ, а мера $\lambda_{\|\mu}$ абсолютно непрерывна относительно меры μ. Таким образом, из леммы 1.2.12 следует

Теорема 1.2.7. *Если на σ-алгебре $\mathcal{A}$ заданы две меры λ и μ, то справедливо разложение*

$$\forall(A \in \mathcal{A}) : \lambda(A) = \lambda_{\|\mu}(A) + \lambda_{\perp\mu}(A), \tag{1.162}$$

где мера $\lambda_{\|\mu}$ абсолютно непрерывна относительно меры μ, а мера $\lambda_{\perp\mu}$ сингулярна относительно меры μ.

Представление меры в виде (1.162) называется *разложением Лебега* (Лебег открыл эту формулу).

Из леммы 1.2.12 и разложения Лебега следует теорема Радона-Никодима.

Теорема 1.2.8. *Если мера λ абсолютно непрерывна относительно меры μ, то существует такая функция $\omega(x) \in L_\mu(X)$, что*

$$\forall(A \in \mathcal{A}) : \lambda(A) = \int \mathbb{I}(A \mid x)\omega(x)\,\mu(dx). \tag{1.163}$$

Доказательство. Если мера λ абсолютно непрерывна относительно меры μ, то второе слагаемое в (1.162) равно нулю, а первое слагаемое дается формулой (1.161), что и доказывает теорему.

1.2.8 Счетно-аддитивные функции множеств и теорема Хана.

Определение 1.2.18. Определенная на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества X функция μ

$$\mu : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}^1$$

называется счетно-аддитивной, если

$$\mu(\emptyset) = 0$$

и если для любого счетного семейства непересекающихся множеств $\{A_j\}$ выполнено равенство

$$\forall((j \neq k) \Rightarrow (A_j \bigcap A_k = \emptyset)) : \mu(\bigcup_{1\le j<\infty} A_j) = \sum_{1\le l<\infty} \mu(A_j)\,,\,.$$

В отличии от меры, счетно-аддитивная функция множеств может принимать отрицательные значения. Иногда рассматривают и такие счетно-аддитивные функции множеств, которые могут принимать бесконечные значения. Мы не будем рассматривать такие функции и будем считать, что

$$\forall(A \in \mathcal{A}) : |\mu(A)| < \infty.$$

Изучение счетно-аддитивных функций множеств сводится к изучению мер, и это утверждение есть содержание следующей теоремы Хана.

Теорема 1.2.9. *Для любой определенной на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества X счетно-аддитивной функции множеств μ существуют такие подмножества $E_\mu^\pm \subset X$, $E_\mu^\pm \in \mathcal{A}$, что*

$$X = E_\mu^+ \bigcup E_\mu^- \ , \ E_\mu^+ \bigcap E_\mu^- = \emptyset \tag{1.164}$$

$$\forall (A \in \mathcal{A}) : \ \mu(A \bigcap E_\mu^+) \geq 0, \tag{1.165}$$

$$\forall (A \in \mathcal{A}) : \ \mu(A \bigcap E_\mu^-) \leq 0. \tag{1.166}$$

Доказательство. Мы будем называть подмножество $E_\mu^+ \subset X$, $E_\mu^+ \in \mathcal{A}$ *положительным*, если выполнено условие (1.165), и будем называть подмножество $E_\mu^- \subset X$, $E_\mu^- \in \mathcal{A}$ *отрицательным*, если выполнено условие (1.166). Семейство всех положительных (отрицательных) множеств не пусто: пустое множество всегда есть одновременно и положительное множество, и отрицательное множество. Ясно, что любое принадлежащее σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножество положительного (отрицательного) множества есть множество положительное (отрицательное), пересечение положительных (отрицательных) множеств есть множество положительное (отрицательное), объединение положительных (отрицательных) множеств есть множество положительное (отрицательное).

Пусть

$$\beta = \inf \mu(B),$$

где нижняя грань берется по всем отрицательным множествам. Из определения точной нижней грани следует, что существует такая последовательность отрицательных множеств $\{B_n\}$, что

$$\beta = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n).$$

Без ограничения общности можно считать, что $B_n \subset B_{n+1}$, поэтому

$$\beta = \mu(\bigcup_n B_n),$$

а так как

$$(\bigcup_n B_n) \in \mathcal{A},$$

то

$$\beta > -\infty.$$

Положим

$$E_\mu^- := \bigcup_n B_n. \tag{1.167}$$

Определенное равенством (1.167) множество отрицательно и удовлетворяет равенству

$$\beta = \mu(E_\mu^-).$$

Для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что множество

$$E_\mu^+ := X \setminus E_\mu^- \tag{1.168}$$

обладает следующим свойством:

$$\forall (A \subset E_\mu^+\,,\ A \in \mathcal{A}) :\ \mu(A) \geq 0. \tag{1.169}$$

Мы докажем, что отрицание этого утверждения ведет к противоречию.

Пусть существует такое множество $E_0 \subset E_\mu^+$, что $\mu(E_0) < 0$. Множество E_0 не может быть отрицательным, так как тогда

$$\mu(E_\mu^- \bigcup E_0) = \mu(E_\mu^-) + \mu(E_0) < \beta,$$

что противоречит выбору числа β. Следовательно, существуют такие множества $A \subset E_0$, что $\mu(A) > 0$. Пусть

$$\epsilon_1 = \sup\{\mu(A) \mid A \subset E_0\}.$$

Справедливо неравенство

$$\epsilon_1 > 0,$$

и существует такое множество

$$A_1 \subset E_0\,, \text{ что } \mu(A_1) > \frac{1}{2}\epsilon_1.$$

Положим

$$E_1 = E_0 \setminus A_1.$$

Из равенства

$$\mu(E_0) = \mu(E_1) + \mu(A_1)$$

следует, что

$$\mu(E_1) < 0.$$

Рассуждая как и выше, мы получим, что множество E_1 не может быть отрицательным, поэтому

$$\epsilon_2 := \sup\{\mu(A) \mid A \subset E_1\} > 0,$$

и существует такое множество

$$A_2 \subset E_1,$$

что
$$\mu(A_2) > \frac{1}{2}\epsilon_2.$$
Продолжая этот процесс по индукции, мы получим последовательность множеств
$$E_n = E_{n-1} \setminus A_n \, , \, A_n \subset E_{n-1} \, , \, A_n \bigcap A_m = \emptyset \, , \, n \neq m,$$
и последовательность чисел
$$\epsilon_n = \sup\{\mu(A) \mid A \subset E_{n-1}\}, \, 0 < \frac{1}{2}\epsilon_n < \mu(A_n) \, .$$
Пусть
$$A = \bigcup_n A_n.$$
Так как $A \in \mathcal{A}$, то $\mu(A) < \infty$, и
$$\frac{1}{2}\sum_n \epsilon_n < \sum_n \mu(A_n) = \mu(A) < \infty.$$
поэтому
$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0.$$
Следовательно, множество $E_0 \setminus A$ отрицательно и удовлетворяет неравенству
$$\mu(E_0 \setminus A) < 0,$$
чего, как мы видели выше, быть не может.

Теорема доказана.

Положим
$$\mu^{\pm}(A) = \pm\mu(A \bigcap E_{\mu}^{\pm}). \tag{1.170}$$
Определенные равенством (1.170) функции множеств $\mu^{\pm}$ неотрицательны, счетно-аддитивны и являются мерами на σ-агебре $\mathcal{A}$, причем справедливо равенство
$$\forall (A \in \mathcal{A}) : \; \mu(A) = \mu^{+}(A) - \mu^{-}(A). \tag{1.171}$$
Равенство (1.171) называется *разложением Хана* (подразумевается, конечно, что это то разложение, которое *сделал* Хан).

Разложение Хана единственно в следующем смысле: если $\widetilde{E_{\mu}^{\pm}}$ другие множества, удовлетворяющие теореме 1.2.9, то
$$\forall (A \in \mathcal{A} \, , \, A \subset E^{+} \bigcap \widetilde{E^{-}}) : \; \mu(A) = 0.$$

1.2.9 Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве $L^p(X)$.

Линейным непрерывным функционалом на пространстве $L^p(X)$ называется такое отображение

$$l:\ L^p(X) \mapsto \mathbb{C}^1,$$

которое линейно:

$$l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g),$$

и непрерывно:

$$|l(f_n)| \to 0\,,\ \text{если}\ \|f_n \mid L^p(X)\| \to 0\,,\ n \to \infty. \tag{1.172}$$

Условие (1.172) выполнено, если

$$\exists C < \infty:\ |l(f)| < C\|f \mid L^p(X)\|. \tag{1.173}$$

Можно показать, что условие (1.173) является необходимым и достаточным условием непрерывности линейного функционала.

Число

$$\|l \mid L^p(X)^\star\| := \sup\{|l(f)| \mid \|f \mid L^p(X)\| \le 1\}$$

называется *нормой* линейного функционала.

Общий вид линейного непрерывного функционала на пространстве $L^p(X)$ $1 < p < \infty$ описан в теореме 1.2.10. Доказательсву этой теоремы мы предпошлем несколько лемм. Мы будем предполагать, что условие 1.1.8 выполнено: функция $f_0(x) \equiv 1$ принадлежит пространству $L_0(X)$ и выполнено условие нормировки:

$$I(1) = 1.$$

Ниже мы будем предполагать, что p и q -сопряженные показатели степени:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

причем $1 < p < \infty$.

Лемма 1.2.13. *Если $\omega \in L^q(X)$, то формула*

$$l(f) = I(\omega f) \tag{1.174}$$

задает линейный нерерывный функционал на пространстве $L^p(X)$, причем норма этого функционала есть

$$\|l \mid L^p(X)^\star\| = \|\omega \mid L^q(X)\|. \tag{1.175}$$

Доказательство. Из теоремы 1.1.4 следует, что правая часть (1.175) корректно определяет линейный функционал на $L^p(X)$, из неравенства Минковского следует оценка

$$|l(f)| \leq \|\omega \mid L^q(X)\| \cdot \|f \mid L^p(X)\|,$$

из которой вытекает, что задаваемый формулой (1.174) линейный функционал непрерывен и его норма удовлетворяет неравенству

$$\|l \mid L^p(X)^\star\| \leq \|\omega \mid L^q(X)\|. \tag{1.176}$$

Пусть

$$f(x) := \operatorname{sign}((\omega(x)))|\omega(x)|^{q/p}\|\omega \mid L^q(X)\|^{-q/p}.$$

Тогда

$$f \in L^p(X)\ ,\ \|f\|_p = 1,$$

и

$$l(f) = \|\omega \mid L^q(X)\|.$$

Следовательно,

$$\|l \mid L^p(X)^\star\| = \|\omega \mid L^q(X)\|\,.$$

Лемма доказана.

Лемма 1.2.14. *Если l -линейный непрерывный функционал на пространстве $L^p(X)$, то существует такая функция $\omega(x) \in L^q(X)$ что справедливо равенство* (1.175).

Доказательство. Пусть μ -мера, порожденная интегралом I и $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра множеств, измеримых относительно $\mathcal{A}$. Формула

$$\forall (A \in \mathcal{A}) : \nu(A) = l(\mathbb{I}(A \mid \cdot)) \tag{1.177}$$

порождает σ-аддитивную (в силу непрерывности функционала l) функцию множеств на σ-алгебре $\mathcal{A}$. Пусть $E_\nu^\pm$ -множества, котроые входят в разложение Хана функции ν,

$$\nu^\pm(A) = \pm l(\mathbb{I}(A \bigcap E_\nu^\pm \mid \cdot)). \tag{1.178}$$

Из (1.178) следует, что

$$\nu^\pm(A) \leq \|l \mid L^p(X)^\star\| \|\mathbb{I}(A \bigcap E_\nu^\pm \mid \cdot) \mid L^p(X)\| \leq const \mu(A)^{1/p},$$

поэтому меры $\nu^{\pm}$ абсолютно непрерывны относительно меры μ, и в силу теоремы Радона-Никодима существуют такие функции $\omega^{\pm}(x) \in L(X)$, что

$$\forall(A \in \mathcal{A}) : \nu^{\pm}(A) = \pm \int \omega(x)\mathbb{I}(A \mid x)\mu(dx). \tag{1.179}$$

Положим

$$\omega(x) = \omega^{+}(x) - \omega^{-}(x). \tag{1.180}$$

Из (1.177) следует, что для всех принимающих лишь конечное число значений функций $f(x) \in L^p(X)$ и определенной равенствами (1.179)-(1.180) функции $\omega(x)$ справедливо равенство

$$l(f) = \int \omega(x)f(x)\mu(dx). \tag{1.181}$$

Положим

$$f(x \mid a) := f(x)\mathbb{I}(|\omega(x)| < a \mid x)$$

Из (1.181) следует, что для всех принимающих лишь конечное число значений функций $f(x) \in L^p(X)$ справедливо равенство

$$l(f(\cdot \mid a)) = \int \omega(x)f(x)\mathbb{I}(|\omega(x)| < a \mid x)\mu(dx). \tag{1.182}$$

Предельным переходом (см.лемму 1.2.5 на стр. 59) равенство (1.182) распространяется на все функции из $L^p(X)$:

$$\forall(f \in L^p(X)) : \ l(f(\cdot \mid a)) = \int \omega(x)f(x)\mathbb{I}(|\omega(x)| < a \mid x)\mu(dx). \tag{1.183}$$

причем, очевидно,

$$|l(f(\cdot \mid a))| \leq \|l \mid L^p(X)^{\star}\|\|f(\cdot \mid a) \mid L^p(X)\|. \tag{1.184}$$

Подставив в уравнение (1.184) функцию

$$f(x) = \operatorname{sign}(\omega(x))|\omega(x)|^{q/p}\mathbb{I}(|\omega(x)| < a \mid x),$$

мы получим неравенство:

$$\begin{aligned} l(f) = \int |\omega(x)|^{q}\mathbb{I}(|\omega(x)| < a \mid x)\,\mu(dx) = \|\omega(\cdot \mid a) \mid L^q(X)\|^q \\ \leq \|l \mid L^p(X)^{\star}\|\|f \mid L^p(X)\| = \leq \|l \mid L^p(X)^{\star}\|\|\omega(\cdot \mid a) \mid L^q(X)\|^{q/p}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|\omega(\cdot \mid a) \mid L^q(X)\| \leq \|l \mid L^p(X)^{\star}\|. \tag{1.185}$$

Переходя в (1.185) к пределу $a \to \infty$, мы получим, что входящая в (1.183) функция $\omega(x)$ принадлежит пространству $L^q(X)$. Затем мы можем перейти к пределу $a \to \infty$ в равенстве (1.183). Лемма доказана.

Собирая доказанные выше леммы, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 1.2.10. *Любой линейный непрерывный функционал на пространстве* $L^p(X)$, $1 < p < \infty$, *задается в виде*

$$l(f) = I(\omega f),$$

где $\omega \in L^q(X)$ *и* q*-сопряженный к* p *показатель:* $q = p/(p-1)$.

Случаи $p = 1$ и $p = \infty$ -особые, и мы их рассматривать не будем, отослав Читателя к цитированной в коментариях литературе.

1.2.10 Функции с ограниченной вариацией и абсолютно непрерывные функции.

В этом параграфе мы докажем несколько теорем о функциях дейтвительной переменной на отрезке. Эти теоремы существенно используются в математической теории рассеяния.

Пусть на отрезке $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}^1$ задана действительная функция $f(x)$ и пусть

$$T = \{a = x_0 < x_1, \ldots < x_n = b\}$$

-разбиение отрезка $[a\,,\,b]$. Положим

$$V(T \mid f)_a^b = \sum_{0 \le j < n} |f(x_{j+1} - f(x_j)|. \tag{1.186}$$

Определение 1.2.19. Полной вариацией (или изменением) функции $f(x)$ на отрезке $[a\,,\,b]$ называется взятая по всем разбиениям точная верхняя грань сумм вида (1.186):

$$V(f)_a^b = \sup V(T \mid f)_a^b. \tag{1.187}$$

Функция $f(x)$ называется функцией с ограниченной вариацией (или функцией с ограниченным изменением), если

$$V(f)_a^b < \infty.$$

Приведем примеры.

1. Любая монотонная функция есть функция с ограниченным изменением и для монотонной функции

$$V(f)_a^b = |f(a) - f(b)|.$$

2. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a\,,\,b]$ имеет непрерывную ограниченную производную, то

$$V(f)_a^b \leq (b-a)\sup\{|f'(x)| \mid x \in (a\,,\,b)\}.$$

3. Не любая непрерывная функция имеет ограниченное изменение. Примером непрерывной функции с неограниченным изменением является функция

$$f(x) = \begin{cases} 0\,,\ x = 0, \\ \sqrt{x}\cos(\frac{\pi}{2x})\,,\ 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

на отрезке $[0\,,\,1]$. Если

$$T = \{x_0 = 0 < 1/2n < 1/(2n-1) < \ldots x_{2n} = 1,$$

то

$$V(T\,,\,f)_0^1 = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{\sqrt{2j}} \sim \sqrt{n} \to \infty\,,\ n \to \infty.$$

Теорема 1.2.11. *1. Если функции f и g имеют ограниченное изменение, то функция $\alpha f + \beta g$ имеет ограниченное изменение и*

$$V(\alpha f + \beta g)_a^b \leq |\alpha| V(f)_a^b + |\beta| V(g)_a^b.$$

2. Если функция f имеет ограниченное изменение и $a \leq c \leq b$, то

$$V(f)_a^b = V(f)_a^c + V(f)_c^b. \tag{1.188}$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго утверждения рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a\,,\,b]$ и пусть T' -разбиение, полученное из разбиения T добавлением точки c. Тогда

$$T' = T_1 \bigcup T_2,$$

где T_1 -точки разбиения T', которые лежат на отрезке $[a\,,\,c]$, а T_2 -точки разбиения T', которые лежат на отрезке $[c\,,\,b]$. Имеем:

$$V(T\,,\,f)_a^b \leq V(T'\,,\,f) \leq V(T_1\,,\,f)_a^c + V(T_2)_c^b \leq$$
$$V(f)_a^c + V(f)_c^b.$$

Так как это неравенство справедливо для любого разбиения, то

$$V(f)_a^b \leq V(f)_a^c + V(f)_c^b.$$

С другой стороны, для любых разбиений T_1 и T_2 отрезков $[a\,,\,c]$ и $[c\,,\,b]$ имеем:

$$V(f)_a^b \geq V(T_1 \bigcup T_2\,,\,f)_a^b = V(T_1\,,\,f)_a^c + V(T_2\,,\,f)_c^b,$$

Следовательно,

$$V(f)_a^c \geq V(f)_a^c + V(f)_c^b.$$

Теорема доказана.

Теорема 1.2.12. *Если функция имеет ограниченное изменение на отрезке $[a\,,\,b]$, то на отрезке $[a\,,\,b]$ ее можно представить как разность двух монотонно неубывающих функций.*

Доказательство. Докажем, что функция

$$x \mapsto V(f)_a^x - f(x)$$

не убывает. Имеем:

$$\begin{aligned}
&V(f)_a^{x+\Delta x} - f(x+\Delta x) - (V(f)_a^x - f(x)) = \\
&V(f)_x^{x+\Delta x} - (f(x+\Delta x) - f(x)) \geq \\
&V(f)_x^{x+\Delta x} - |f(x+\Delta x) - f(x)| \geq 0.
\end{aligned}$$

Равенство

$$f(x) = V(f)_a^x - (V(f)_a^x - f(x)).$$

дает искомое представление. Теорема доказана.

Следствие 1.2.2. *Функция имеет ограниченное изменение в том и только том случае, если она есть разность двух неубывающих функций.*

Определение 1.2.20. Функции $f(x)$ на отрезке $[a\,,\,b]$ называется абсолютно непрерывной, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta(\epsilon) > 0$, что для любых интервалов $(a_j\,,\,b_j) \subset [a\,,\,b]\,,\ 1 \leq j \leq n$, которые удовлетворяют условиям

$$\forall (j \neq i) : (a_j\,,\,b_j) \bigcap (a_i\,,\,b_j) = \emptyset\ ,\ \sum_{1 \leq j \leq n} (b_j - a_j) < \delta(\epsilon)$$

выполнено неравенство

$$\sum_{1 \leq j \leq n} |f(a_j) - f(b_j)| < \epsilon.$$

Очевидно, что любая абсолютно непрерывная функция непрерывна.

Теорема 1.2.13. *Абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$. Докажем, что она имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a\,,\,b]$. Найдем такое $\delta > 0$, что

$$(\sum_i (b_i - a_i) < \delta) \Rightarrow (\sum_i |f(a_i) - f(b_i)| < 1).$$

Пусть

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

-произвольное разбиение. Без ограничения общности будем считать, что

$$\forall i : x_{i+1} - x_i < \delta.$$

Определим последовательность $j(k)$ по правилу:

$$j(0) = 0\,,\; j(k+1) = \max\{j \mid \sum_{j(k) \le i < j} (x_{i+1} - x_i) < \delta\}.$$

Имеем:

$$\sum_{0 \le j < n} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| = \sum_{0 \le k < N} (\sum_{j(k) \le i < j(k+1)} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|)$$
$$< (N+1)\,,\; N = [(b-a)/\delta].$$

Так как это неравенство справедливо для любого разбиения, то теорема доказана.

Выше мы привели пример непрерывной функции с неогрниченной вариацией. Следовательно, существуют непрерывные, но не абсолютно непрерывные функции. Функция Кантора есть пример функции с ограниченным изменением, но не абсолютно непрерывной.

Теорема 1.2.14. *Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$, то функция*

$$x \mapsto V(f)_a^x$$

абсолютно непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$.

Доказательство. Пусть дано $\epsilon > 0$. Найдем такое $\delta(\epsilon) > 0$, что

$$(\sum_i (b_i - a_i) < \delta(\epsilon)) \Rightarrow (\sum_i |f(a_i) - f(b_i)| < \epsilon).$$

Для каждого отрезка $[a_i\,,\, b_i]$ найдем такое разбиение

$$T_i = \{a_i = x_{i\,,0} < x_{i\,,1} < \ldots < x_{i\,,n(i)} = b_i\},$$

что

$$V(f)_{a_i}^{b_i} \leq \sum_{0 \leq j < n(i)} |f(x_{i\,,j+1}) - f(x_{i\,,j})| + 2^{-i}\epsilon.$$

Так как интервалы $(x_{i\,,j+1}\,,\, x_{i\,,j})$ не пересекаются и

$$\sum_{i\,,j} (x_{i\,,j+1} - x_{i\,,j}) < \delta(\epsilon)$$

то

$$\sum_i V(f)_{a_i}^{b_i} \leq \sum_{i\,,j} |f(x_{i\,,j+1}) - f(x_{i\,,j})| + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

Так как отрезки $[a_i\,,\, b_i]$ произвольны, то теорема доказана.

Следствие 1.2.3. *Любая абсолютно непрерывная функция есть разность двух неубывающих абсолютно непрерывных функций:*

$$f(x) = V(f)_a^x - (V(f)_a^x - f(x)).$$

Напомним определение интеграла Лебега-Сильтьеса. Пусть $F(x)$ - неубывающая непрерывная справа ограниченная функция на отрезке $[a\,,\, b] \subset \mathbb{R}^1$, $F(b) < \infty$, $F(a) = 0$, и пусть $f(x)$ -непрерывна на отрезке $[a\,,\, b]$, а $T = \{a = x_0 < x_1, \ldots < x_n = b\}$ -разбиение отрезка $[a\,,\, b]$. Составим интегральную сумму

$$S(T\,,\, f) = \sum_{0 \leq j < n} f(\xi_j)(F(x_{j+1}) - F(x_j))\;,\; \xi_j \in (x_{j+1}\,,\, x_j).$$

Предел таких сумм при стремлении диаметра разбиений к нулю называется интегралом Римана-Стильтьеса:

$$\lim_{\mathrm{diam} T \to 0} S(T\,,\, f) := \int_a^b f(x) dF(x).$$

Теперь рассмотрим пространство $C([a\,,\,b])$ всех непрерывных функций на отрезке $[a\,,\,b]$ как пространство элементарных функций в схеме Даниэля и интеграл Римана-Стильтьеса как элементарный интеграл и построим расширение этого интеграла. Полученный интеграл называется интегралом Лебега-Стильтьеса и мы будем обозначать его тем же символом, что и интеграл Римана-Стильтеса. Если характеристическая функция множества $A \subset [a\,,\,b]$ интегрируема, то число

$$\mu(F \mid A) := \int \mathbb{I}(A \mid x) dF(x)$$

называется мерой, порожденной монотонной функцией $F(x)$. Если $F(x) \equiv x$, то интеграл называется интегралом Лебега, а мера

$$|A| := \int_a^b \mathbb{I}(A \mid x) dx.$$

-мерой Лебега.Пусть $\{x(j)\}$ -множество точек разрыва функции $F(x)$:

$$x(j)\colon F(x(j)+0) - F(x(j)-0) > 0.$$

Множество $\{x(j)\}$ не более чем счетно. Определим функцию

$$F_d(x) := \sum_{x(j)<x} F(x(j)+0) - F(x(j)-0).$$

Пусть

$$F_c(x) := F(x) - F_d(x).$$

Функция $F_c(x)$ непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$ и монотонно не убывает. Следовательно, она порждает интеграл и меру $\lambda(F_c \mid \cdot)$ на борелевских множествах отрезка $[a\,,\,b]$, причем

$$\forall (\alpha\,,\,\beta) \subset [a\,,\,b] : \lambda(F_c \mid (\alpha\,,\,\beta)) = F_c(\beta) - F_c(\alpha).$$

К мере $\lambda(F_c \mid \cdot)$ и мере Лебега на отрезке $[a\,,\,b]$ можно применить разложение Лебега, а к абсолютно непрерывной части меры $\lambda(F_c \mid \cdot)$ можно применить теорему Радона-Никодима. Так мы получим следующее утверждение.

Теорема 1.2.15. *Монотонно неубывающую непрерывную справа неотрицательную функцию $F(x)$ на отрезке $[a\,,\,b]$ можно представить как сумму трех функций:*

$$F(x) = F_{ac}(x) + F_{sing}(x) + F_d(x), \tag{1.189}$$

где
$$F_d(x) := \sum_{x(j)<x} F(x(j)+0) - F(x(j)-0).$$
-функция скачков, а
$$F_{ac}(x) = \int_a^x \omega(t)\,dt\ ,\ F_{sing}(x) = \lambda([a\,,\,x)\bigcap B), \tag{1.190}$$
где $\omega(t)$ -неотрицательная интегрируемая по Лебегу функция, λ борелевская мера на отрезке $[a\,,\,b]$, B -множество лебеговой меры ноль.

Заметим, что для функции Кантора отлична от нуля только составляющая F_{sing}.

Разложение (1.189) также называется разложением Лебега .

Очевидно, что мера, порожденная неубывающей функцией $F(x)$ на отрезке $[a\,,\,b]$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега в том и только том случае, если
$$F_d = F_{sing} \equiv 0 \text{ и } F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt\ ,\ f(t) \in L([a\,,\,b]).$$

Теорема 1.2.16. *Если функция f интегрируема: $f \in L([a\,,\,b])$, то для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta(\epsilon) > 0$, что для любого множества A, мера которого меньше $\delta(\epsilon)$, выполнено неравенство*
$$\int_A |f(x)|dx < \epsilon. \tag{1.191}$$

Доказательство. Согласно лемме 1.1.12 (см. стр. 28) для данного $\epsilon > 0$ и данной функции $f \in L([a\,,\,b])$ существует такая непрерывная функция $\phi \in C([a\,,\,b])$, что
$$\int_a^b |f(x) - \phi(x)|dx < \epsilon/2.$$
Пусть
$$M = \sup\{|\phi(x)| \mid x \in [a\,,\,b]\}.$$
Тогда (напомним, что $|A|$ -это мера Лебега множества A)
$$\forall(|A| < \epsilon/2M) : \int_A |f(x)|dx < \int_A |f(x) - \phi(x)|dx + \int_A |\phi(x)|dx <$$
$$\epsilon/2 + M|A| < \epsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.2.4. *Если $f(t) \in L([a\,,\,b])$, то функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

абсолютно непрерывна на отрезке $[a\,,\,b]$.

Для любого множества $E \subset [a\,,\,b]$ можно определить внешнюю меру:

$$|E|_{out} = \inf\{|A| \mid E \subset A\}.$$

Если множество E измеримо по Лебегу, то его внешняя мера равна мере Лебега. Отметим очевидное неравенство

$$|A \bigcup B|_{out} \leq |A|_{out} + |B|_{out}.$$

Определение 1.2.21. Система отрезков

$$S_0 = \{I_\alpha \mid I_\alpha = [a_\alpha\,,\,b_\alpha] \subset [a\,,\,b]\}$$

покрывает в смысле Витали множество $E \subset [a\,,\,b]$, если выполнены условия:

1. $E \subset \bigcup\limits_\alpha I_\alpha\ ,\ \forall\alpha : E \bigcap I_\alpha \neq \emptyset.$
2. $\forall(x \in E\ ,\ \epsilon > 0)\ ,\ \exists(I(x\,,\,\epsilon) \in S_0) : x \in I(x\,,\,\epsilon)\ ,\ 0 < |I(x\,,\,\epsilon)| < \epsilon.$

Теорема 1.2.17. *Если система отрезков S_0 покрывает в смысле Витали множество E, то она содержит такую не более чем счетную подсистему*

$$\{I_j \mid 1 \leq j < \infty\} \subset S_0,$$

которая удвлетворяет условиям:

1. Отрезки I_j не пересекаются:

$$\forall(j \neq i) : I_j \bigcap I_i = \emptyset.$$

2. Выполнено соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} |E \setminus \bigcup_{1\leq j\leq n} I_j|_{out} = 0.$$

Доказательство. Пусть

$$a_0 = \sup\{|I_\alpha| \mid I_\alpha \in S_0\}.$$

По определению точной верхней грани система S_0 содержит такой отрезок I_1, который удовлетворяет условию:

$$|I_1| > \frac{1}{2} a_0.$$

Положим

$$S_1 = \{I_\alpha \mid I_\alpha \bigcap I_1 = \emptyset\}$$

Пусть

$$a_1 = \sup\{|I_\alpha| \mid I_\alpha \in S_1\}.$$

По определению точной верхней грани система S_1 содержит такой отрезок I_2 , $I_2 \bigcap I_1 = \emptyset$, который удовлетворяет условию:

$$|I_2| > \frac{1}{2} a_1.$$

Положим

$$S_2 = \{I_\alpha \mid I_\alpha \bigcap I_2 = \emptyset\}$$

и продолжим этот процесс по индукции. Так мы получим, что либо на некоторм шаге

$$E \subset \bigcup_{1 \le j \le n} I_j \, , \, I_j \bigcap I_i = \emptyset,$$

либо мы получим счетное множество отрезков $\{I_j \mid 1 \le j < \infty\}$ и счетное множество $\{S_j \mid 1 \le j < \infty\}$ подсемейств семейства S_0, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{gathered} \forall (j \ge 0): \; S_{j+1} \subset S_j \, , \, I_{j+1} \in S_j \, , \, I_{j+1} \notin S_{j+1}, \\ \forall (i \neq j): I_j \bigcap I_i = \emptyset \, , \, |I_{j+1}| > \frac{1}{2} \sup\{|I_\alpha| \mid I_\alpha \in S_j\} \end{gathered} \tag{1.192}$$

Пусть

$$x \in E \setminus \bigcup_{1 \le j \le n} I_j.$$

Если

$$\epsilon < \operatorname{dist}(x \, , \bigcup_{1 \le j \le n} I_j),$$

то по условию

$$\exists(I(x\,,\,\epsilon)) : x \in I(x\,,\,\epsilon)\;,\; I(x\,,\,\epsilon) \bigcap \bigcup_{1\le j\le n} I_j = \emptyset.$$

Так как отрезки I_j не пересекаются, то

$$\sum_{1\le j<\infty} |I_j| \le b-a$$

поэтому

$$\lim_{j\to\infty} |I_j| = 0.$$

Но отсюда в силу (1.192) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|I_\alpha| \mid I_\alpha \in S_n\} = 0.$$

Следовательно,

$$\exists(m>n) : I(x\,,\,\epsilon) \in S_{m-1}\;,\; I(x\,,\,\epsilon) \notin S_m.$$

Это соотношение выполнено только в том случае, если

$$I(x\,,\,\epsilon) \bigcap I_m \ne \emptyset\;,\; 2|I_m| > |I(x\,,\,\epsilon)|. \tag{1.193}$$

Каждому отрезку $I_j = [\alpha_j\,,\,\beta_j]$ поставим в соответствие отрезок $T_j = [3\alpha_j - 2\beta_j\,,\,3\beta_j - 2\alpha_j] \supset [\alpha_j\,,\,\beta_j]$. Вообще говоря, $T_j \notin S_0$. Из (1.193) следует, что

$$I(x\,,\,\epsilon) \subset T_m.$$

Следовательно,

$$E \setminus \bigcup_{1\le j\le n} I_j \subset \bigcup_{m>n} T_m,$$

поэтому

$$|E \setminus \bigcup_{1\le j\le n} I_j|_{out} \le \sum_{m>n} |T_m| = 5\sum_{m>n} |I_m| \to 0\;,\; n\to\infty.$$

Теорема доказана.

Так как

$$|E|_{out} \le |E \setminus \bigcup_{1\le j\le n} I_j|_{out} + \sum_{1\le j\le n} |I_j|,$$

то из теоремы 1.2.17 вытекает

Следствие 1.2.5. *Если выполнены условия теоремы 1.2.17, то найдутся такие удовлетворяющие условиям теоремы 1.2.17 отрезки I_j, что*

$$\forall(\epsilon > 0)\,,\, \exists n(\epsilon) : (1-\epsilon)|E|_{out} < \sum_{1 \le j \le n(\epsilon)} |I_j|.$$

Пусть

$$f \in L([a\,,\,b])\,,\, F(x) := \int_a^x f(t)dt,$$
$$\forall(x \in (a\,,\,b)) : \; M(f \mid x) := \limsup_{h \to 0} |h^{-1}(F(x+h) - F(x))| \tag{1.194}$$

Теорема 1.2.18. *Множество*

$$E(f \mid \alpha) := \{x \mid M(f \mid x) > \alpha\}$$

измеримо и

$$|E(f \mid \alpha)| < \frac{2}{\alpha} \int_a^b |f(x)dx. \tag{1.195}$$

Доказательство. Положим

$$A(m\,,\,n\,,\,\alpha) = \bigcup_{0 \le h \le 1/n} \{x \mid |h^{-1}(F(x+h) - F(x))| > \alpha + 1/m\}.$$

Так как функция

$$x \mapsto |h^{-1}(F(x+h) - F(x))|$$

непрерывна, множество $A(m\,,\,n\,,\,\alpha)$ есть объединение открытых множеств и открыто. Поэтому множество

$$E(f \mid \alpha) = \bigcup_{m>0} \bigcap_{n>0} A(m\,,\,n\,,\,\alpha)$$

борелевское и, следовательно, измеримо.

Если

$$x \in E(f \mid \alpha),$$

то существует такая последовательность $\{h_j(x) \mid 1 \le j < \infty\}$, что

$$x + h_j(x) \in (a\,,\,b)\,,\, \forall j : \; |h_j^{-1}(x)(F(x + h_j(x)) - F(x))| > \alpha.$$

Следовательно, отрезки

$$I_j(x) = \{[x - |h_j(x)|\,,\, x + |h_j(x)|] \mid x \in (a\,,\,b)\,,\; 1 \le j < \infty\}$$

покрывают в смысле Витали множество $E(f \mid \alpha)$. Пусть $\{I_j(x_j) \mid 1 \leq j \leq n(\epsilon)\}$ -такие отрезки из этого покрытия, что

$$(1-\epsilon)|E(f \mid \alpha) < \sum_{1\leq j\leq n(\epsilon)} |I_j(x_j)| = 2 \sum_{1\leq j\leq n(\epsilon)} |h_j(x_j)|.$$

Так как отрезки $I_j(x_j)$ не пересекаются, то

$$\int_a^b |f(t)|dt \geq \sum_{1\leq j\leq n(\epsilon)} |F(x_j + h_j(x_j)) - F(x_j)| \geq \alpha \sum_{1\leq j\leq n(\epsilon)} |h_j(x_j)|.$$

Следовательно,

$$2\int_a^b |f(t)|dt > (1-\epsilon)\alpha|E(f \mid \alpha).$$

Так как ϵ произвольное малое положителельное число, то теорема доказана.

Теорема 1.2.19. *Если* $f \in L([a\,,\,b])$ *и*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt,$$

то функция F *почти всюду дифференцируема и*

$$\text{п.в.}: \ \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Доказательство. Будем считать, что

$$\int_a^b |f(t)|dt = 1.$$

Из леммы 1.1.12 следует, что существует такая последовательность непрерывных функций $\{\phi_n\} \subset C([a\,,\,b])$,что

$$\forall n: \ \int_a^b |f(t) - \phi_n(t)|dt < n^{-4}.$$

Положим

$$\begin{aligned}
&\psi_n(x) = f(x) - \phi_n(x),\\
&A_n = \{x \mid M(\psi_n \mid x) > n^{-2}\},\\
&B_n = \{x \mid |\psi_n(x)| > n^{-2}\}.
\end{aligned}$$

Из теоремы 1.2.18 следует, что множество A_n измеримо и

$$|A_n| < n^2 2\int_a^b |\psi_n(t)|dt < 2n^{-2}.$$

Из неравенства Чебышева (см. стр. 66) следует, что

$$|B_n| < n^2\int_a^b |\psi_n(t)|dt < n^{-2}.$$

Положим

$$Q := \bigcap_{1\le k<\infty}\ \bigcup_{k\le n<\infty}(A_n\bigcup B_n).$$

Множество Q измеримо и

$$\forall k:\ |Q| \le |\bigcup_{k\le n<\infty}(A_n\bigcup B_n)| < \sum_{k\le n<\infty}(|A_n|+|B_n|) <$$
$$O(1/k)\to 0\,,\ k\to\infty.$$

Следовательно, $|Q| = 0$.

Пусть

$$x\in E = [a\,,\,b]\setminus Q.$$

Тогда

$$\exists k: x\notin \bigcup_{k\le n<\infty}(A_n\bigcup B_n). \tag{1.196}$$

Имеем:

$$(\forall(n\ge k):\ x\notin A_n) \Rightarrow (\forall(n\ge k):\ \limsup_{h\to 0}|h^{-1}\int_x^{x+h}\psi_n(t)dt| \le n^{-2}).$$

Следовательно,

$$\forall(n\ge k\,,\,\epsilon>0)\ ,\ \exists\delta_1(n\,,\,\epsilon)\,,\,\forall(0<h<\delta_1(n\,,\,\epsilon)):$$
$$|h^{-1}\int_x^{x+h}\psi_n(t)dt| < n^{-2}. \tag{1.197}$$

Заметим, что из (1.196) следует, что

$$\forall(n\ge k):\ x\notin B_n,$$

поэтому

$$\forall(n\ge k)\,,\ :\ |\psi_n(x)| \le n^{-2}, \tag{1.198}$$

Наконец заметим, что так как функции $\phi_n(x)$ непрерывны, то

$$\forall(n\,,\,\epsilon\,,\,x)\,,\,\exists\delta_2(n\,,\,\epsilon\,,\,x)\,,\,\forall(0<|h|<\delta_2(n\,,\,\epsilon\,,\,x)):$$
$$|h^{-1}\int_x^{x+h}\phi_n(t)dt-\phi_n(x)|\leq\epsilon. \tag{1.199}$$

Имеем:

$$|h^{-1}(F(x+h)-F(x))-f(x)|=|h^{-1}\int_x^{x+h}f(t)dt-f(x)|\leq$$
$$|h^{-1}\int_x^{x+h}\psi_n(t)dt|+|h^{-1}\int_x^{x+h}\phi_n(t)dt-\phi_n(x)|+$$
$$|\phi_n(x)-f(x)|<n^{-2}+\epsilon+n^{-2},$$

если

$$0<|h|<\min(\delta_1(n\,,\,\epsilon)\,,\,\delta_2(n\,,\,\epsilon\,,\,x)).$$

Так как n -произвольное достаточно большое число, а ϵ -произвольное достаточно малое число, то теорема доказана.

Следствие 1.2.6. *Абсолютно непрерывная функция дифференцируема почти всюду.*

1.3 Коментарии и литературные указания.

Мы предполагаем, что читатель знаком с теорией множеств в объеме курса анализа для технических вузов или нескольких первых глав книг [1, 2]. Для дальнейшего ознакомления с теорией множеств можно рекомендовать книгу [3].

Для большинства рассматриваемых нами приложений достаточно знания следующих тем: определение интеграла, теорема Лебега о предельном переходе в интеграле , теорема Рисса-Фишера о полноте пространства L^p, неравенства Гельдера и Минковского. Эти темы изложены в параграфе, посвященном интегралу Лебега. Изучением этого параграфа можно ограничиться при первом чтении. Однако знание теории меры необходимо для изучения математических моделей теории рассеяния, теории теплового равновесия классических и квантовых систем, теории неравновесных квантовых систем, броуновского движения и многих других задач математической физики, поэтому мы считаем, что знакомство с основами теории меры желательно для специалиста по математической физике.

Анализ метода Даниэля в теории интеграла есть в [5], стр. 459-461. При обсуждении затронутых нами элементарных вопросов теории интеграла нет принципиальной разницы между методом Даниэля, когда сначала вводится интеграл, а потом мера, и традиционным методом, когда сначала вводится мера, а потом интеграл. Ясно, что задание системы подмножеств множества X эквивалентно заданию характеристических функций этих подмножеств, а задание меры на системе подмножеств эквивалентно заданию элементарного интеграла на множестве характеристических функций.

Понятие интеграла распространяется на функции со значениями в банаховом пространстве.

Пусть Ω -компактное топологическое пространство, B -рефлексивное банахово пространство,

$$x\colon\ \Omega \ni \omega \mapsto x(\omega) \in B$$

-непрерывная функция со значениями в B. Если $f^\star \in B^\star$, то функция

$$\Omega \ni \omega \mapsto f^\star(x(\omega))$$

непрерывна на Ω, и определен интеграл

$$\int f^\star(x(\omega))\mu(d\omega).$$

При фиксированной функции $x(\omega) \in C(\Omega)$ отображение

$$B^\star \ni f^\star \mapsto \int f^\star(x(\omega))\mu(d\omega)$$

есть линейный непрерывный функционал на $B^\star$, и в силу рефлексивности B существует такой элемент $J(x) \in B$, что

$$\forall (f^\star):\ f^\star(J(x)) = \int f^\star(x(\omega))\mu(d\omega). \tag{1.200}$$

Если выполнено соотношение (1.200), то определению полагаем

$$\int x(\omega)\mu(d\omega) := J(x) \tag{1.201}$$

и называем функционал $J(x)$ интегралом от функции $x(\omega)$.

Заметим, что иногда интеграл можно определить и как предел интегральных сумм Римана.

При рассмотрении интеграла по бесконечной области мы не вводим условие Стоуна (см. [5]), а опираемся на конструкцию, которая является обобщением понятия кратного несобственного интеграла Римана.

Дальнейшие сведения о теории меры и интеграла можно почерпнуть из следующих работ.

[4]-[5]. Эти книги содержат (насколько я могу судить) на сегодняшний день наиболее полное и доступное изложение теории меры и интеграла.

[6] Эта книга почти полвека была настольной книгой всех математиков и по-прежнему является классическим руководством по теории меры.

[7] В этой книге есть изложение теории интеграла и меры по Даниэлю. Наше изложение следует этой книге.

[8] Эта книга содержит краткое и ясное изложение теории меры и интеграла Лебега. В книге показано, как теория меры и интеграла применяется в теории функций действительной переменной.

[9] Это классическое руководство по теории меры и интеграла, которое приспособлено для нужд теории вероятности.

[10]Это просто и понятно написанная книга, которая также приспособлена к нуждам теории вероятности. Наше изложение теоремы Радона-Никодима основано на материалах этой книги.

[11]В этой книге содержатся обобщения теории меры, о которых в нашем изложении мы не смогли даже упомянуть, но которые получили в последнее время широкое применение при анализе стохастических динамических систем (теория фрактальных множеств и т.д.)

Глава 2

Метрические и топологические пространства.

2.1 Метрические пространства.

2.1.1 Расстояние и связанные с ним понятия.

Определение 2.1.1. Расстоянием (метрикой) на множестве M называется определенная на декартовом произведении множеств $M \times M$ функция

$$d\colon M \times M \mapsto \mathbb{R}^1,$$

которая удовлетворяет условиям:

1. Симметрии:

$$\forall (x \in M\,,\, y \in M)\,:\, d(x\,,\, y) = d(y\,,\, x). \tag{2.1}$$

2. Невырожденности:

$$(d(x\,,\, y) = 0) \iff (x = y). \tag{2.2}$$

3. Неравенству треугольника:

$$\forall (x \in M\,,\, y \in M\,,\, z \in M)\,:\, d(x\,,\, y) \leq d(x\,,\, z) + d(z\,,\, y). \tag{2.3}$$

Положив в (2.3) $x = y$, мы получим, что расстояние неотрицательно:

$$\forall (x \in M\,,\, z \in M)\,:\, d(x\,,\, z) \geq 0. \tag{2.4}$$

Определение 2.1.2. Множество вместе с определенным на ним расстоянием (метрикой) называется метрическим пространством.

Пример 2.1.1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ есть метрическое пространство относительно расстояний:

$$d(x\,,\,y) = \left(\sum_{1\le j\le d} |x_j - y_j|^2\right)^{1/2}, \tag{2.5}$$
$$d(x\,,\,y) = \max_{1\le j\le d} |x_j - y_j|\,,\; x = (x_1, \dots x_d)\,,\; y = (y_1, \dots y_d).$$

Определение 2.1.3. В метрическом пространстве множество

$$b(x\,,\,r) = \{y \mid d(x\,,\,y) < r\} \tag{2.6}$$

называется открытым шаром радиуса r с центром в точке x.

Это определение дается по аналогии с (2.5).

Пример 2.1.2. Множество $C([a\,,\,b])$ всех непрерывных на отрезке $[a\,,\,b]$ функций есть метрическое пространство относительно расстояний:

$$d(f\,,\,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in M\}, \tag{2.7}$$
$$d(f\,,\,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx. \tag{2.8}$$

Из неравенства треугольника следует, что

$$d(x\,,\,y) \le d(x\,,\,x_0) + d(x_0\,,\,y_0) + d(y_0\,,\,y),$$

поэтому

$$d(x\,,\,y) - d(x_0\,,\,y_0) \le d(x\,,\,x_0) + d(y\,,\,y_0).$$

Заменив в этом неравенстве

$$x \mapsto x_0\,,\; y \mapsto y_0\,,\; x_0 \mapsto x\,,\; y_0 \mapsto y,$$

мы получим неравенство параллелограмма:

$$|d(x\,,\,y) - d(x_0\,,\,y_0)| \le d(x\,,x_0) + d(y\,,\,y_0). \tag{2.9}$$

Определение 2.1.4. Расстоянием $\mathrm{dist}(A\,,\,B)$ между множествами A и B метрического пространства называется величина

$$\mathrm{dist}(A\,,\,B) := \inf\{d(x\,,\,y) \mid x \in A\,,\, y \in B\}. \tag{2.10}$$

Так как

$$\forall (a \in A) \,:\, \mathrm{dist}(x\,,\, A) \leq d(x\,,\, a) \leq d(x\,,\, y) + d(y\,,\, a),$$

то

$$\mathrm{dist}(x\,,\, A) \leq d(x\,,\, y) + \mathrm{dist}(y\,,\, A),$$

поэтому

$$\forall (x \in M\,,\, y \in M\,,\, A \subset M) \,:\, |\mathrm{dist}(x\,,\, A) - \mathrm{dist}(y\,,\, A)| \leq d(x\,,\, y). \quad (2.11)$$

Неравенство (2.11) можно рассматривать как обобщение неравенства треугольника.

Пусть $(M_1\,,\, d_1)$ и $(M_2\,,\, d_2)$ -два метрических пространства. Взаимно однозначное отображение

$$J\colon M_1 \mapsto M_2\,,\; J(M_1) = M_2$$

называется *метрическим изоморфизмом*, если

$$\forall (x \in M_1\,,\, y \in M_1) \,:\, d_1(x\,,\, y) = d_2(J(x)\,,\, J(y)).$$

Пространства M_1 и M_2 называют метрически изоморфными, если существует метрический изоморфизм, который отображает M_1 на M_2 . Метрически изоморфные пространства обычно отождествляются.

2.1.2 Сходимость в метрическом пространстве.

Определение 2.1.5. Последовательность точек $\{x_n\} \subset M$ метрического пространства $(M\,,\, d)$ сходится к точке $x_0 \in M$, если

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n\,, x_0) = 0. \quad (2.12)$$

Если выполнено условие (2.12), то последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, а точка x_0 называется пределом последовательности $\{x_n\}$.

В метрическом пространстве каждая сходящаяся последовательность имеет только один предел, так как если

$$d(x_n\,,\, x_0) \to 0\,,\, d(x_n\,,\, x_0') \to 0\,,\, n \to \infty,$$

то

$$d(x_0\,,\, x_0') \leq d(x_n\,,\, x_0) + d(x_n\,,\, x_0') \to 0\,,\, n \to \infty,$$

поэтому

$$d(x_0\,,\, x_0') = 0\,,\text{ и } x_0 = x_0'.$$

Определение 2.1.6. Последовательность точек $\{x_n\} \subset M$ метрического пространства $(M\,,\,d)$ удовлетворяет условию Коши (по другой терминологии: является последовательностью Коши или является фундаментальной последовательностью), если

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{d(x_n\,,\,x_{n+m}) \mid m>0\} = 0. \tag{2.13}$$

Если последовательность точек $\{x_n\} \subset M$ метрического пространства $(M\,,\,d)$ сходится, то она удовлетворяет условию Коши, так как

$$\forall (n > N(\epsilon))\colon\ d(x_n\,,\,x_{n+m}) \le d(x_n\,,\,x_0) + d(x_{n+m}\,,\,x_0) < \epsilon.$$

Однако не во всяком метрическом пространстве любая последовательность Коши сходится, т.е. имеет предел. Примеры метрических пространств, в которых последовательность Коши может не иметь предела: множество рациональных чисел с обычной метрикой, рассмотренное в 2.1.2 пространство непрерывных на отрезке $[a\,,\,b]$ функций $C([a\,,\,b])$ в метрике (2.8).

Метрики d и $\widetilde{d}$ на метрическом пространстве M *эквивалентны*, если

$$\forall\,(\{x_n\} \subset M):$$
$$(\lim_{n\to\infty} \sup\{d(x_n\,,\,x_{n+m}) \mid m>0\} = 0) \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} \sup\{\widetilde{d}(x_n\,,\,x_{n+m}) \mid m>0\} = 0).$$

Эквивалентные метрики часто не различают.

Определение 2.1.7. Метрическое пространство называется полным, если в нем любая последовательность Коши (фундаментальная последовательность) имеет предел.

Примеры полных метрических пространств: пространство $\mathbb{R}^d$ с обычной метрикой, рассмотренное в 2.1.2 пространство непрерывных на отрезке $[a\,,\,b]$ функций $C([a\,,\,b])$ в метрике (2.7).

Определение 2.1.8. Метрическое пространство $(\widetilde{M}\,,\,\widetilde{d})$ называется пополнением метрического пространства $(M\,,\,d)$, если:

1.$(\widetilde{M}\,,\,\widetilde{d})$ -полное метрическое пространство.

2. Существует изометрическое вложение J пространства M в пространство $\widetilde{M}$, т.е. такое отображение

$$J\colon M \mapsto \widetilde{M}$$

метрического пространства $(M\,,\,d)$ в метрическое пространство $(\widetilde{M}\,,\,\widetilde{d})$, которое удовлетворяет условию

$$\forall (x\,,\,y \in M)\,:\, d(x\,,\,y) = \widetilde{d}(J(x)\,,\,J(y)).$$

3. Это изометрическое вложение J удовлетворяет условию: для любого элемента $\xi \in \widetilde{M}$ существует такая последовательность $\{x_n\} \subset M$, что

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(\xi\,,\,J(x_n)) = 0. \tag{2.14}$$

Теорема 2.1.1. *1. Любое метрическое пространство имеет пополнение.*

2. Любые два пополнения данного метрического пространства метрически изоморфны.

Доказательство.Пусть M_0 -множество всех последовательностей Коши пространства M : $\{x_n\} \in M_0$, если последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию (2.13). Установим в M_0 соотношение эквивалентности:

$$(\lim_{n\to\infty} d(x_n\,,\,x'_n) = 0) \Leftrightarrow (\{x_n\} \sim \{x'_n\}). \tag{2.15}$$

Симметричность соотношения (2.15) очевидна.

Из неравенства треугольника следует, что

$$d(x'_n\,,\,x''_n) \le d(x_n\,,\,x'_n) + d(x_n\,,\,x''_n),$$

поэтому если

$$\{x_n\} \sim \{x'_n\}\,,\, \{x_n\} \sim \{x''_n\}\,, \text{ то } \{x'_n\} \sim \{x''_n\},$$

откуда следует транзитивность соотношения (2.15). Поэтому (2.15) действительно устанавливает соотношение эквивалентности. Пусть $\widetilde{M}$ -множество всех классов эквивалентности по соотношению (2.15). Класс эквивалентности, который содержит последовательность $\{x_n\}$, мы обозначим символом $[x_n]$. Этот класс эквивалентности есть точка пространства $\widetilde{M}$. Определим в множестве $\widetilde{M}$ расстояние $\widetilde{d}$, положив по определению

$$\widetilde{d}([x_n]\,,\,[y_n]) := \lim_{n\to\infty} d(x_n\,,\,y_n). \tag{2.16}$$

Предел в (2.16) существует для любых последовательностей Коши $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ в M, так как в силу неравенства (2.9)

$$|d(x_n\,,\,y_n) - d(x_m\,,\,y_m)| \le d(x_n\,,\,x_m) + d(y_n\,,\,y_m).$$

Докажем, что формула (2.16) корректно определяет расстояние в $\widetilde{M}$, т.е. что правая часть (2.16) зависит только от класса эквивалентности последовательности $\{x_n\}$ и что выполнено условие невырождености расстояния (2.2). Если

$$\widetilde{d}([x_n]\,,\,[y_n]) = 0,$$

то в силу определений (2.15) и (2.16) это означает, что

$$\{x_n\} \sim \{y_n\},$$

поэтому

$$[x_n] = [y_n],$$

Симметрия расстояния (2.16) и неравенство треугольника проверяются тривиально.

Построим отображение

$$J \colon M \mapsto \widetilde{M},$$

поставив в соответствие точке $x \in M$ тот класс эквивалентности $[x] \in \widetilde{M}$, который содержит стационарную последовательность $\{x_n \mid x_n \equiv x\}$. Ясно, что так определенное отображение есть изометрическое вложенение. Покажем, что оно удовлетворяет условию (2.14).

Пусть $\xi = [x_n] \in \widetilde{M}$. Так как $\{x_n\}$ -последовательность Коши в M, то

$$\forall(\epsilon > 0)\,,\, \exists n(\epsilon)\,,\; \forall(n \geq n(\epsilon))\,:\, \sup\{d(x_n\,,\, x_{n+m}) \mid m > 0\} < \epsilon.$$

Ясно, что

$$\widetilde{d}(\xi\,,\, J(x_{n(\epsilon)}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n\,,\, x_{n(\epsilon)}) < \epsilon.$$

Теперь докажем, что $\widetilde{M}$ -полное пространство. Пусть $\{\xi_n\}$ -последовательность Коши в метрике $\widetilde{d}$. Пусть x_n -такой элемент пространства M, который удовлетворяет условию

$$\widetilde{d}(\xi_n\,,\, J(x_n)) < 2^{-n}. \tag{2.17}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&d(x_n\,,\, x_{n+m}) = \widetilde{d}(J(x_n)\,,\, J(x_{n+m})) \leq \\
&\widetilde{d}(\xi_n\,,\, J(x_n)) + \widetilde{d}(\xi_{n+m}\,,\, \xi_n) + \widetilde{d}(\xi_{n+m}\,,\, J(x_{n+m})) \\
&\leq 2^{-n} + 2^{-(n+m)} + \widetilde{d}(\xi_{n+m}\,,\, \xi_n).
\end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (2.17) сопоставляет каждой последовательности Коши $\{\xi_n\}$ в пространстве $\widetilde{M}$ последовательность Коши $\{x_n\}$ в пространстве M. Обозначим символом ξ_0 тот класс эквивалентности, которому принадлежит определяемая по (2.17) последовательность Коши $\{x_n\} \subset M$. Докажем, что элемент ξ_0 есть предел последовательности ξ_n в пространстве $\widetilde{M}$.

Воспользовавшись неравенством (2.17) и тем фактом, что последовательность $\{x_n\}$ есть последовательность Коши в M, мы получаем неравенство

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(\xi_n\,,\,\xi_0) &\leq \widetilde{d}(\xi_n\,,\,J(x_n)) + \widetilde{d}(J(x_n)\,,\,\xi_0)\\ &\leq 2^{-n} + \lim_{m\to\infty} d(x_n\,,\,x_m) < 2^{-n} + \epsilon,\end{aligned}$$

если только $n > N(\epsilon)$. Итак, элемент ξ_0 есть предел последовательности $\{\xi_n\}$ и полнота пространства $\widetilde{M}$ доказана.

Теперь докажем единственность пополнения. Пусть $(M_1\,,\,d_1)$ -произвольное пополнение пространства $(M\,,\,d)$ и J_1 -удовлетворяющее условию (2.14) вложение пространства M_1 в пространство M. Для каждого элемента $z \in M_1$ в пространстве M существует такая последовательность $\{x_n\}$, что

$$d_1(z\,,\,J_1(x_n)) \to 0\,,\, n \to \infty. \tag{2.18}$$

Если последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию (2.18), то она есть последовательность Коши в M, так как в силу изометричности вложения J_1

$$\begin{aligned}&\sup\{d(x_n\,,\,x_{n+m}) \mid m > 0\} = \sup\{d_1(J_1(x_n)\,,\,J_1(x_{n+m}) \mid m > 0\})\\ &\to 0\,,\, n \to \infty.\end{aligned}$$

Если последовательность $\{x'_n\}$ также удовлетворяет условию (2.18), то

$$d(x_n\,,\,x'_n) = d_1(J_1(x_n)\,,\,J_1(x'_n)) \to 0\,,\, n \to \infty, \tag{2.19}$$

поэтому условие (2.18) устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространством M_1 и классами эквивалентности по соотношению (2.15) и тем определяет взаимно однозначное отображение пространства M_1 на пространство $\widetilde{M}$. Легко видеть, что это отображение изометрично. Теорема доказана.

В дальнейшем, иногда не оговаривая это специально, мы будем считать все метрические пространства полными, так всегда мы можем предполагать, что уже перешли к пополнению рассматриваемого пространства.

2.1.3 Принцип сжимающих отображений.

Определение 2.1.9. Отображение

$$A\colon M \to M \tag{2.20}$$

метрического пространства в себя называется строго сжимающим, если существует такая константа $\alpha < 1$, что

$$\forall(x \in M\,,\, y \in M)\,:\, d(A(x)\,,\, A(y)) \leq \alpha d(x\,,\, y). \tag{2.21}$$

Замечание. Раньше удовлетворяющие условию (2.21) отображения назывались сжимающими. Теперь в некоторых работах сжимающими отображениями называются такие отображения, которые удовлетворяют условию (2.21) при $\alpha \leq 1$.

Определение 2.1.10. Точка $x_0 \in M$ называется неподвижной точкой отображения (2.20), если

$$x_0 = A(x_0). \tag{2.22}$$

Теорема 2.1.2. *Строго сжимающее отображение в полном метрическом пространстве имеет неподвижную точку и эта неподвижная точка единственна.*

Доказательство. Сначала докажем существование неподвижной точки. Пусть x_1 -произвольный элемент пространства M. Построим последовательность $\{x_n\}$ по правилу

$$x_{n+1} = A(x_n). \tag{2.23}$$

По индукции легко доказывается, что при $n \geq 1$ справедлива оценка

$$d(x_{n+1}\,,\, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(A(x_1)\,,\, x_1),$$

из которой следует, что

$$\begin{aligned} &d(x_{n+m}\,,\, x_n) \leq d(x_{n+m}\,,\, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}\,,\, x_{n+m-2}) + \ldots \\ &\leq \alpha^{n-1}(1 + \ldots + \alpha^{m-1}) d(A(x_1)\,,\, x_1) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{(1-\alpha)} d(A(x_1)\,,\, x_1). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Из этой оценки следует, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и поэтому имеет предел. Положим по определению

$$x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Справедлива оценка

$$d(A(x_n)\,,\, A(x_0)) \leq d(x_n\,,\, x_0) \to 0\,,\, n \to \infty,$$

поэтому переходя к пределу в (2.23), мы получим равенство (2.22). Если x_0' также удовлетворяет уравнению (2.22), то

$$d(x_0\,,\,x_0') = d(A(x_0)\,,\,A(x_0')) \le \alpha d(x_0\,,\,x_0'),$$

откуда следует, что

$$d(x_0\,,\,x_0') = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Алгоритм (2.23) называется методом последовательных приближений и часто используется на практике. Переходя к пределу $m \to \infty$ в (2.24), мы получаем оценку

$$d(x_n\,,\,x_0) \le const.\alpha^n,$$

из которой следует, что метод последовательных приближений сходится экспоненциально.

Рассмотрим пример. Пусть $K(x\,,\,y\,,\,z)$ -определенная на множестве $[a\,,\,b] \times [a\,,\,b] \times \mathbb{R}^1$ функция, которая удовлетворяет условиям:

1. $K(x\,,\; y\,,\,z) \in C([a\,,\,b] \times [a\,,\,b] \times \mathbb{R}^1)$,
2. $\partial_z K(x\,,\,y\,,\,z) \in C([a\,,\,b] \times [a\,,\,b] \times \mathbb{R}^1)$,
2. $\sup\{(|K(x\,,\,y\,,\,z)| + |\partial_z K(x\,,\,y\,,\,z)| \mid x\,,\,y\,,\,z \in \mathbb{R}^1\} = const. < \infty$.

Пусть $z_0(x) \in C([a\,,\,b])$ -заданная функция. Рассмотрим интегральное уравнение относительно неизвестной функции $z(x)$:

$$z(x) = z_0(x) + \mu \int_a^b K(x\,,\,y\,,\,z(y))\,dy. \tag{2.25}$$

Для доказательства существования решения уравнения (2.25) в пространстве $C([a\,,\,b])$ с метрикой (2.7) рассмотрим оператор

$$A(z)(x) = z_0(x) + \mu \int_a^b K(x\,,\,y\,,\,z(y))\,dy. \tag{2.26}$$

Этот оператор корректно определен, так как при $z(x) \in C([a\,,\,b])$ правая часть (2.26) принадлежит пространству $C([a\,,\,b])$. Далее имеем оценку

$$\begin{aligned}
&d(A(z_1)\,,\,A(z_2))\\
&\le |\mu| \sup\{\int_a^b |K(x\,,\,y\,,\,z_1(y)) - K(x\,,\,y\,,\,z_2(y))|\,dy \mid x \in [a\,,\,b]\}\\
&\le const.|\mu||b-a|d(z_1\,,\,z_2),
\end{aligned}$$

из которой следует, что при $const.|\mu||b-a| < 1$ оператор (2.26) является строго сжимающим и поэтому уравнение (2.25) имеет единственное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений.

2.2 Топологические пространства.

2.2.1 Определение топологического пространства.

Определение 2.2.1. Топология на множестве X -это такая система $\mathcal{T}$ подмножеств множества X, которая удовлетворяет условиям:

1. Пустое множество и все пространство принадлежат системе $\mathcal{T}$:

$$\emptyset \in \mathcal{T}\ ,\ X \in \mathcal{T}.$$

2. Любое объединение множеств из системы $\mathcal{T}$ принадлежит системе $\mathcal{T}$:

$$A_\alpha \in \mathcal{T} :\ \bigcup_\alpha A_\alpha \in \mathcal{T}.$$

3. Пересечение любого конечного числа множеств из системы $\mathcal{T}$ принадлежит системе $\mathcal{T}$:

$$A_j \in \mathcal{T} :\ \bigcap_{1\le j\le N} A_j \in \mathcal{T}. \tag{2.27}$$

Ясно, что в (2.27) было бы достаточно потребовать, чтобы пересечение любых двух множеств из системы $\mathcal{T}$ принадлежало бы системе $\mathcal{T}$.

Определение 2.2.2. Множества, которые принадлежат системе $\mathcal{T}$, называются открытыми множествами в топологии $\mathcal{T}$ (или открытыми множествами топологии $\mathcal{T}$).

Множество X вместе с определенной на нем топологией $\mathcal{T}$ называется топологическим пространством. Говорят также, что система множеств $\mathcal{T}$ определяет топологию на множестве X. Заметим, что топологией называется и наука, которая изучает топологические пространства.

Определение 2.2.3. В топологическом пространстве $(X\ ,\ \mathcal{T})$ множество $B \subset X$ называется окрестностью множества $A \subset X$, если существует такое открытое можество $O \in \mathcal{T}$, что

$$A \subset O \subset B.$$

Открытое множество является окрестностью каждой своей точки.

Дискретной топологией на множестве X называется топология, которая состоит из всех подмножеств множества X. В дискретной топологии открыты все подмножества множества X.

Антидискретной топологией называется топология, которая состоит из двух множеств: $\emptyset$, X. В антидискретной топологии открыты только два множества $\emptyset$, X и других открытых множеств нет.

Определение 2.2.4. Подмножество $A \subset M$ метрического пространства $(M\,,\,d)$ открыто, если либо $A = \emptyset$, либо для любой точки $x_0 \in A$ множества A существует шар $b(x_0\,,\,\epsilon)$ с центром в этой точке, который содержится в A.

Лемма 2.2.1. *Пересечение любых двух открытых в смысле определения* (2.2.4) *множеств открыто.*

Доказательство. Пусть $A_1\,,\,A_2$ открытые в смысле определения (2.2.4) подмножества метрического пространства $(M\,,\,d)$. Если $A\bigcap B = \emptyset$, то $A\bigcap B$ открыто по определению. Если $A\bigcap B \neq \emptyset$ и $x_0 \in A_1\bigcap A_2$, то тогда

$$\exists(b(x_0\,,\,\epsilon_1) \subset A_1\,,\; b(x_0\,,\,\epsilon_2) \subset A_2),$$

поэтому

$$(\epsilon \leq \min(\epsilon_1\,,\,\epsilon_2)) \Rightarrow (b(x_0\,,\,\epsilon) \subset A_1 \bigcap A_2).$$

Следовательно, множество $A_1\bigcap A_2$ удовлетворяет условию определения (2.2.4).

Следствие 2.2.1. *Пусть $\mathcal{O}$ -система подмножеств метрического пространства M, которые открыты в смысле определения* (2.2.4). *Тогда система $\mathcal{T} = \{\emptyset\,,\,M\,,\,\mathcal{O}\}$ задает топологию на M.*

Определение 2.2.5. Топология $\mathcal{T} = \{\emptyset\,,\,M\,,\,\mathcal{O}\}$, где $\mathcal{O}$ -система открытых в смысле определения (2.2.4) подмножеств метрического пространства M, называется естественной топологией метрического пространства.

Рассмотрим примеры других топологических пространств.

Пример 2.2.1. Рассмотрим полуинтервал $[0\,,\,1)$ и на нем систему подмножеств, которая состоит из всех полуинтервалов $[0\,,\,a)\,,\;a \leq 1$.

Легко проверить, что эта система подмножеств удовлетворяет аксиомам топологии.

Пример 2.2.2. Рассмотим отрезок $[0\,,\,1]$ и рассмотрим на нем систему подмножеств $\mathcal{O}$, которая состоит из всех дополнений к конечным множествам: $A \in \mathcal{O}$, если $A = [0\,,\,1] \setminus \{x_j\,,\,1 \leq j \leq n < \infty\}\,,\; n = 1\,,\,\ldots$. Система множеств $\mathcal{T} = \{\emptyset\,,\,[0\,,\,1]\,,\,\mathcal{O}\}$ определяет топологию на отрезке $[0\,,\,1]$.

Определение 2.2.6. Система открытых подмножеств $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ топологического пространства $(X\,,\,\mathcal{T})$ называется базой топологии $\mathcal{T}$, если любое открытое подмножество пространства X есть объединение множеств из системы $\mathcal{B}$.

Пример 2.2.3. Базой естественной топологии метрического пространства является система шаров $\mathcal{B} = \{b(x\,,\,\epsilon) \mid x \in X\,,\,\epsilon > 0\}$.

Одна и таже топология может быть задана с помощью разных баз. Например, естественная топология метрического пространства может быть задана с помощью системы шаров с рациональными радиусами.

Лемма 2.2.2. *Если система множеств $\mathcal{B}$ есть база топологии на топологическом пространстве $(X\,,\,\mathcal{T})$, то*

b1. Для любого $x \in X$ существует такое множество $B_x \in \mathcal{B}$, что $x \in B_x$.

b2. Если $B_1\,,\,B_2 \in \mathcal{B}$ и $x \in B_1 \bigcap B_2$, то существует такое $B_3 \in \mathcal{B}$, что $x \in B_3 \subset B_1 \bigcap B_2$.

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что все пространство X есть объединение множеств из системы $\mathcal{B}$. Второе утверждение следует из того, что множество $B_1 \bigcap B_2$ открыто и поэтому есть объединение множеств из системы $\mathcal{B}$.

Лемма 2.2.3. *Пусть $\mathcal{B}$ -система подмножеств пространства X, которая удовлетворяет условиям b1 и b2 леммы 2.2.2. Пусть $\mathcal{O}$ -система подмножеств пространства X, которая состоит из всех объединений множеств системы $\mathcal{B}$. Тогда система множеств $\{\emptyset\,,\,X\,,\,\mathcal{O}\}$ определяет топологию на пространстве X, для которой система множеств $\mathcal{B}$ является базой.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $O_1\,,\,O_2 \in \mathcal{O}$, то $O_1 \bigcap O_2 \in \mathcal{O}$. Пусть

$$O_1 = \bigcup V_\alpha\ ,\ O_2 = \bigcup V_\beta\ ,\ V_\alpha\,,\,V_\beta \in \mathcal{B}$$

и $x \in O_1 \bigcap O_2$. Тогда существуют такие $V'_\alpha\,,\,V''_\beta$ из системы $\mathcal{B}$, что

$$x \in V'_\alpha\,,\,x \in V''_\beta,$$

поэтому

$$x \in V_\gamma \subset V'_\alpha \bigcap V''_\beta\,,\,V_\gamma \in \mathcal{B}.$$

Следовательно, множество $O_1 \bigcap O_2$ есть объединение множеств из системы $\mathcal{B}$ и поэтому принадлежит системе множеств $\mathcal{O}$.

Пусть $\mathcal{B}_0$ -произвольная система подмножеств множества X, которая удовлетворяет условию:

$$X = \bigcup V_\alpha\,,\,V_\alpha \in \mathcal{B}_0. \tag{2.28}$$

Пусть $\mathcal{B}$ -система подмножеств множества X, которая состоит из всех пересечений конечного числа множеств из системы $\mathcal{B}_0$:

$$B \in \mathcal{B} \colon B = \bigcap_{1 \le j \le n} B_j \, , \, B_j \in \mathcal{B}_0 \, , \, n = 1, \ldots$$

Легко видеть, что так построенная система множеств $\mathcal{B}$ удовлетворяет условиям $b1$ и $b2$ и поэтому является базой топологии на множестве X. Система $\mathcal{B}_0$ называется *предбазой топологии* с базой $\mathcal{B}$.

Приведем пример задания топологии с помощью базы топологии.

Пример 2.2.4. Пусть X -окружность радиуса 1 и $\mathcal{B}$ -множество дуг l с угловыми координатами

$$l = \{\phi \mid \phi 1 \le \phi < \phi 2 \, , \, 0 \le \phi 1 \le \phi 2 \le 2\pi\} \subset X. \tag{2.29}$$

Множество $\mathcal{B}$ образует базу топологии. Пространство X в этой топологии есть свернутая в окружность прямая Зоргенфрея (другое название этого топологического пространства -свернутое в окружность пространство стрелок).

Приведем пример задания топологии с помощью предбазы.

Пример 2.2.5. Пусть $X = \mathbb{R}^1$, и $\mathcal{B}_0$ -система полубесконечных интервалов вида $(-\infty \, , \, a) \ , \ (b \, , \, \infty) \ , \ a \, , \, b \in \mathbb{R}^1$. Эта система образует предбазу естественной топологии на $\mathbb{R}^1$.

Определение 2.2.7. Множество тех элементов базы топологии, которые содержат данную точку x, называется базой топологии в точке x или локальной базой топологии.

Ясно, что для задания топологии достаточно в каждой точке пространства задать локальную базу топологии.

Определение 2.2.8. Система окрестностей точки x называется фундаментальной системой окрестностей в точке x, если любой элемент базы топологии в точке x содержит окрестность из этой системы.

Опишем задание топологии в произведении пространств.

Сначала напомним определение декартова произведения пространств. Пусть I -произвольное множество. Предположим, что каждому $\tau \in I$ поставлено в соответствие множество X_τ. Рассмотрим множество всех функций, которые каждому $\tau \in I$ ставят в соответствие элемент множества X_τ:

$$I \ni \tau \mapsto x_\tau \in X_\tau .$$

Это множество функций называется декартовым произведением пространств X_τ и обозначается символом $\prod\limits_{\tau\in I} X_\tau$.

Приведем пример. Пусть I -это отрезок натурального ряда:

$$I = \{1, \dots d\} \ , \ X_\tau \equiv \mathbb{R}^1.$$

В этом случае точка пространства $\prod\limits_{\tau\in I} X_\tau$ -это функция, которая каждому числу $\tau \in \{1, \dots d\}$ ставит в соответствие точку $x_\tau \in \mathbb{R}^1$. Множество значений этой функции $(x_1 \, , \, x_2 \, \dots x_d)$ есть точка пространства $\mathbb{R}^d$.

Теперь предположим, что каждое множество X_τ есть топологическое пространство с топологией $\mathcal{T}_\tau$. В декартовом произведении пространств $\prod\limits_{\tau\in I} X_\tau$ рассмотрим систему $\mathcal{B}$ подмножеств вида

$$B \in \mathcal{B} : B = \prod_{\tau\in I} O_\tau \ , \ O_\tau \in \mathcal{T}_\tau. \tag{2.30}$$

где $O_\tau = X_\tau$ для всех τ, за исключением конечного числа индексов $\tau \in I$. Эта система подмножеств задает базу топологии в декартовом произведении $\prod\limits_{\tau\in I} X_\tau$, и порожденная этой базой топология называется *тихоновской топологией* произведения пространств. Обычно по умолчанию считается, что декартово произведение топологических пространств снабжено тихоновской топологией.

2.2.2 Замкнутые множества.

Определение 2.2.9. Множество $A \subset X$ в топологическом пространстве $(X \, , \, \mathcal{T})$ называется замкнутым, если его дополнение открыто:

$$(A \,\text{замкнуто}) \iff (\mathbf{C}(A) \in \mathcal{T}).$$

Приведем примеры замкнутых множеств. Все пространство X и пустое множество $\emptyset$ замкнуты в любом топологическом пространстве. Отрезок $[a \, , \, b]$ есть замкнутое множество в естественной топологии пространства $\mathbb{R}^1$. В примере 2.2.4 каждое множество вида (2.29) есть одновременно и открытое и замкнутое множество.

Из определения топологии и формул де Моргана следует

Утверждение 2.2.1. *Любое пересечение замкнутых множеств замкнуто и объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Определение 2.2.10. Замыканием $\mathbf{Cl}(A)$ множества A называется пересечение всех замкнутых множеств, которые содержат множество A:

$$\mathbf{Cl}(A) := \bigcap_{A \subset B} B\,,\; B \text{ замкнуто.} \tag{2.31}$$

Замыкание множества всегда существует (все пространство есть замкнутое множество и содержит любое множество, поэтому пересечение всех замкнутых множеств,содержащих данное множество, всегда определено) и замыкание множества есть наименьшее замкнутое множество, которое содержит множество A.

Замечание. По-английски замкнутое множество -это closed set, и замыкание множества часто обозначают символом $\overline{A}$ (как сказали автору студенты, черта сверху символизирует крышку, которой множество closed). Однако это обозначение не совсем удобно, если на данном множестве рассматривается несколько топологий и нужно пояснить, в какой топологии берется замыкание.

Определение 2.2.11. В топологическом пространстве точка x_0 называется точкой прикосновения множества A, если любая открытая окрестность точки x_0 имеет непустое пересечение с множеством A.

Любая точка множества A есть точка его прикосновения. Точки $0\,,\,1$ есть точки прикосновения для интервала $(0\,,\,1)$ в естественной топологии прямой $\mathbb{R}^1$.

Теорема 2.2.1. *Множество всех точек прикосновения множества совпадает с его замыканием.*

Доказательство. Обозначим множество точек прикосновения множества A символом $[A]$. Докажем, что $[A]$ -замкнутое множество. Пусть $x_0 \in \mathbf{C}([A])$. Тогда существует такая открытая окрестность $V(x_0)$, что $V(x_0)\bigcap A = \emptyset$. Докажем, что эта окрестность удовлетворяет условию: $V(x_0)\bigcap[A] = \emptyset$. Пусть $y_0 \in V(x_0)\bigcap[A]$. Так как $y_0 \in [A]$ и $V(x_0)$ есть открытая окрестность точки y_0, окрестность $V(x_0)$ должна иметь непустое пересечение с множеством A, а это противоречит ее выбору. Следовательно, точек пересечения окрестности $V(x_0)$ и множества $[A]$ не существует и окрестность $V(x_0)$ принадлежит дополнению множества $[A]$. Отсюда следует, что дополнение множества $[A]$ открыто, а само множество $[A]$ замкнуто. Так как $\mathbf{Cl}(A)$ -наименьшее замкнутое множество, которое содержит множество A, мы должны иметь включение:

$$\mathbf{Cl}(A) \subset [A]. \tag{2.32}$$

Докажем, что выполнено включение

$$\mathbf{C}(\mathbf{Cl}(A)) \subset \mathbf{C}([A]). \tag{2.33}$$

Пусть $x_0 \in \mathbf{C}(\mathbf{Cl}(A))$. Так как $\mathbf{C}(\mathbf{Cl}(A))$ открыто, то существует такая открытая окрестность $V(x_0)$ точки x_0, что $V(x_0) \subset \mathbf{C}(\mathbf{Cl}(A))$. Эта окрестность удовлетворяет условию $V(x_0) \bigcap \mathbf{Cl}(A) = \emptyset$. Поэтому $V(x_0) \bigcap A = \emptyset$. Следовательно, $x_0 \notin [A]$, что и доказывает (2.33). Из (2.32) и (2.33) следует утверждение теоремы.

Следствие 2.2.2. *В метрическом пространстве точка x_0 в том и только том случае принадлежит замыканию множества A, если в множестве A существует последовательность, которая сходится к точке x_0.*

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что в силу только что доказанной теоремы в метрическом пространстве точка x_0 в том и только том случае принадлежит замыканию множества A, если любой шар с центром в точке x_0 пересекается с множеством A.

Из определения 2.1.4 следует, что расстояние между точкой и множеством равно нулю в том и только том случае, если существует принадлежащая множеству последовательность, которая сходится к этой точке.

Поэтому из 2.2.2 вытекает

Следствие 2.2.3. *Если A -замкнутое подмножество метрического пространства, то $x \in A$ в том и только том случае, если $dist(x\,,\,A) = 0$.*

Заметим, что расстояние между двумя замкнутыми непересекающимися множествами может быть равно нулю. Приведем пример. В плоскости $\mathbb{R}^2$ с обычной топологией рассмотрим множества

$$A = \{(x_1\,,\,x_2) \mid x_1 x_2 = 0\}\,,\; B = \{(x_1\,,\,x_2) \mid x_1 x_2 = 1\}.$$

Множество A -это координатные оси, множество B -это две гипрболы. Множества A и B замкнуты и не пересекаются, но $\mathrm{dist}(A\,,\,B) = 0$.

Важное свойство замкнутых множеств в полном метрическом пространстве описывается в теореме, которая по историческим причинам носит название теоремы Бэра о категориях. Термин категория в этом названии не имеет ничего общего со своим современым значением.

Теорема 2.2.2. *Если полное метрическое пространство M есть счетное объединение своих замкнутых подмножеств:*

$$M = \bigcup_n A_n\,,\; \forall n\colon \mathbf{Cl}(A_n) = A_n,$$

то одно из этих подмножеств содержит открытый шар:

$$\exists(A_n\,,\,\epsilon>0\,,\,b(x_0\,,\,\epsilon)))\,:\,b(x_0\,,\,\epsilon)\subset A_n.$$

Доказательство. Если $M=A_1$, то все доказано: множество A_1 содержит все шары пространства M. Если $\mathbf{C}(A_1)\neq\emptyset$, то множество $\mathbf{C}(A_1)$ открыто и содержит по крайней мере одну точку x_1. Следовательно, множество $\mathbf{C}(A_1)$ содержит открытый шар:

$$\exists\,b(x_1\,,\,\epsilon_1)\subset\mathbf{C}(A_1).$$

Очевидно, что

$$b(x_1\,,\,\epsilon_1)\bigcap A_1=\emptyset.$$

Если шар $b(x_1\,,\,\epsilon_1/4)$ содержится в множестве A_2, то все доказано. Если $b(x_1\,,\,\epsilon_1/4)\not\subset A_2$, то множество $\mathbf{C}(A_2)\bigcap b(x_1\,,\,\epsilon_1/4)$ открыто и содержит по крайней мере одну точку x_2. Следовательно, множество $\mathbf{C}(A_2)\bigcap b(x_1\,,\,\epsilon_1/4)$ содержит открытый шар:

$$\exists b(x_2\,,\,\epsilon_2)\,:\,b(x_2\,,\,\epsilon_2)\subset\mathbf{C}(A_2)\bigcap b(x_1\,,\,\epsilon_1/4)$$

Мы можем выбрать радиус этого шара так, что

$$\epsilon_2<\epsilon_1/4\,.$$

Очевидно, что

$$b(x_2\,,\,\epsilon_2)\bigcap\left(A_1\bigcup A_2\right)=\emptyset.$$

Так мы либо на n-ом шаге построения получим шар, который целиком содержится в множестве A_n, либо построим бесконечную последовательность шаров $\{b(x_n\,,\,\epsilon_n)\}$, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned}&b(x_n\,,\,\epsilon_n)\supset b(x_n\,,\,\epsilon_n/4)\supset b(x_{n+1}\,,\,\epsilon_{n+1})\supset\ldots;\quad\epsilon_{n+1}<\frac{1}{4}\epsilon_n,\\&b(x_n\,,\,\epsilon_n)\bigcap\left(\bigcup_{1\leq j\leq n}A_j\right)=\emptyset\,,\,.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}&d(x_n\,,\,x_{n+m})\leq d(x_n\,,\,x_{n+1})+\ldots d(x_{n+m-1}\,,\,x_{n+m})\leq\\&\frac{1}{4}\epsilon_n(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\ldots)<\frac{1}{3}\epsilon_n\,.\end{aligned}$$

Так как $\epsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, то отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, причем ее предел x_0 лежит в шаре $b(x_n\,,\,\epsilon_n)$:

$$\forall n\colon d(x_n\,,\,x_0) \leq \frac{1}{3}\epsilon_n.$$

В силу соотношения (2.34) отсюда следует, что

$$\forall n : x_0 \notin \bigcup_{1 \leq j \leq n} A_j,$$

чего быть не может, так как $x_0 \in M$. Теорема доказана.

В заключении заметим, что в топологическом пространстве множество может быть открытым, замкнутым, открытым и замкнутым одновременно и ни открытым, ни замкнутым.

2.2.3 Непрерывные отображения.

Определение 2.2.12. Отображение

$$f\colon X \mapsto Y \tag{2.35}$$

(по дгугой терминологии: функция с областью определения X и областью значений Y) топологического пространства X в топологическое пространство Y называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если прообраз $f^{-1}(V(y_0)) \subset X$ любой окрестности $V(y_0) \subset Y$ точки $y_0 = f(x_0)$ есть окрестность точки x_0.

Очевидна

Лемма 2.2.4. *Отображение* (2.35) *непрерывно в точке* $x_0 \in X$, *если для любого множества* $V(y_0) \in \mathcal{B}(y_0)$, *где* $\mathcal{B}(y_0) \subset \mathcal{T}_Y$ *-локальная база топологии в точке* $y_0 = f(x_0)$, *существует такая окрестность* $U(x_0) \in \mathcal{B}(x_0) \subset \mathcal{T}_X$ *из локальной базы топологии в точке* x_0, *что* $f(U(x_0)) \subset V(y_0)$.

Отсюда следует

Лемма 2.2.5. *Отображение*

$$f\colon M_1 \mapsto M_2$$

метрического пространства $(M_1\,,\,d_1)$ *в метрическое пространство* $(M_2\,,\,d_2)$ *непрерывно в точке* x_0, *если*

$$\forall(\epsilon > 0)\,,\,\exists(\delta(\epsilon) > 0) : f(b(x_0\,,\,\delta(\epsilon))) \subset b(f(x_0)\,,\,\epsilon). \tag{2.36}$$

Как и в курсе математического анализа, легко доказывается, что условие (2.36) эквивалентно условию:

$$\forall \{x_n\}\colon (x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x_0)).$$

Определение 2.2.13. Отображение (2.35) топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке прстранства X.

Примеры непрерывных отображений хорошо известны: любая функция, которая непрерывна на отрезке $[0\,,\,1]$ в смысле того определения, которое давалось в курсе математического анализа, есть непрерывное отображение отрезка $[0\,,\,1]$, рассматриваемого как метрическое пространство с метрикой $d(x\,,\,y) = |x - y|$, в действительную прямую $\mathbb{R}^1$, рассматриваемую как метрическое пространство с той же метрикой.

Заметим, что непрерывно отображение или нет, это свойство зависит и от топологии в области определения функции, и от топологии в области значений функции. Любое отображение дискретного пространства в любое пространство непрерывно. На антидискретном пространстве непрерывны только постоянные отображения, а отображение любого пространства в антидискретное непрерывно. На определенном в примере 2.2.4 пространстве (свернутом в окружность пространстве стрелок) рассмотрим функцию

$$f(\phi) = \begin{cases} 0\,,\ 0 \le \phi < \pi \\ 1\,,\ \pi \le \phi < 2\pi. \end{cases}$$

Легко видеть, что эта функция непрерывна, если ее рассматривать как отображение свернутого в окружность пространства стрелок в действительную прямую с естественной топологией.

Теорема 2.2.3. *Пусть*

$$f : X \mapsto Y$$

-отображение топологического пространства $(X\,,\,\mathcal{T}_X)$ *в топологическое пространство* $(Y\,,\,\mathcal{T}_Y)$*. Следующие условия эквивалентны:*

1. f *непрерывно на* X*.*

2. Образ замыкания любого множества содержится в замыкании образа:

$$\forall (A \subset X) : f(\mathbf{Cl}(A)) \subset \mathbf{Cl}(f(A)). \tag{2.37}$$

3. Прообраз любого замкнутого множества замкнут:

$$(B = \mathbf{Cl}(B)) \Rightarrow (\mathbf{Cl}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(B)). \tag{2.38}$$

4. Прообраз всякого открытого в Y множества открыт в X:

$$\forall (B \in \mathcal{T}_Y) : f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X. \tag{2.39}$$

Доказательство. Докажем, что из первого условия следует второе. Пусть отображение f непрерывно в смысле определения 2.2.13 и $x_0 \in \mathbf{Cl}(A)$. Пусть $V(y_0) \in \mathcal{T}_Y$ -произвольная открытая окрестность точки $y_0 = f(x_0)$ и $U(x_0) \in \mathcal{T}_X$ -та окрестность точки x_0, которая в силу определения непрерывности удовлетворяет условию

$$f(U(x_0)) \subset V(y_0).$$

Так как $x_0 \in \mathbf{Cl}(A)$, то $U(x_0) \bigcap A \neq \emptyset$, поэтому $f(U(x_0)) \bigcap f(A) \neq \emptyset$. Следовательно,

$$V(y_0) \bigcap f(A) \neq \emptyset.$$

Мы доказали, что произвольная открытая окрестность точки y_0 пересекается с множеством $f(A)$. Отсюда следует, что $y_0 \in \mathbf{Cl}(f(A))$ и поэтому

$$f(\mathbf{Cl}(A)) \subset \mathbf{Cl}(f(A)).$$

Тепрь докажем, что из второго условия следует третье. Пусть B замкнуто в Y и $A = f^{-1}(B)$. Тогда

$$f(\mathbf{Cl}(A)) \subset \mathbf{Cl}(f(A)) = \mathbf{Cl}(B) = B,$$

поэтому

$$\mathbf{Cl}(A) \subset f^{-1}(B) = A$$

и A замкнуто.

Докажем, что из третьего условия вытекает четвертое. Если A открыто, то $\mathbf{C}(A)$ -замкнуто, поэтому множество

$$\mathbf{C}(f^{-1}(A)) = f^{-1}(\mathbf{C}(A))$$

замкнуто, а это и означает, что множество $f^{-1}(A)$ открыто.

Если выполнено четвертое условие, то в каждой точке $x \in X$ выполнены условия леммы 2.2.4, поэтому отображение непрерывно в каждой точке $x \in X$, т.е. непрерывно. Теорема доказана.

Перечислим некоторые очевидные свойства непрерывных отображений.

Если отображение (2.35) непрерывно, $\mathrm{Im} f = Y$ и отображение $g\colon Y \mapsto Z$ непрерывно, то композиция отображений $g \circ f : X \mapsto Z$ непрерывна.

Если $\{f_\alpha\}$ -произвольное семейство отображений множества X в топологические пространства $Y(\alpha)$, то система множеств

$$\mathcal{B} = \{O \mid O = f_\alpha^{-1}(A) \ , \ A \in \mathcal{T}_{Y(\alpha)}\}$$

определяет на множестве X базу топологии, в которой все отображения f_α непрерывны. Эта топология называется *инициальной топологией* для семейства отображений $\{f_\alpha\}$.

В частности, определяемая по (2.30) база топологии в произведении $\prod\limits_{\tau\in I} X_\tau$ пространств является инициальной топологией относительно конечных систем отображений проектирования

$$P(\tau(j)) : \prod_{\tau\in I} X_\tau \mapsto X_{\tau(j)} \ , \ 1 \leq j \leq n \tag{2.40}$$

$$P(\tau(j))(\prod_{\tau\in I} x_\tau) = x_{\tau(j)}. \tag{2.41}$$

Если $\{f_\alpha\}$ -семейство произвольных отображений топологических пространств $X(\alpha)$ в множество Y, то система множеств

$$\mathcal{B} = \{B \mid f_\alpha^{-1}(B) \in \mathcal{T}_{X(\alpha)}\}$$

определяет на множестве Y предбазу топологии, в которой все отображения $\{f_\alpha\}$ непрерывны. Эта топология называется *финальной топологией* в Y.

Если $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ -две топологии на множестве X, то говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ сильнее (обозначение :$\mathcal{T}_1 \succeq \mathcal{T}_2$) топологии $\mathcal{T}_2$ (или топология $\mathcal{T}_2$ слабее топологии $\mathcal{T}_1$), если $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$, т.е. если каждое множество, открытое в топологии $\mathcal{T}_2$, открыто и в топологии $\mathcal{T}_1$. Если включения строгие, то говорят, что соответствующая топология строго сильнее (слабее).

Для того чтобы топология $\mathcal{T}_1$ была бы сильнее топологии $\mathcal{T}_2$, необходимо и достаточно, чтобы было непрерывным тождественое отображение пространства $(X \, , \, \mathcal{T}_1)$ в пространство $(X \, , \, \mathcal{T}_2)$.

Если $A \subset X$ произвольное подмножество топологического пространства $(X \, , \, \mathcal{T}_X)$, то на множестве A можно ввести топологию $\mathcal{T}_A$, положив по определению $\mathcal{T}_A = \{\emptyset \, , \, A \, , \, A \bigcap O\}$, где $O \in \mathcal{T}_X$. Топология $\mathcal{T}_A$ называется *индуцированной топологией.* Вообще говоря, открытые и или замкнутые подмножества топологии $\mathcal{T}_A$ не являются открытыми или замкнутыми подмножествами топологии $\mathcal{T}_X$. Приведем пример. Пусть $X = \mathbb{R}^1$ с обычной топологией и $A = [0 \, , \, 1)$. В этом случае множество A в топологии $\mathcal{T}_X$ ни открыто, ни замкнуто, а в топологии $\mathcal{T}_A$ множество A и открыто, и замкнуто.

Лемма 2.2.6. *Если A -открытое подмножество топологического пространства $(X\ ,\ \mathcal{T}_X)$, то подмножество $B \subset A$ открыто в топологии $\mathcal{T}_A$ в том и только том случае, если множество B открыто в топологии $\mathcal{T}_X$. Если A -замкнутое подмножество топологического пространства $\mathcal{T}_X$, то подмножество $B \subset A$ замкнуто в топологии $\mathcal{T}_A$ в том и только том случае, если множество B замкнуто в топологии $\mathcal{T}_X$.*

Доказательство.Если A и $B \subset A$ открыты в топологии $\mathcal{T}_X$, то множество $B = A \bigcap B$ открыто в топологии $\mathcal{T}_A$, поэтому любое множество, открытое в топологии $\mathcal{T}_X$, открыто и в топологии $\mathcal{T}_A$. Если A открыто и B открыто в топологии $\mathcal{T}_A$, то $B = A \bigcap O$, где O открыто в топологии $\mathcal{T}_X$, поэтому B открыто в топологии $\mathcal{T}_X$. Если A и $B \subset A$ замкнуты в топологии $\mathcal{T}_X$, то множество $\mathbf{C}_X(B)$ открыто в топологии $\mathcal{T}_X$, поэтому множество $\mathbf{C}_A(B) = A \bigcap \mathbf{C}_X(B)$ открыто в тополгии $\mathcal{T}_A$, а множество B замкнуто в топологии $\mathcal{T}_A$. Если A замкнуто в топологии $\mathcal{T}_X$, а $B \subset A$ замкнуто в топологии $\mathcal{T}_A$, то $A \setminus B$ открыто в топологии $\mathcal{T}_A$, поэтому $A \setminus B = A \bigcap O$, где O открыто в топологии $\mathcal{T}_X$ и множество $\mathbf{C}_X(B) = (A \bigcap O) \bigcup (\mathbf{C}_X(A))$ открыто в топологии $\mathcal{T}_X$, т. е. B замкнуто в тополгии $\mathcal{T}_X$. Лемма доказана.

2.2.4 Аксиомы отделимости.

Взаимоотношения точки и окрестности в топологическом пространстве регулируются аксиомами отделимости. Вот список часто используемых аксиом отделимости.

1. *Аксиома* T_0. По крайней мере одна из любых двух точек пространства имеет окрестность, которая не содержит другую точку.

Пример пространства, которое удовлетворяет аксиоме T_0 (и не удовлетворяет ниже следующим аксиомам) приведен в примере 2.2.1

2. *Аксиома*T_1. Каждая из двух любых точек пространства имеет окрестность, которая не содержит другую точку.

Пример пространства, которое удовлетворяет аксиоме T_1 (и не удовлетворяет ниже следующим аксиомам) приведен в примере 2.2.2.

В пространстве, которое удовлетворяет аксиоме T_1, каждая точка есть замкнутое множество.

3. *Аксиома* T_2. Любые две точки пространства имеют непересекающиеся окрестности.

4. *Аксиома* T_3. У любого замкнутого множества A и точки $x \in \mathbf{C}(A)$ есть непересекающиеся окрестности.

5. *Аксиома* T_4. Любые два замкнутых непересекающихся множества имеют непересекающиеся окрестности.

Аксиоме T_2 называется аксиомой отделимости Хаусдорфа, а пространства, которые удовлетворяют аксиоме T_2, называются *хаусдорфовыми пространаствами.* Ясно, что метрическое пространство является хаусдорфовым пространством. Встречающиеся в анализе пространства чаще всего являются хаусдорфовами пространствами.

Пространства, которые удовлетворяют аксиомам T_1 и T_3, называют регулярными пространствами.

Пространства, которые удовлетворяют аксиомам T_1 и T_4, называют нормальными пространствами.

Любое нормальное пространство является регулярным пространством, любое регулярное пространство является хаусдорфовым пространством.

Лемма 2.2.7. *Пространство X хаусдорфово в том и только том случае, если в декартовом произведении пространств $X \times X$ диагональ:*

$$diag \subset X \times X\ ,\ diag := \{x \times y \mid x \in X\ ,\ y \in X\ ,\ x = y\}$$

есть замкнутое множество.

Пусть пространство X хаусдорфово. Докажем, что диагональ замкнута. Пусть $x \times y \notin diag$. Тогда $x \neq y$, и существуют такие открытые окрестности $V(x)$ и $V(y)$ точек x и y, что

$$V(x) \bigcap V(y) = \emptyset. \tag{2.42}$$

Тогда множество $V(x) \times V(y)$ есть открытая окрестность точки $x \times y$ в пространстве $X \times Y$, которая в силу (2.42) не пересекается с диагональю, поэтому множество $\mathbf{C}(diag)$ открыто, а множество $diag$ замкнуто. Если диагональ замкнута, то точка $x \times y$ при $x \neq y$ имеет непересекающуюся с диагональю открытую в топологии произведения $X \times X$ окрестность. По определению базы топологии в пространстве $X \times X$ должны существовать такие открытые окрестности $V(x)$ и $V(y)$ точек x и y, что выполнено соотношение (2.42). Лемма доказана.

Следствием этой леммы является

Лемма 2.2.8. *Если f и g -непрерывные отображения пространства X в хаусдорфово пространство Y и*

$$\forall (x \in A)\, :\, f(x) = g(x), \tag{2.43}$$

то

$$\forall (x \in \mathbf{Cl}(A))\, :\, f(x) = g(x). \tag{2.44}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение F пространства X в пространство $Y \times Y$:

$$X \ni x \mapsto F(x) = f(x) \times g(x) \in Y \times Y.$$

Отображение F непрерывно, поэтому прообраз $F^{-1}(diag) \subset X$ замкнутого в топологии $Y \times Y$ множества $diag \subset Y \times Y$ замкнут в топологии пространства X. Но $A \subset F^{-1}(diag)$, поэтому $\mathbf{Cl}(A) \subset F^{-1}(diag)$. Лемма доказана.

Лемма 2.2.9. *Метрическое пространство есть нормальное пространство.*

Доказательство. Заметим, что в силу неравенства (2.11) для любого множества A функция

$$x \mapsto \mathrm{dist}(x\,,\,A)$$

непрерывна. Пусть множества A и B замкнуты и не пересекаются. Тогда функция

$$x \mapsto \mathrm{dist}(x\,,\,A) + \mathrm{dist}(x\,,\,B)$$

в силу следствия 2.2.3) не равна нулю ни в одной точке, так как нет таких точек, которые принадлежали бы и множеству A, и множеству B. Поэтому функция

$$f(x) = \frac{\mathrm{dist}(x\,,\,A)}{\mathrm{dist}(x\,,\,A) + \mathrm{dist}(x\,,\,B)} \tag{2.45}$$

непрерывна. Положим

$$O_B = \{x \mid f(x) > 3/4\}\,,\ O_A = \{x \mid f(x) < 1/4\}.$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ множества O_A и O_B открыты. Очевидно, что они не пересекаются и выполнены включения $A \subset O_A$, $B \subset O_B$. Лемма доказана.

Для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B в метрическом пространстве функция (2.45) непрерывна и удовлетворяет условию: $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. Такая функция существует не только в метрическом пространстве, но и в любом нормальном топологическом пространстве. Для доказательства этого факта мы сначала докажем лемму, которую называют малой леммой Урысона.

Лемма 2.2.10. *Пусть X -нормальное топологическое пространство и A -замкнутое множество в X. Тогда для любой открытой окрестности O_A множества A существует такая открытая окрестность $V_A \supset A$, что*

$$A \subset V_A \subset \mathbf{Cl}(V_A) \subset O_A. \tag{2.46}$$

Доказательство. Пусть $D = \mathbf{C}(O_A)$. Множество D замкнуто и $A \bigcap D = \emptyset$. Так как пространство X нормально, то существуют такие открытые окрестности $V_A \supset A$ и $V_D \supset D$, что $V_A \bigcap V_D = \emptyset$. Поэтому $\mathbf{C}(V_D) \subset V_A$. Множество $\mathbf{C}(V_D)$ замкнуто и содержит V_A. Но $\mathbf{Cl}(V_A)$ -наименьшее замкнутое множество, которое содержит V_A, поэтому $\mathbf{Cl}(V_A) \subset \mathbf{C}(V_D)$. Так как $V_D \supset D$, то $\mathbf{C}(V_D) \subset \mathbf{C}(D) = O_A$. Следовательно, выполнены включения

$$A \subset V_A \subset \mathbf{Cl}(V_A) \subset \mathbf{C}(V_D) \subset O_A.$$

Лемма доказана.

Теперь докажем большую лемму Урысона.

Лемма 2.2.11. *Пусть X -нормальное топологическое прстранство, A и B -замкнутые непересекающиеся множества в пространстве X. Тогда существует такая непрерывная функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}^1$, что $f(A) = 0$, $f(B) = 1$, $0 \leq f(x) \leq 1$.*

Доказательство. Положим $V(1) = \mathbf{C}(B)$. Множество $V(1)$ открыто и содержит множество A. Пусть $V(0)$ -такая открытая окрестность множества A, что

$$A \subset V(0) \subset \mathbf{Cl}(V(0)) \subset V(1).$$

Такая окрестность существует на основе малой леммы Урысона. Докажем, что для любых $n = 0, 1, \ldots$ и двоично-рациональных p', $p = 2^{-n}m$, $0 \leq m \leq 2^n$ мы можем найти такие открытые множества $V(p)$, $V(p')$, что

$$\forall (p' > p) : A \subset V(p) \subset \mathbf{Cl}V(p) \subset V(p'). \tag{2.47}$$

Доказательство будем вести по индукции. При $n = 0$ существование таких окрестностей доказано выше. $(n+1)$-й шаг индукции проведем так. Для

$$p' = \frac{1}{2}(2^{-n}m + 2^{-n}(m+1)) = 2^{-(n+1)}(2m+1)\,,\; m < 2^{-n},$$

мы, воспользрвавшись малой леммой Урысона для замкнутого множества $\mathbf{Cl}(V(2^{-n}m))$ и его открытой окрестности $V(2^{-n}(m+1))$, найдем такую открытую окрестность $V(p')$, что

$$\mathbf{Cl}(V(2^{-n}m)) \subset V(2^{-(n+1)}(2m+1)) \subset \mathbf{Cl}(V(2^{-(n+1)}(2m+1))) \subset V(2^{-n}(m+1)).$$

Существование удовлетворяющих условию (2.47) окрестностей доказано. По построению эти окрестности удовлетворяют условию

$$\forall (p' > p) : A \subset \mathbf{Cl}(V(p)) \subset V(p') \subset V(1) = \mathbf{C}(B).$$

Определим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{p \mid x \in V(p)\}, \\ 1\ ,\ x \in B. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

$$f(x) = 0\,,\ x \in A\,;\ f(x) = 1\,,\ x \in B\,;\ 0 \leq f(x) \leq 1\,,\ x \in X.$$

Докажем, что функция $f(x)$ непрерывна.

Пусть

$$O(\epsilon) = \bigcup_{p<\epsilon/2} V(p).$$

Множество $O(\epsilon)$ открыто и из определения функции $f(x)$ следует, что $f(O(\epsilon)) \subset [0\,,\,\epsilon)$

Пусть $(t-\epsilon/2\,,\,t+\epsilon/2) \subset (0\,,\,1)$ и $O'(\epsilon) = V(t+\epsilon/2) \setminus \mathbf{Cl}(V(t-\epsilon/2))$. Множество $O'(\epsilon)$ открыто и из определения функции $f(x)$ следует, что $f(O'(\epsilon)) \subset (t-\epsilon/2\,,\,t+\epsilon/2)$.

Пусть $O''(\epsilon) = \mathbf{C}(\mathbf{Cl}(V(1-\epsilon/2)))$. Множество $O''(\epsilon)$ открыто и из определения функции $f(x)$ следует, что $f(O''(\epsilon)) \subset (1-\epsilon\,,\,1]$.

Непрерывность функции $f(x)$, а вместе с этим и большая лемма Урысона доказаны.

Следствие 2.2.4. *Пусть X -нормальное топологическое пространство и $A_i\,,\ 1 \leq i \leq n < \infty$ -попарно непересекающиеся замкнутые множества в X , a_i -произвольные константы. Тогда существует непрерывная функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}^1$, которая удовлетворяет условиям:*

$$f(x) = a_i\,,\ x \in A_i\ ;\ |f(x)| \leq \sum_{1\leq i\leq n} |a_i|\,,\ x \in X.$$

Доказательство. Для множеств $A = \bigcup_{j\neq i} A_j$ и $B = A_i$ построим функцию $f_i(x)$, которая удовлетворяет условиям большой леммы Урысона. Тогда функция

$$f(x) = \sum_i a_i f_i(x)$$

есть искомая функция.

Это следствие уточняет теорема Брауэра-Титце-Урысона о продолжении функции.

Теорема 2.2.4. *Пусть X -нормальное пространство, A -замкнутое подмножество в X, и $\psi\colon A \mapsto \mathbb{R}^1$ -непрерывная в топологии $\mathcal{T}_A$ ограниченная функция. Тогда существует такая непрерывная функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R}^1$, что $\forall(x \in A) : f(x) = \psi(x)$.*

Доказательство. Пусть $M_0 = \sup\{|\psi(x)| \mid x \in X\}$. Определим множества

$$A_{00} = \{x \mid \psi(x) \geq M_0\}\,,\; A_{01} = \{x \mid \psi(x) \leq -M_0\}.$$

Множества A_{00} , A_{01} замкнуты в пространстве $(A\,,\,\mathcal{T}_A)$, а поскольку A замкнуто в X, то эти множества замкнуты и в X. Построим непрерывную на всем пространстве X функцию $f_0(x)$, которая удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}&f_0(x) = M_0/3\,,\; x \in A_{00}\,;\; f_0(x) = -M_0/3\,,\; x \in A_{01}\\ &|f_0(x)| \leq M_0/3\;,\; x \in X.\end{aligned}$$

Существование такой функции следует из большой леммы Урысона. Положим

$$\psi_1(x) = \psi(x) - f_0(x).$$

Функция $\psi_1(x)$ непрерывна на A и удовлетворяет оценке

$$\sup\{|\psi_1(x)| \mid x \in X\} \leq 2/3M_0.$$

К функции ψ_1 мы снова применим наше построение. Так мы получим функциональные последовательности

$$\begin{aligned}&\psi_0(x) = \psi(x)\,,\; \psi_{n+1}(x) = \psi_n(x) - f_n(x)\,,\\ &\sup|\psi_{n+1}(x)| \leq 2\sup|\psi_n(x)|/3\,,\; x \in A,\\ &f_n(x) = \psi_n(x) - \psi_{n+1}(x)\,,\; |f_n(x)| \leq \sup|\psi_n(x)|/3\,,\; x \in X.\end{aligned}$$

Функция

$$f(x) = \sum_{0 \leq n < \infty} f_n(x)$$

есть искомое продолжение функции $\psi(x)$.

2.3 Компактные пространства.

Определение 2.3.1. Система $\mathcal{P} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ открытых подмножеств топологического пространства называется открытым покрытием множества A, если

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha.$$

Определение 2.3.2. Открытое покрытие $\mathcal{P}' = \{A_\alpha \mid \alpha \in \widetilde{I} \subset I\}$ множества A называется подпокрытием покрытия $\mathcal{P} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, если $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, т.е. если каждое множество, входящее в покрытие $\mathcal{P}'$, входит и в покрытие $\mathcal{P}$.

Определение 2.3.3. Топологическое пространство K называется компактным топологическим пространством (или компактом), если любое открытое покрытие $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ пространства K содержит состоящее из конечного числа множеств подпокрытие, т.е. состоящую из конечного числа множеств подсистему $\{A_{\alpha(j)} \mid 1 \le j < N < \infty\} \subset \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, которая есть покрытие K.

Определение 2.3.4. Множество $A \subset X$ в топологическом пространстве $(X\,,\,\mathcal{T})$ называется компактом в X, если оно есть компактное топологическое пространство в индуцированной топологии, т.е. если пространство $(A\,,\,\mathcal{T}_A)$ компактно.

Определение 2.3.5. Множество $A \subset X$ в топологическом пространстве $(X\,,\,\mathcal{T})$ называется предкомпактным в X, если замыкание $\mathbf{Cl}_X(A)$ есть компактное в X пространство.

Условие (2.3.3) называется условием Бореля-Лебега. В работах Н. Бурбаки и их последователей компактами называются *хаусдорфовы* пространства, которые удовлетворяют условию Бореля-Лебега. Заметим, что примерно до середины 80-х годов в математической литературе на русском языке компактные пространства назывались бикомпактами, а компактами назывались те пространства, которые теперь называются секвенциально компактыми.

Применение формул де Моргана к (2.3.3) дает следующие эквивалентные определению 2.3.3 условия компактности.

Условие 2.3.1. *Топологическое пространство K компактно в том и только том случае, если в любой его системе замкнутых множеств с пустым пересечением содержится состоящая из конечного числа множеств подсистема с пустым пересечением.*

Ясно, что это условие эквивалентно следующему.

Условие 2.3.2. *Пространство K компактно в том и только том случае, если в нем из условия, что любая конечная подсистема*

$$\{F_{\alpha(j)} \mid 1 \le j < N < \infty\,,\, \alpha(j) \in I\} \subset \{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$$

системы $\{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$ замкнутых множеств имеет непустое пересечения следует, что и вся система $\{F_\alpha \mid \alpha \in I\}$ имеет непустое пересечение.

Обратим внимание на то, что во всех случаях множество K рассматривается как топологичесое пространство и речь идет об открытых или замкнутых множествах в топологии пространства K.

Лемма 2.3.1. *Если K -замкнутое подмножество компактного топологического пространства $(X\,,\,\mathcal{T})$, то K -компакт.*

Доказательство. Так как множество K замкнуто в X, то в силу леммы 2.2.6 замкнутые в K множества замкнуты и в X, поэтому утверждение следует из 2.3.2.

Приведем другое доказательство этого факта, которое опирается только на определение компактности с помощью открытых множеств. Пусть $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ -открытое покрытие множества K. Тогда $A_\alpha = V_\alpha \bigcap K$, где множества $\{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ открыты в X, и система множеств $\{\mathbf{C}(K)\,,\, A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ есть открытое покрытие множества X. Следовательно, некоторая конечная система $\{\mathbf{C}(K)\,,\, V_{\alpha(j)} \mid 1 \leq j < N < \infty\}$ есть открытое покрытие множества X, а пересечение множеств этой системы с множеством K есть открытое покрытие множества K. Лемма доказана.

Лемма 2.3.2. *Если K -компактное подмножество хаусдорфова пространства X, то K замкнуто в X.*

Доказательство.Если $K = X$, то K замкнуто. Пусть $\mathbf{C}(K) \neq \emptyset$. Докажем, что $\mathbf{C}(K)$ открыто. Пусть $y \in \mathbf{C}(K)\,,\, x \in K$. Так как пространство X хаусдорфово, то у точек $x\,,\, y$ существуют непрерсекающиеся открытые окрестности

$$V(x) \ni x\,,\, U(y) \ni y\;,\; V(x) \bigcap U(y) = \emptyset. \qquad (2.48)$$

Система открытых в K множеств $\{K \bigcap V(x) \mid x \in K\}$ есть открытое покрытие множества K, поэтому существует состоящая из конечного числа множеств подсистема этой системы $\{K \bigcap V(x_j) \mid 1 \leq j < N < \infty\}$, которая есть покрытие множества K. Пусть $U_j(y)$ -та открытая окрестность точки y, которая удовлетворяет условию (2.48) для окрестности $V(x_j)$, и пусть $U_0(y) = \bigcap\limits_{1 \leq j < N} U_j(y)$. Так как индексов j только конечное число, то окрестность $U_0(y)$ открыта и удовлетворяет условию $U_0(y) \subset \mathbf{C}(K)$. Лемма доказана.

Теорема 2.3.1. *Непрерывный образ компактного пространства есть компакт.*

Доказательство. Пусть

$$f\colon K \mapsto Y$$

-непрерывное отображение компактного пространства K в топологическое пространство Y и

$$f(K) \subset \bigcup_{\alpha} V_\alpha \ , \ V_\alpha \in \mathcal{T}$$

-открытое покрытие образа компакта K при отображении f. Тогда

$$K \subset \bigcup_{\alpha} f^{-1}(V_\alpha)$$

и из открытого покрытия компакта K множествами $f^{-1}(V_\alpha)$ можно выбрать конечное подпокрытие:

$$K \subset \bigcup_{1 \le j < N} f^{-1}(V_{\alpha(j)}).$$

Следовательно,

$$f(K) \subset \bigcup_{1 \le j < N} V_{\alpha(j)},$$

что и доказывает компактность множества $f(K)$.

Докажем теорему Дини.

Теорема 2.3.2. *Пусть f_n -последовательность непрерывных функций на компакте K:*

$$f_n : K \mapsto \mathbb{R}^1.$$

Предположим, что выполнены условия:

$$\forall (x \in K \ , \ n) : 0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x), \tag{2.49}$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0. \tag{2.50}$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \sup \{ f_n(x) \mid x \in K \} = 0. \tag{2.51}$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $\epsilon > 0$ и рассмотрим множества

$$F_n = \{ x \mid f_n(x) \ge \epsilon \}.$$

В силу непрерывности функций $f_n(x)$ множества F_n замкнуты, а так как в силу (2.49) последовательность $f_n(x)$ монотонно невозрастает, то

$$F_{n+1} \subset F_n. \tag{2.52}$$

Из (2.50) следует, что

$$\bigcap_n F_n = \emptyset.$$

Так как множество K компакт, то из (2.52) и условия 2.3.1 следует, что существует такое $n(\epsilon)$, что $F_{n(\epsilon)} = \emptyset$, а это означает, что

$$\forall (n > n(\epsilon)) : \sup\{f_n(x) \mid x \in K\} < \epsilon.$$

Теорема доказана.

Приведем критерии компактности множества в метрическом пространстве.

Сначала дадим

Определение 2.3.6. Множество K в метрическом пространстве M сверхограничено, если каково бы ни было $\epsilon > 0$, найдется такое конечное число шаров $\{b(x_j\,,\,\epsilon) \mid 1 \le j < N < \infty\}$, что множество K содержится в объединении этих шаров:

$$K \subset \bigcup_{1 \le j < N} b(x_j\,,\,\epsilon). \tag{2.53}$$

Раньше свойство (2.53) называлось вполне ограниченностью, но теперь этот термин связывается с другим понятием.

Теорема 2.3.3. *Если K -метрическое пространство, то следующие свойства эквивалентны.*

1. K -компактное пространство.

2. Любая последовательность $\{x_j\}$ точек в пространстве K содержит сходящуюся к точке $x_0 \in K$ подпоследовательность.

3. K есть полное метрическое пространство и сверхограниченное множество.

Доказательство. Докажем, что из первого условия следует второе. Пусть K -компактное пространство и $\{x_j\} \subset K$. Пусть $F_n = \mathbf{Cl}(\{x_j \mid j \ge n\})$. Множества F_n замкнуты и

$$\forall (j < \infty) : \bigcap_{n \le j} F_n \ne \emptyset.$$

Поэтому из условия компактости 2.3.2 следует, что

$$\exists x_0 \,:\, x_0 \in \bigcap_{n \le \infty} F_n.$$

Следовательно, любой шар $b(x_0\,,\,1/m)$ имеет непустое пересечение с каждым из множеств $\{x_j \mid j \geq n\}$:

$$\forall(m > 0\,,\, n < \infty)\ ,\ \exists x_{j(m)}:\ x_{j(m)} \in \{x_j \mid j \geq n\} \bigcap b(x_0\,,\,1/m).$$

Последовательность $\{x_{j(m)}\}$, $m = 1, \ldots$ есть искомая подпоследовательность последовательности $\{x_j\}$.

Докажем, что из второго условия следует третье. Ясно, что из второго условия следует полнота пространства K. Докажем сверхограниченность. Пусть для некоторого $\epsilon > 0$ нужного набора шаров нет. Возьмем произвольно шар $b(x_0\,,\,\epsilon)$. Этот шар согласно предположению не содержит всего пространства K, поэтому в пространстве K существует точка $x_1 \notin b(x_0\,,\,\epsilon)$. Рассмотрим шар $b(x_1\,,\,\epsilon)$. Опять согласно предположению существует такая точка $x_2 \in K$, что

$$x_2 \notin b(x_0\,,\,\epsilon) \bigcup b(x_1\,,\,\epsilon).$$

Так мы построим последовательность точек $\{x_n\} \subset K$, которая удовлетворяет условию

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{0 \leq j \leq n} b(x_j\,,\,\epsilon),$$

поэтому

$$\forall(m > 0\,,\, n > 0) : d(x_n\,,\, x_{n+m}) > \epsilon$$

и последовательность $\{x_n\}$ не может содержать сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности K.

Теперь докажем, что из третьего условия следует первое. Предположим, что третье условие выполнено, но пространство не компактно. Тогда существует открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ пространства K, которое не содержит конечного подпокрытия. В силу сверхограниченности пространства K существует конечное число шаров $\{b(x_j\,,\,1)\,,\, 1 \leq j < N\}$, которые покрывают множество K. По крайней мере один из этих шаров не покрывается никакой конечной системой множеств V_α. Пусть это будет шар $b(x_1\,,\,1)$. Теперь рассмотрим покрытие пространства K шарами радиуса $1/4$. Среди шаров радиуса $1/4$, которые покрывают шар $b(x_1\,,\,1)$, найдем шар $b(x_2\,,\,1/4)$, который не покрывается никакой конечной системой множеств V_α. Продолжая построение, мы получим такую последовательность шаров $\{b(x_n\,,\,4^{-n+1})\}$, что

$$\begin{aligned}&d(x_n\,,\, x_{n+m}) < d(x_n\,,\, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+m-1}\,,\, x_{n+m})\\ &< 4^{-n+1}(1 + 1/4 + \ldots) < 4^{-n+2}/3,\end{aligned}$$

и никакой из шаров $b(x_n\,,\,4^{-n+1})$ не покрывается никакой конечной системой множеств V_α. Последовательность центров этих шаров фундаментальна, и в силу полноты пространства K она сходится к некоторой точке $x_0 \in K$. Существует такое открытое множество $V_{\alpha(0)} \in \{V_\alpha\}$, что $x_0 \in V_{\alpha(0)}$,поэтому существует такой шар $b(x_0\,,\,\epsilon)$, что $b(x_0\,,\,\epsilon) \subset V_{\alpha(0)}$. Так как $d(x_n\,,\,x_0) < 4^{-n+2}/3 \to 0\,,\, n \to \infty$, то при достаточно большом n шар $b(x_n\,,\,4^{-n+1})$ будет целиком содержаться в шаре $b(x_0\,,\,\epsilon)$, и поэтому будет содержаться в множестве $V_{\alpha(0)}$, что противоречит выбору шара $b(x_n\,,\,4^{-n+1})$. Теорема доказана.

Следствие 2.3.1. *Если K -компактное множество в метрическом пространстве, то существует такое счетное множество $\{x_j\} \subset K$, что*

$$K = \mathbf{Cl}\{x_j\}. \tag{2.54}$$

Доказательство. Для каждого целого числа n построим такие шары $b(x_j\,,\,1/n)$, что множество K будет содержаться в конечном объединении этих шаров, а потом рассмотрим объединение центров всех шаров. Это и будет искомое счетное множество.

Пусть $C(X\,,\,M)$ -множество всех непрерывных функций на топологическом пространстве X со значениями в метрическом пространстве $(M\,,\,d_M)$:

$$f \in C(X\,,\,M)\,,\; f\colon X \mapsto M.$$

Мы будем считать, что

$$\sup\{d_M(f(x)\,,\,g(x)) \mid x \in X\} < \infty,$$

так как при необходимости мы можем заменить метрику в M на эквивалентную:

$$d_M \to \frac{d_M}{1+d_M}.$$

Множество $C(X\,,\,M)$ есть метрическое пространство относительно метрики

$$d_C(f,\,,\,g) := \sup\{d_M(f(x)\,,\,g(x)) \mid x \in X\}. \tag{2.55}$$

Лемма 2.3.3. *Если M -полное метрическое пространство, то множество $C(X\,,\,M)$ есть полное метрическое пространство относительно метрики* (2.55).

Доказательство. Если $\{f_n\}$ -фундаментальная в метрике (2.55) последовательность, то в силу полноты пространства M

$$\exists f(x)\;,\; f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{2.56}$$

Докажем, что определенная равенством (2.56) функция $f(x)$ непрерывна. Пусть $x_0 \in X$ и m, n -произвольны. Тогда

$$d_M(f(x_0)\,,\,f_m(x)) \le d_M(f(x_0)\,,\,f_m(x_0)) + d_M(f_m(x_0)\,,\,f_n(x_0)) + d_M(f_n(x_0), f_n(x)) + d_M(f_n(x)\,,\,f_m(x)) \le 2\sup\{d_M(f_n(x)\,,\,f_m(x)) \mid x \in M\} + d_M(f(x_0)\,,\,f_m(x_0)) + d_M(f_n(x)\,,\,f_n(x_0)). \tag{2.57}$$

Выберем $n(\epsilon)$ настолько большим, что

$$\forall (n > n(\epsilon)\,,\,m > n(\epsilon)) : \ \sup\{d_M(f_n(x)\,,\,f_m(x)) \mid x \in X\} < \epsilon/3,$$

и неравенстве (2.57) перейдем к пределу $m \to \infty$.

Получим:

$$\forall (n > n(\epsilon)) : d_M(f(x_0)\,,\,f(x)) \le \frac{2}{3}\epsilon + d_M(f_n(x_0)\,,\,f_n(x)).$$

Фиксируем $n > n(\epsilon)$ и для данного фиксированного n используя непрерывность функции $f_n(x)$ найдем такую окрестность $V(x_0)$ точки x_0, что

$$\forall (x \in V(x_0)) : d_M(f_n(x_0)\,,\,f_n(x)) < \epsilon/3.$$

Тогда будет выполнено неравенство

$$\forall (x \in V(x_0)) : d_M(f(x_0)\,,\,f(x)) < \epsilon,$$

которое доказывает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0. Так как точка x_0 произвольна, то лемма доказана.

Отметим одно свойство функций из пространства $C(K\,,\,M)$.

Лемма 2.3.4. *Если $f \in C(K\,,\,M)$, то*

$$\forall (\epsilon > 0)\,,\,\exists \delta(\epsilon) : \ (d_K(x\,,\,x') < \delta(\epsilon)) \Rightarrow (d_M(f(x)\,,\,f(x')) < \epsilon). \tag{2.58}$$

Доказательство. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда существует такое $\epsilon_0 > 0$, что для любого $n > 0$ есть точки x_n , x'_n, удовлетворяющие условию:

$$d_K(x_n\,,\,x'_n) < 1/n \quad , \quad d_M(f(x_n)\,,\,f(x'_n)) > \epsilon_0.$$

Так как множество K -компакт, то мы можем считать, что последовательности x_n , x'_n сходятся:

$$x_n \to x_0\,,\,x'_n \to x'_0\,,\,n \to \infty.$$

Ясно, что мы должны иметь:

$$x_0 = x'_0.$$

В силу непрерывности функции f:

$$d_M(f(x_n)\,,\, f(x'_n)) < d_M(f(x_n)\,,\, f(x_0)) + d_M(f(x_0)\,,\, f(x'_n)) \to 0,$$

что противоречит нашему предположению. Лемма доказана.

Получим критерии компактности множества в пространстве $C(K\,,\,M)$.

Определение 2.3.7. Множество $A = \{f_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset C(K\,,\,M)$ называется равностепенно непрерывным, если

$$\forall(\epsilon > 0)\,,\, \exists\delta(\epsilon)\colon\ (d_K(x\,,\,x') < \delta(\epsilon)) \Rightarrow (\sup\{d_M(f_\alpha(x)\,,\,f_\alpha(x')) \mid \alpha \in I\} < \epsilon). \tag{2.59}$$

Теперь докажем теорему Арцела-Асколи.

Теорема 2.3.4. *Пусть выполнены следующие условия.*

1. Множество K -компактное метрическое пространство.

2. Множество $A = \{f_\alpha \mid \alpha \in I\}$ равностепенно непрерывно.

3. Существует такое компактное множество $\widetilde{K} \subset M$, что

$$\forall(f_\alpha \in A) : f_\alpha(K) \subset \widetilde{K}. \tag{2.60}$$

Тогда множество A предкомпактно в $C(K\,,\,M)$.

Доказательство. Пусть $\{x_j \mid j = 1, \ldots\}$ -счетное множество, которое удовлетворяет условию (2.54). Докажем, что множество A содержит последовательность, которая сходится в каждой точке множества $\{x_j \mid j = 1, \ldots\}$. Для этого мы используем прием, который называется канторовским диагональным процессом.

Фиксируем точку $x_1 \in \{x_j \mid j = 1, \ldots\}$. В силу условия 2 нашей теоремы выполнено включение

$$B_1 := \{f_\alpha(x_1) \mid \alpha \in I\} \subset \widetilde{K} \subset M. \tag{2.61}$$

Так как множество $\widetilde{K}$ компактно, то множество B_1 содержит сходящуюся последовательность. Пусть это будет последовательность $\{f_{1,n}(x_1) \mid n = 1, \ldots\} \subset B_1$. Рассмотрим множество

$$B_2 := \{f_{1,n}(x_2) \mid n = 1, \ldots\} \subset \widetilde{K} \subset M.$$

Это множество также содержит сходящуюся последовательность. Пусть это будет последовательность значений функций $\{f_{2,n} \mid n = 1,\ldots\} \subset \{f_{1,n} \mid n = 1,\ldots\}$ в точке x_2. Очевидно, что функциональная последовательность $\{f_{2,n}(x) \mid n = 1,\ldots\}$ сходится по краней мере в двух точках: x_1 и x_2. Далее рассмотрим множество

$$B_3 := \{f_{2,n}(x_3) \mid n = 1,\ldots\} \subset \widetilde{K} \subset M.$$

и выберем подпоследовательность $\{f_{3,n} \mid n = 1,\ldots\} \subset \{f_{2,n} \mid n = 1,\ldots\}$, которая будет сходиться в точке x_3. Продолжая этот процесс, мы получим такие функциональные последовательности

$$\{f_{m,n} \mid n = 1,\ldots\} \subset \{f_{m-1,n} \mid n = 1,\ldots\},\, m = 1,\ldots,$$

что последовательность $\{f_{m,n}(x) \mid n = 1,\ldots\}$ сходится по крайней мере в точках $x_1\,,\, x_2\,,\ldots x_m$. Последовательность $\{f_{n,n} \mid n = 1,\ldots\}$ есть искомая последовательность: она сходится в каждой точке множества $\{x_j \mid j = 1,\ldots\}$, так как

$$\forall m : \{f_{n,n} \mid n = 1,\ldots\} \subset \{f_{m,n} \mid n = 1,\ldots\}.$$

Заметим, что в нашем построении мы не использовали компактности множества K.

Теперь докажем, что последовательность $\{f_{n,n} \mid n = 1,\ldots\}$ сходится в метрике пространства $C(K\,,\,M)$. Фиксируем $\epsilon > 0$ и найдем соответсвующее по (2.59) число $\delta(\epsilon)$. Так как множество K -метрический компакт, то существует конечное число шаров $\{b(y_j\;\delta(\epsilon)/2) \mid 1 \le j \le N\}$, которые покрывают все пространство K. В каждом шаре $b(y_j)\;\delta(\epsilon)/2)$ есть точка из множества (2.54). Пусть это будет точка $x_j \in b(y_j\;\delta(\epsilon)/2)$. Пусть $x \in K$ -произвольная точка. Предположим, что эта точка принадлежит шару $b(y_j\;\delta(\epsilon)/2)$. Так как точки x и x_j принадлежат одному шару $b(y_j\;\delta(\epsilon)/2)$, то $d_K(x\,,\,x_j) < \delta(\epsilon)$, и в силу (2.59) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &d_M(f_{n,n}(x)\,,\, f_{m,m}(x)) \le d_M(f_{n,n}(x)\,,\, f_{n,n}(x_j)) + \\ &d_M(f_{m,m}(x_j)\,,\, f_{n,n}(x_j)) + d_M(f_{m,m}(x)\,,\, f_{m,m}(x_j)) \\ &\le 2\epsilon + d_M(f_{m,m}(x_j)\,,\, f_{n,n}(x_j)). \end{aligned} \tag{2.62}$$

Так как последовательность $\{f_{n,n}(x_j) \mid n = 1,\ldots\}$ сходится в кождой точке x_j, то

$$\exists n(\epsilon)\,,\, \forall (n > n(\epsilon)\,,\, m > n(\epsilon)) \,:\, \sup\{d_M(f_{m,m}(x_j)\,,\, f_{n,n}(x_j) \mid 1 \le j \le N\}) < \epsilon\;,\;.$$

Тогда из (2.62) следует, что

$$\forall (n > n(\epsilon)\,,\, m > n(\epsilon)) :\; \sup\{d_M(f_{n,n}(x)\,,\, f_{m,m}(x)) \mid x \in K\} \le 3\epsilon.$$

Итак, мы установили, что множество A содержит фундаментальную в метрике пространства $C(K\,,\,M)$ последовательность, а отсюда и следует, что замыкание множества A есть компакт. Теорема доказана.

Теперь мы перейдем к теореме Стоуна-Вейрштрасса, которая описывает структуру пространства $C(K\,,\,\mathbb{C}^1)$. Сначала дадим несколько определений.

Определение 2.3.8. Множество функций $\mathcal{A}$ называется алгеброй функций над полем действительных (комплексных) чисел, если

1. Множество функций $\mathcal{A}$ есть линейное пространство над полем действительных (комплексных) чисел относительно операций поточечного сложения и умножения на число:

$$\forall (f \in \mathcal{A}\,,\, g \in \mathcal{A}) : \alpha f + \beta g \in \mathcal{A}$$

для любых действительных (комплексных) чисел $\alpha\,,\,\beta$.

2. Множество функций $\mathcal{A}$ замкнуто относительно операции поточечного умножения:

$$\forall (f \in \mathcal{A}\,,\, g \in \mathcal{A}) : fg \in \mathcal{A}.$$

Определение 2.3.9. Множество заданных на K функций $\mathcal{A}$ разделяет точки множества K, если для любой пары не совпадающих точек $x \in K\,,\, y \in K$ в множестве $\mathcal{A}$ существует такая функция $f \in \mathcal{A}$, что $f(x) \neq f(y)$.

В дальнейшем мы не будем уточнять, над каким полем рассматривается алгебра функций, если это ясно из контекста или не имеет значения.

Приведем примеры.

Пример 2.3.1. Множество всех полиномов на отрезке $[0\,,\,1]$ есть алгебра функций.

Пример 2.3.2. Множество функций вида

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ -произвольный полином, а $Q(x)$ -произвольный полином, не имеющий корней на отрезке $[0\,,\,1]$, есть алгебра функций на отрезке $[0\,,\,1]$.

Пример 2.3.3. Множество всех конечных линейных комбинаций функций $\{\sin nx\,,\,\cos nx \mid n = 0, 1, \ldots\}$ есть алгебра функций на отрезке $[0\,,\,2\pi]$.

Пример 2.3.4. Множество всех конечных линейных комбинаций функций $\{\exp(inx) \mid n = 0, 1, \ldots\}$ есть алгебра функций на отрезке $[0\,,\,2\pi]$.

В ниже следующей теореме речь идет об алгебре действительных функций над полем действительных чисел.

Теорема 2.3.5. *Предположим, что выполнены следующие условия.*

1. Множество K есть компакт.

2. Алгебра непрерывных функций $\mathcal{A} \subset C(K\,,\, \mathbb{R}^1)$ разделяет точки множества K.

3. Алгебра непрерывных функций $\mathcal{A}$ содержит функцию, тождественно равную единице:

$$(f_0(x) \equiv 1) \Rightarrow (f_0 \in \mathcal{A}).$$

Тогда замыкание алгебры $\mathcal{A}$ в метрике пространства $C(K\,,\, \mathbb{R}^1)$ совпадает с пространством $C(K\,,\, \mathbb{R}^1)$:

$$\mathbf{Cl}(\mathcal{A}) = C(K\,,\, \mathbb{R}^1).$$

Эта теорема называется теоремой Стоуна-Вейрштрасса. Смысл этой теоремы состоит в том, что если заданное на компакте K множество непрерывных функций $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям 2-3, то любую непрерывную на компакте K функцию можно сколь угодно точно в равномерной метрике приблизить функцией из множества $\mathcal{A}$. Заметим, что если множество $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям 2-3, то и множество $\mathbf{Cl}(\mathcal{A})$ также удовлетворяет условиям 2-3.

Перейдем к доказательству теоремы. Сначала докажем, что если $f \in \mathcal{A}$, то $|f| \in \mathbf{Cl}(\mathcal{A})$. Пусть $a = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}$ и $P_n(t)$ -произвольная последовательность полиномов, которая равномерно на отрезке $[0\,,\,1]$ сходится к функции $\sqrt{t}$:

$$\sup|P_n(t) - \sqrt{t}| \mid t \in [0\,,\,1]\} \to 0\;,\; n \to \infty.$$

Такая последовательность полиномов существует. Можно взять соответствующие полиномы Бернштейна, можно взять определяемые по индукции полиномы

$$P_1(t) = 1\;,\; P_{n+1}(t) = P_n(t) + (t - P_n(t)^2)/2.$$

Ясно, что $P_n((f(x)/a)^2) \in \mathcal{A}$ и

$$\sup|aP_n((f(x)/a)^2) - |f(x)|| \mid x \in K\} \to 0\,,\, n \to \infty.$$

Итак, мы доказали, что $|f| \in \mathbf{Cl}(\mathcal{A})$. Отсюда следует, что

$$\forall (f_i \in \mathcal{A}):\; \max\{f_i \mid 1 \le i \le N\} \in \mathbf{Cl}(\mathcal{A})\,,\, \min\{f_i \mid 1 \le i \le N\} \in \mathbf{Cl}(\mathcal{A}). \tag{2.63}$$

Пусть теперь $\phi(x)$ -произвольная функция из пространства $C(K\,,\mathbb{R}^1)$, $z'\,,\,z''$ -произвольные точки из K. Построим такую функцию $f(z'\,,\,z'';x)\in\mathcal{A}$, которая удовлетворяет условиям:

$$f(z'\,,\,z'';z')=\phi(z')\;,\;f(z'\,,\,z'';z'')=\phi(z''). \tag{2.64}$$

Такая функция обязятельно существует. Действительно, пусть $f_0(z'\,,\,z'';x)\in\mathcal{A}$ существующая по условию функция, которая разделяет точки $z'\,,\,z''$:

$$f_0(z'\,,\,z'';z')\neq f_0(z'\,,\,z'';z'')\text{ при }z'\neq z''.$$

Тогда функцию $f(z'\,,\,z'';x)$ мы можем построить как линейную комбинацию

$$f(z'\,,\,z'';x)=\alpha f_0(z'\,,\,z'';x)+\beta,$$

так как для определения констант $\alpha\,,\,\beta$ мы получаем разрешимую систему уравнений

$$\begin{gathered}\phi(z')=\alpha f_0(z'\,,\,z'';z')+\beta\\ \phi(z'')=\alpha f_0(z'\,,\,z'';z'')+\beta.\end{gathered}$$

Теперь фиксируем произвольно $\epsilon>0$ и определим открытые окрестности

$$V(z'\,,\,z'')=\{x\mid f(z'\,,\,z'';x)<\phi(x)+\epsilon\}.$$

Ясно, что

$$z'\in V(z'\,,\,z'').$$

При фиксированном z'' открытые множества $\{V(z'\,,\,z'')\mid z'\in K\}$ образуют покрытие компакта K, поэтому существует конечное покрытие компакта K множествами $V(z'\,,\,z'')$:

$$K\subset\bigcup_{1\leq j\leq N}V(z'_j\,,\,z'').$$

Пусть

$$g(z''\,;\,x):=\min\{f(z'_j\,,\,z''\,;\,x)\mid 1\leq j\leq N\}.$$

В силу (2.63) справедливо включение

$$g(z'';x)\in\mathbf{Cl}(\mathcal{A}).$$

Ясно, что

$$\forall(x\in K):g(z''\,;\,x)<\phi(x)+\epsilon\;;\text{ и }g(z'';z'')=\phi(z'').$$

Теперь определим открытые окрестности

$$U(z'') = \{x \mid g(z''; x) > \phi(x) - \epsilon\}.$$

Так как $z'' \in U(z'')$, то окрестности $\{U(z'') \mid z'' \in K\}$ образуют открытое покрытие компактного пространства K, и поэтому существует такой конечный набор точек $\{z''_j \mid 1 \leq j \leq N'\}$, что

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N'} U(z''_j).$$

Определим функцию

$$\widetilde{g}(x) := \max\{g(z''_j; x) \mid 1 \leq j \leq N\}.$$

Так как множество $\mathbf{Cl}(\mathcal{A})$ замкнуто, то в силу (2.63) справедливо включение

$$\widetilde{g}(x) \in \mathbf{Cl}(\mathcal{A}).$$

Очевидно, что

$$\forall (x \in K) : \phi(x) - \epsilon < \widetilde{g}(x) < \phi(x) + \epsilon,$$

Поэтому

$$d_C(\phi\,, \widetilde{g}) < \epsilon.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы сразу же следует теорема Стоуна-Вейрштрасса для алгебры функций над полем комплексных чисел. Ниже символом z^* мы обозначаем число, комплексно-сопряженное числу z:

$$(a + ib)^* = a - ib$$

и алгебра понимается как алгебра над полем комплексных чисел.

Теорема 2.3.6. *Предположим, что выполнены следующие условия.*

1. Множество K есть компакт.

2. Алгебра непрерывных функций $\mathcal{A} \subset C(K\,, \mathbb{C}^1)$ разделяет точки множества K.

3. Алгебра непрерывных функций $\mathcal{A}$ содержит функцию, тождественно равную единице:

$$(f_0(x) \equiv 1) \Rightarrow (f_0 \in \mathcal{A}).$$

4. Алгебра непрерывных функций $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию:

$$(f \in \mathcal{A}) \Rightarrow (f^* \in \mathcal{A}). \tag{2.65}$$

Тогда замыкание алгебры $\mathcal{A}$ в метрике пространства $C(K\,,\,\mathbb{C}^1)$ совпадает с пространством $C(K\,,\,\mathbb{C}^1)$:

$$\mathbf{Cl}(\mathcal{A}) = C(K\,,\,\mathbb{C}^1).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что в силу условия (2.65) содержащееся в $\mathcal{A}$ подмножество функций

$$\mathcal{A}' = \{g \mid (g = (f + f^*)/2i) \vee (g = (f - f^*)/2)\ ,\ f \in \mathcal{A}\}$$

есть алгебра функций над полем действительных чисел, которая удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, и в $\mathcal{A}'$ можно найти функции, которые сколь угодно точно приближают по отдельности действительную и мнимую часть функции из $C(K\,,\,\mathbb{C}^1)$, а потом взять линейную комбинацию таких функций.

Если компакт K есть подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}^1$, то в силу условия (2.65) алгебра $\mathcal{A}$ *не может* состоять из аналитических функций, и поэтому к задаче аппроксимации аналитических функций аналитическими теорема Стоуна-Вейрштрасса напрямую не применима.

2.4 Фильтры, ультрафильтры и теорема Тихонова.

В метрическом пространстве понятия предела функции, замыкания множества и компактности могут быть описаны в терминах сходящихся последовательностей. В общем случае для этого требуется обобщение понятия предела последовательности: понятие предела по фильтру. При изучении сходимости в топологических пространствах теория фильтров оказывается мощным и удобным инструментом и в некоторых отношениях она проще, чем теория, основанная на понятии последовательности или понятии сходимости по Муру-Смиту, однако теория фильтров требует некоторых навыков работы с объектами, которые не строятся явно, но существование которых постулируется на основе аксиомы выбора.

Определение 2.4.1. Фильтром в множестве X называется такая система $\mathcal{F}$ его подмножеств, которая удовлетворяет условиям:

1. Если $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathcal{F}$.
2. Если $A_1 \in \mathcal{F}$, $A_2 \in \mathcal{F}$, то $A_1 \bigcap A_2 \in \mathcal{F}$.
3. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Приведем примеры.

Пример 2.4.1. Пусть множество X состоит из трех элементов: $X = \{a\,,\,b\,,\,c\}$. Тогда следующие системы его подмножеств являются фильтрами:

$$\mathcal{F}_1 = \{[a]\,,\,[a\,,\,b]\,,\,[a\,,\,c]\,,\,[a\,,\,b\,,\,c]\}. \tag{2.66}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{[a\,,\,b]\,,\,[a\,,\,b\,,\,c]\}. \tag{2.67}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{[b]\,,\,[a\,,\,b]\,,\,[b\,,\,c]\,,\,[a\,,\,b\,,\,c]\}. \tag{2.68}$$

Пример 2.4.2. Пусть X -топологическое пространство и $\mathcal{F}_x$ -система всех окрестностей точки x. Тогда $\mathcal{F}_x$ -фильтр.

Лемма 2.4.1. *Если $\mathcal{F}_\alpha$, $\alpha \in I$ -фильтры, то их пересечение $\mathcal{F} = \bigcap\limits_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$ есть фильтр.*

Доказательство. Так как $\forall\alpha\colon X \in \mathcal{F}_\alpha$, то пересечение $\mathcal{F}$ не пусто. Так как $\forall\alpha : \emptyset \notin \mathcal{F}_\alpha$, то $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B$. Тогда $\forall\alpha\colon A \in \mathcal{F}_\alpha$, поэтому $\forall\alpha\colon B \in \mathcal{F}_\alpha$ и поэтому $B \in \mathcal{F}$. Аналогично доказывается, что пересечение двух множеств из $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Если система $\mathcal{F}_0$ подмножеств множества X удовлетворяет условиям:

1bf. Если $A \in \mathcal{F}_0,$, $B \in \mathcal{F}_0$, то существует такое $C \in \mathcal{F}_0$, что $C \subset A\bigcap B$.

2bf. $\emptyset \notin \mathcal{F}_0$,

то система $\mathcal{F}$ подмножеств множества X, которая состоит из тех подмножеств множества X, каждое из которых содержит подмножество из $\mathcal{F}_0$, есть фильтр. Удовлетворяющая условиям 1bf-2bf система подмножеств $\mathcal{F}_0$ называется *базой фильтра* $\mathcal{F}$, если $\mathcal{F}$ есть наименьший фильтр, который содержит $\mathcal{F}_0$. Такой фильтр всегда существует: это есть пересечение всех фильтров, содержащих $\mathcal{F}_0$.

Пусть $\mathcal{F}_{00}$ система подмножеств множества X, которая удовлетворяет условиям:

$$\emptyset \notin \mathcal{F}_{00}\ ,\ \forall(A \in \mathcal{F}_{00}\,,\,B \in \mathcal{F}_{00})\ :\ A\bigcap B \neq \emptyset. \tag{2.69}$$

Тогда система $\mathcal{F}_0$ подмножеств множества X, которая состоит из пересечений конечного числа множеств из системы $\mathcal{F}_{00}$, удовлетворяет условиям 1bf-2bf и является базой фильтра. Система $\mathcal{F}_{00}$ в этой ситуации называется предбазой фильтра $\mathcal{F}$ с базой $\mathcal{F}_0$.

Таким образом, для задания фильтра достаточно задать удовлетворяющую условиям (2.69) систему множеств, затем построить базу фильтра, а потом и сам фильтр.

Рассмотрим топологичекое пространство и пусть $\mathcal{B}_x$ -состоящая из открытых множеств база топологии в точке x. Легко видеть, что $\mathcal{B}_x$ есть база фильтра окрестностей точки x.

Пусть

$$f\colon X \mapsto Y$$

-отображение пространства X в Y.

Лемма 2.4.2. *Если $\mathcal{F}_0$ -база фильтра в пространстве X, то $\widetilde{\mathcal{F}_0} = \{A \mid A = f(B)\,,\ B \in \mathcal{F}\}$ -база фильтра в пространстве Y.*

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B),$$

поэтому если $C \subset A \bigcap B$, то $f(C) \subset f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$.

Определение 2.4.2. Фильтр $\mathcal{F}'$ мажорирует фильтр $\mathcal{F}$ (мы будем обозначать это так: $\mathcal{F}' \succ \mathcal{F}$), если $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, т.е. если каждое множество, которое принадлежит фильтру $\mathcal{F}$, принадлежит и фильтру $\mathcal{F}'$.

В примере 2.4.1 фильтр $\mathcal{F}_1$ мажорирует фильтр $\mathcal{F}_2 : \mathcal{F}_1 \succ \mathcal{F}_2$.

Мы будем называть фильтры сравнимыми, если один из них мажорирует другой. В примере 2.4.1 фильтры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ сравнимы, а фильтры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ -нет. Заметим, что в силу принятого нами соглашения $A \subset A$, поэтому для каждого фильтра справедливо соотношение $\mathcal{F} \succ \mathcal{F}$. Если X -отделимое топологическое пространство , $x \neq y$, а $\mathcal{F}_x$ и $\mathcal{F}_y$ -фильтры окрестностей точек x и y, то фильтры $\mathcal{F}_x$ и $\mathcal{F}_y$ не сравнимы, так как существуют такие окрестности $O_x \in \mathcal{F}_x$, $O_y \in \mathcal{F}_y$, что $O_x \bigcap O_y = \emptyset$, поэтому $O_x \notin \mathcal{F}_y$, $O_y \notin \mathcal{F}_x$.

Если $\mathcal{F}_{\alpha 2} \succ \mathcal{F}_{\alpha 1}$ и $\mathcal{F}_{\alpha 3} \succ \mathcal{F}_{\alpha 2}$, то $\mathcal{F}_{\alpha 3} \succ \mathcal{F}_{\alpha 1}$, поэтому введеным соотношением $\succ$ множество всех фильтров на данном пространстве X частично упорядоченно .

Лемма 2.4.3. *Пусть $\{\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \in I\}$ -множество фильтров, каждые два из которых сравнимы. Тогда существует такой фильтр $\mathcal{F}$, который мажорирует все фильтры $\mathcal{F}_\alpha$:*

$$\forall(\alpha \in I) : \mathcal{F} \succ \mathcal{F}_\alpha. \tag{2.70}$$

Доказательство. Положим

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha. \tag{2.71}$$

Докажем, что определенное соотношением (2.71) семейство множеств $\mathcal{F}$ есть фильтр. Ясно, что $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Пусть $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$. Тогда $A \in \mathcal{F}_{\alpha 1}$ и $B \in$

$\mathcal{F}_{\alpha 2}$. Допустим, что $\mathcal{F}_{\alpha 2} \succ \mathcal{F}_{\alpha 1}$. Тогда $A \in \mathcal{F}_{\alpha 2}$, следовательно, $A \bigcap B \in \mathcal{F}_{\alpha 2}$ и поэтому $A \bigcap B \in \mathcal{F}$. Аналогично доказывается, что если $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B$, то $B \in \mathcal{F}$. Соотношение (2.70) очевидно. Лемма доказана.

Заметим, что если два фильтра не сравнимы, то их объединение может не быть фильтром. В примере 2.4.1 объединение фильтров $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ не есть фильтр, так как $[a] \bigcap [b] = \emptyset$.

Определение 2.4.3. Фильтр $\mathcal{F}$ называется ультрафильтром, если он не содержится ни в каком другом фильтре, т.е. если из $\mathcal{F}_\alpha \succ \mathcal{F}$ следует, что $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}$.

В примере 2.4.1 фильтры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ есть ультафильтры.

Из аксиомы выбора в форме аксиомы Куратовского-Цорна (см. стр. 147)и леммы 2.4.3 следует, что каждый фильтр содержится в некотором ультрафильтре.

Лемма 2.4.4. *Если $\mathcal{F}$ -ультрафильтр и $A \bigcup B \in \mathcal{F}$, то либо $A \in \mathcal{F}$, либо $B \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. Пусть $A \bigcup B \in \mathcal{F}$ и пусть $\widetilde{\mathcal{F}}$ -система всех подмножеств множества X, которые удовлетворяют условию:

$$((A \bigcup M) \in \mathcal{F}) \Rightarrow (M \in \widetilde{\mathcal{F}}).$$

Из определения фильтра следует, что $\widetilde{\mathcal{F}}$ -фильтр. Если $A \notin \mathcal{F}$ и $B \notin \mathcal{F}$, то $\widetilde{\mathcal{F}} \succ \mathcal{F}$, так как $B \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Следовательно, $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ и либо $A \in \mathcal{F}$, либо $B \in \mathcal{F}$. Лемма доказана.

Если $\mathcal{F}$ -ультрафильтр в пространстве X, то $X \in \mathcal{F}$, поэтому из леммы 2.4.4 вытекает

Следствие 2.4.1.

Если $\mathcal{F}$ -ультрафильтр в пространстве X и $A \subset X$, то либо $A \in \mathcal{F}$, либо $\mathbf{C}(A) \in \mathcal{F}$.

Определение 2.4.4. Точка x есть предел фильтра $\mathcal{N}$, если фильтр $\mathcal{N}$ мажорирует фильтр окрестностей точки x.

Из определения следует, что предел фильтра окрестностей точки x есть точка x.

Лемма 2.4.5. *В отделимом топологическом пространстве фильтр может иметь только один предел.*

Доказательство.Пусть точки x , y являются пределами фильтра $\mathcal{N}$, а O_x , O_y -такие окрестности точек x и y, что $O_x \bigcap O_y = \emptyset$. Так как фильтр $\mathcal{N}$ мажорирует фильтры окрестностей точек x и y, то $O_x \in \mathcal{N}$, $O_y \in \mathcal{N}$, а это невозможно, так как пересечение любых двух принадлежащих фильтру множеств должно быть не пусто.

Пусть X и Y -топологические пространсива,

$$f \colon X \mapsto Y$$

-отображение пространства X в пространство Y.

Определение 2.4.5. Точка $y \in Y$ есть предел функции f по фильтру окрестностей точки x, если точка y есть предел фильтра с базой

$$\mathcal{N}_0 = \{A \mid A = f(V(x))\,,\, V(x) \in \mathcal{F}_x\}, \tag{2.72}$$

где $\mathcal{F}_x$ -фильтр окрестностей точки x.

Теорема 2.4.1. *Функция f непрерывна в точке x в том и только том случае, если фильтр с базой* (2.72) *сходится к точке $y = f(x)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}_y$ -фильтр с базой $\mathcal{N}_0$. Этот фильтр сходится к точке y в том и только том случае, если для любой окрестости $U(y)$ точки y выполнено включение $U(y) \in \mathcal{N}_y$. Согласно определению базы фильтра (2.72) это включение выполнено тогда и только тогда, когда существует такая окрестность $V(x)$ точки x, что $f(V(x)) \subset U(y)$. Это включение выполнено в том и только том случае, если для окрестности $V(x)$ выполнено включение $V(x) \subset f^{-1}(U(y))$. А это включение выполнено тогда и только тогда, если при отображении f прообраз любой окрестности точки $y = f(x)$ есть окрестность точки x. Теорема доказана.

По-существу, данная теорема утверждает, что функция непрерывна в данной точке в том и только том случае, если ее значение в данной точке есть предел ее значений при стремлении аргумента к этой точке. Мы видим, что понятие фильтра позволило сформулировать понятие непрерывности функции в привычных терминах анализа.

Определение 2.4.6. Точка x есть точка прикосновения фильтра $\mathcal{F}$, если она есть точка прикосновения для каждого множества $A \in \mathcal{F}$.

Лемма 2.4.6. *Если точка x есть точка прикосновения для ультафильтра $\mathcal{F}$, то ультрафильтр $\mathcal{F}$ сходится к точке x.*

Доказательство. Пусть $V(x)$ -окрестность точки x. Так как $\mathcal{F}$ -ультрафильтр, то либо $V(x) \in \mathcal{F}$, либо $\mathbf{C}(V(x)) \in \mathcal{F}$. Однако последнее включение не может быть выполнено, так как каждое множество из $\mathcal{F}$ пересекается с $V(x)$. Таким образом, фильтр $\mathcal{F}$ мажорирует фильтр окрестностей точки x, т.е. сходится к этой точке.

Теорема 2.4.2. *Пространство K компактно в том и только том случае, если в нем всякий ультрафильтр сходится.*

Доказательство.Пусть в топологическом пространстве K есть фильтр $\mathcal{F}$, который не имеет предела. Докажем, что K не компакт. Рассмотрим замыкания произвольной системы множеств $A_\alpha \in \mathcal{F}$. Так как $\mathbf{Cl}(A_\alpha) \in \mathcal{F}$, то любой конечный набор множеств $\{\mathbf{Cl}(A_{\alpha(j)})\ ,\ 1 \leq j \leq N\}$ имеет непустое пересечение, поэтому

$$\bigcap_{1\leq j\leq N} \mathbf{Cl}(A_{\alpha(j)}) \neq \emptyset. \tag{2.73}$$

Если

$$\bigcap_{\alpha} \mathbf{Cl}(A_\alpha) \neq \emptyset,$$

то точка $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha} \mathbf{Cl}(A_\alpha)$ есть точка прикосновения для всех множеств A_α и поэтому есть предел ультрафильтра $\mathcal{F}$. Следовательно,

$$\bigcap_{\alpha} \mathbf{Cl}(A_\alpha) = \emptyset. \tag{2.74}$$

Из (2.73) и (2.74) следует, что пространство K не компакт.

Пусть у любого ультрафильтра в K есть предел. Докажем, что K - компакт. Рассмотрим произвольную систему замкнутых множеств $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$, которая удовлетворяет условию (2.74). В силу этого условия система $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ есть базис некоторого ультрафильтра $\mathcal{F}$. Пусть x_0 - предел этого ультрафильтра. Так как точка x_0 есть точка прикосновения для всех множеств $A_\alpha \in \mathcal{F}$, то $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ и

$$\bigcap_{\alpha} A_\alpha \neq \emptyset.$$

Следовательно, K -компакт. Теорема доказана.

Следующую доказанную А. Н. Тихоновым теорему некотрые топологи считают одним из самых важных результатов общей топологии.

Теорема 2.4.3. *Декартово произведение компактных топологических пространств компактно в тихоновской топологии.*

Доказательство. Пусть $\{K_\alpha \mid \alpha \in I\}$ -семейство компактных топологических пространств,

$$K = \prod_{\alpha} K_\alpha\,,\ \alpha \in I$$

-декартово произведение пространств $\{K_\alpha \mid \alpha \in I\}$, рассматриваемое как топологическое пространство с тихоновской топологией. Пусть $\mathcal{F}$ - ультрафильтр в K. Нам нужно доказать, что он сходится. Рассмотрим отображения проектирования:

$$P(\alpha) : K \mapsto K_\alpha \,,$$

которые точке $\{x(\alpha) \mid \alpha \in I\} \in K$ ставят в соответствие точку $x(\alpha) \in K_\alpha$. По определению тихоновской топологии в K каждое отображение $P(\alpha)$ непрерывно. В силу леммы 2.4.2 семейство множеств

$$\mathcal{F}_{0\alpha} = \{A \mid A = P(\alpha)(B) \,,\, B \in \mathcal{F}\} \tag{2.75}$$

есть база некоторого ультрафильтра в пространстве K_α. Обозначим ультрафильтр с базой (2.75) символом $\mathcal{F}_\alpha$. Так как пространство K_α компактно, ультрафильтр $\mathcal{F}_\alpha$ сходится к некоторой точке $x(\alpha) \in K_\alpha$. Докажем, что ультрафильтр $\mathcal{F}$ сходится к точке $\{x(\alpha) \mid \alpha \in I\} \in K$. Для этого нам нужно доказать, что ультрафильтр $\mathcal{F}$ мажорирует фильтр окрестностей точки $\{x(\alpha) \mid \alpha \in I\}$. Для этого нам достаточно доказать, что для некоторой локальной базы окрестностей точки $\{x(\alpha) \mid \alpha \in I\} \in K$ каждый элемент базы содержится в фильтре $\mathcal{F}$. Пусть $\{x(\alpha) \mid \alpha \in I\} \in A$,

$$A = \left(\prod_{1\le j\le N} O(\alpha(j))\right) \times \left(\prod_{\beta} K_\beta\right) \,,\, \beta \neq \alpha(j) \,,\, 1 \le j \le N \,, \tag{2.76}$$

где $O(\alpha(j)) \ni x(\alpha(j))$ -открытые в $K_{\alpha(j)}$ множества. Множество A есть элемент локальной базы тихоновской топологии, который содержит точку $\{x(\alpha) \mid \alpha \in I\}$. Так как ультрафильтр $\mathcal{F}_{\alpha(j)}$ сходится к точке $x(\alpha(j)) \in O(\alpha(j))$, то каждое открытое множество $O(\alpha(j))$ содержит некоторый элемент базы фильтра $\mathcal{F}_{\alpha(j)}$, поэтому

$$\exists \widetilde{A}_j : \widetilde{A}_j = P(\alpha(j))(\widetilde{B}_j) \,,\, \widetilde{B}_j \in \mathcal{F}.$$

Множество

$$\widetilde{B} = \left(\bigcap_{1\le j\le N} \widetilde{B}_j\right) \times \left(\prod_{\beta} K_\beta\right) \,,\, \beta \neq \alpha(j) \,,\, 1 \le j \le N \tag{2.77}$$

принадлежит ультрафильтру $\mathcal{F}$ (ибо пересечение в (2.77) берется по конечному числу индексов -и именно в этом месте существенно используется определение тихоновской топологии) и содержится в A:

$$\widetilde{B} \subset A \,,$$

поэтому ультрафильтр $\mathcal{F}$ мажорирует фильтр окрестностей точки $\{x(\alpha) \mid \alpha \in I\} \in K$, т.е. сходится к этой точке. Теорема доказана.

2.5 Коментарии и литературные указания.

В этой главе мы существенно использовали понятие эквивалентности и аксиому выбора Хаусдорфа. Напомним соответствующие определения и некоторые сведения из теории множеств.

Рассмотрим некоторое множество A и некотрое множество упорядоченных пар элементов множества A. Если пара $a \in A$, $b \in A$ (a -первый элемент, b -второй) принадлежит рассматриваемому множеству пар, то мы будем говорит, что между a и b установлено бинарное соотношение R и будем писать aRb.

Бинарное соотношение R называется *рефлексивным*, если

$$\forall a : aRa.$$

Бинарное соотношение R называется *транзитивным*, если

$$(aRb \wedge bRc) \Rightarrow (aRc).$$

Бинарное соотношение R называется *симметричным*, если

$$(aRb) \Rightarrow (bRa).$$

Бинарное соотношение R называется *антисимметричным*, если

$$(aRb \wedge bRa) \Rightarrow (a = b).$$

Например, пусть A -это множество всех кругов на плоскости. Мы скажем, что круг a находится в соотношении R с кругом b, если эти круги пересекаются. Это бинарное соотношение будет рефлексивным и симметричным, но не будет транзитивным и антисимметричным. Скажем, что круги a и b находятся в соотношении R, если круг a содержится в круге b. Это соотношение будет рефлексивным, транзитивным и антисимметричным.

Рефлексивное, транзитивное и симметричное бинарное сотношение называется *соотношением эквивалентности* и обозначается так: $a \sim b$.

Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное сотношение называется *частичной упорядоченностью* и обозначается так: $a \leq b$ (или $a \preceq b$). Если справедливо соотношение $a \leq b$, то говорят, что a *содержится* в b. В множестве с частичной упорядочностью элемент a называется *максимальнам*, если из соотношения $a \leq b$ следует, что $a = b$.

Элемент $a \in A$ частично упорядоченного множества называется *максимальным* для подмножества B, если

$$\forall (b \in B) : b \leq a.$$

Подмножество B частично упорядоченного множества называется *цепью*, если справедливо утверждение:

$$\forall(a \in B\,,\, b \in B) \Rightarrow ((a \leq b) \vee (b \leq a)).$$

Следующие два утверждения эквивалентны и являются двумя (существуют и другие) эквивалентными формулировками аксиомы выбора.

Утверждение 2.5.1. *Если всякая цепь частично упорядоченного множества обладает верхней гранью, то любой элемент множества содержится в некотором максимальном элементе.*

Эта форма аксиомы выбора называется леммой (теоремой) Куратовского-Цорна.

Утверждение 2.5.2. *Пусть I -произвольное множество индексов и X_τ -такая система подмножеств множества M, что*

$$\forall(\tau \in I) : X_\tau \neq \emptyset\;,\; \forall(\alpha \neq \beta) :\; X_\alpha \bigcap X_\beta = \emptyset.$$

Тогда на множестве I существует функция

$$x(\tau) :\; I \ni \tau \mapsto x(\tau) \in X_\tau,$$

или эквивалентно:

$$\exists(M_0 \subset M)\,,\, \forall\tau \colon M_0 \bigcap X_\tau = x(\tau).$$

Типичный пример применения аксиомы выбора -рассуждения по принципу “транфинитной индукции” (см. стр. 171, конец доказательства теоремы Хана-Банаха). Аксиома выбора часто используется по умолчанию (например, при рассмотрении декартова произведения множеств), и мы тоже не вседа будем фиксировать внимание на ее использовании.

Упомянутые в главе 2 элементарные сведения о метрических пространствах являются естественным обобщением тех представлений, которые можно получить при рассмотрении рисунков на листе бумаги, однако не все так просто, и геометрическая интуиция в теории метрических пространств не должна вводить читателя в заблуждение. Мы позволим себе привести цитату из сочинения Н. Бурбаки [12], стр. 34:

“...замыкание открытого шара может отличаться от замкнутого шара с тем же ценром и радиусом, граница замкнутого шара может отличаться от сферы с тем же центром и радиусом, открытый (или замкнутый) шар может не быть связным, а сфера может быть пустым множеством.”

Соответствующие примеры читатель может наийти в упражнениях в цитированной выше книге.

Классичеким руководством по элементарной теории метрических и топологических пространств являются книги [1] , [2]. Учебник [15] является стандартным источником ссылок для аналитиков. Для углубленного изучения общей топологии можно рекомендовать книгу [14]. Краткое и ясное изложение основных понятий общей топологии есть в книге [13].

Глава 3

Банаховы пространства.

3.1 Основные определения.

В дальнейшем по умолчанию все линейные пространства мы будем рассматривать над полем комплексных чисел и будем специально отмечать случай, когда линейное пространство рассматривается над полем действительных чисел.

Определение 3.1.1. Заданная на линейном пространстве $\mathcal{L}$ функция

$$\| \cdot \| \colon \mathcal{L} \mapsto \mathbb{R}^1_+$$

называется нормой, если эта функция принимает неотрицательные значения:

$$\forall (x \in \mathcal{L}) \, : \, \|x\| \geq 0,$$

невырождена:

$$(\|x\| = 0) \iff (x = 0),$$

удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\forall (x \in \mathcal{L} \, , \, y \in \mathcal{L}) \, : \, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

и однородна:

$$\forall (\lambda \in \mathbb{C}^1 \, , \, x \in \mathcal{L}) \, : \, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|.$$

Определение 3.1.2. Нормированным пространством называется линейное простанство, рассматриваемое вместе с заданной на нем нормой.

Из определения нормы следует, что функция

$$d(x \, , \, y) = \|x - y\| \tag{3.1}$$

удовлетворяет аксиомам расстояния (метрики), и нормированное пространство по умолчанию обычно рассматривается как метрическое пространство с метрикой (3.1).

Из неравенства треугольника следует, что

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Так как правая часть этого неравенства симметрична по x , y, то отсюда следует, что

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \tag{3.2}$$

Из неравенства (3.2) следует, что в нормированном пространстве функция

$$x \mapsto \|x\|$$

непрерывна, если ее рассматривать как функцию на метрическом пространстве с метрикой (3.1).

Определение 3.1.3. Заданные на линейном пространстве $\mathcal{L}$ нормы $\| \quad \|_1$ и $\| \quad \|_2$ эквивалентны:

$$\| \quad \|_1 \sim \| \quad \|_2, \tag{3.3}$$

если существуют такие положительные константы a и b, что

$$\forall (x \in \mathcal{L}) : a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2.$$

Так как эквивалентные нормы задают одну и ту же топологию метрического пространства, то эквивалентные нормы иногда не различаются.

Будем рассматривать банахово пространство B как метрическое пространство M с метрикой (3.1). Пусть $\widetilde{M}$ -пространство, построенное при доказательстве теоремы 2.1.1 на стр. 103. Перенесем на пространство $\widetilde{M}$ структуру линейного пространства B, положив по определению

$$\alpha[x_n] + \beta[y_n] := [\alpha x_n + \beta y_n]$$

и введем в пространстве $\widetilde{M}$ норму, положив по определению

$$\|[x_n]\| := \lim_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

Существование предела следует из неравенства (3.2).

Так мы превратим пространство $\widetilde{M}$ в нормированное пространство. Повторяя шаг за шагом доказательство теоремы 2.1.1, мы убедимся в том, что полученное пространство -это полное нормированное пространство, которое как метрическое пространство есть пополнение пространства B.

Определение 3.1.4. Банахово пространство -это нормированное пространство, которое как метрическое пространство полно относительно метрики (3.1).

Так как при необходимости мы можем перейти к пополнению пространства, то в дальнейшем все нормированные пространства мы будем считать банаховыми.

Если нужно указать, на каком именно банаховом пространстве B рассматривается норма, мы будем обозначать ее символом $\|\cdot \mid B\|$. Прямая сумма банаховых пространств и фактор-пространство банахового пространства по подпространству обычно рассматриваются как банаховы пространства.

Определение 3.1.5. Прямой суммой $B_1 \oplus B_2$ банаховых пространств B_1 и B_2 называется прямая сумма $B_1 \oplus B_2$ линейных пространств B_1 и B_2, в которой введена норма

$$\|x \oplus y \mid B_1 \oplus B_2\| = \|x \mid B_1\| + \|y \mid B_2\|. \tag{3.4}$$

Заметим, что в случае гильбертовых пространств вместо нормы (3.4) удобнее рассматривать другую, эквивалентную норму:

$$\|x \oplus y \mid B_1 \oplus B_2\|^2 = \|x \mid B_1\|^2 + \|y \mid B_2\|^2.$$

Ясно, что отображения проектирования

$$Pr_1 \colon x \oplus y \mapsto x \ , \ Pr_2 \colon x \oplus y \mapsto y$$

есть линейные непрерывные отображения пространства $B_1 \oplus B_2$ в пространство B_1 и B_2 соответственно.

Пусть B/B_0 -фактор-пространство линейного пространства B по линейному подпространству B_0. Обозначим символом $\widetilde{x} \in B/B_0$ класс эквивалентности, который содержит вектор $x \in B$. Положим

$$\forall(\widetilde{x} \in B/B_0) : \|\widetilde{x} \mid B/B_0\| \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\|x + \xi \mid B\| \mid \xi \in B_0\}. \tag{3.5}$$

Сразу же заметим, что справедливо очевидное неравенство

$$\|\widetilde{x} \mid B/B_0\| \leq \|x \mid B\|. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1.1. *Если B_0 -замкнутое подпространство B, то пространство B/B_0 есть банахово пространство относительно нормы* (3.5).

Доказательство. Сначала докажем, что функция (3.5) определяет норму. Из неравенства треугольника в пространстве B следует неравенство

$$\|x + y + \xi + \eta \mid B\| \leq \|x + \xi \mid B\| + \|y + \eta \mid B\|,$$

поэтому

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{x} + \widetilde{y} \mid B/B_0\| = \inf\{\|x + y + \xi + \eta\| \mid (\xi + \eta) \in B_0\} \leq \\
&\inf\{\|x + \xi \mid B\| \mid \xi \in B\} + \inf\{\|y + \eta \mid B\| \mid \eta \in B\} = \\
&\|\widetilde{x} \mid B/B_0\| + \|\widetilde{y} \mid B/B_0\|.
\end{aligned}$$

Следовательно, неравенство треугольника для функции (3.5) выполнено. Однородность относительно умножения на скаляр очевидна.

Пусть

$$\|\widetilde{x} \mid B/B_0\| = 0.$$

Тогда существует такая последовательность $\{\xi_n\} \subset B_0$ и такой элемент $x \in \widetilde{x}$, что

$$\|x + \xi_n\| \to 0\ ,\ n \to \infty.$$

В силу замкнутости пространства B_0 (имено здесь используется замкнутость пространства B_0) имеем:

$$x = -\lim_{n \to \infty} \xi_n \in B_0,$$

поэтому

$$\widetilde{x} = 0.$$

Невырожденность функции (3.5) доказана. Итак, мы доказали, что функция (3.5) определяет норму на пространстве B/B_0. Теперь докажем, что пространство B/B_0 полно относительно этой нормы.

Пусть $\widetilde{x}_n$ -фундаментальная относительно нормы (3.5) последовательность. Без ограничения общности мы можем считать, что выполнено неравенство

$$\|\widetilde{x}_{n+1} - \widetilde{x}_n \mid B/B_0\| \leq 2^{-(n+1)},\ \widetilde{x}_1 = 0.$$

Существуют такие $x_n \in B$, $\xi_n \in B_0$, что

$$\|x_{n+1} - x_n + \xi_n \mid B\| \leq 2^{-n}\ ,\ x_1 = 0.$$

Положим

$$y_{n+1} = \sum_{1 \leq m \leq n} (x_{n+1} - x_n + \xi_n)\ ,\ y_1 = 0.$$

Так как

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - x_n + \xi_n,$$

то существует предел
$$y := \lim_{n\to\infty} y_n.$$
Справедливо неравенство
$$\|\widetilde{y} - \widetilde{x}_{n+1} \mid B/B_0\| = \|\widetilde{y} - \widetilde{y}_{n+1} \mid B/B_0\| \leq$$
$$\|y - y_{n+1} \mid B\| \to 0\,,\ n \to \infty.$$

Полнота пространства B/B_0 доказана.

Приведем примеры банаховых пространств.

Пример 3.1.1. Пространство $\mathbb{C}^n$ есть банахово пространство относительно каждой из норм
$$\|z\| = \sum_{1\leq j\leq n} |z_j|\ ,\ \|z\| = \max\{|z_j| \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

Пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как прямую сумму пространств $\mathbb{C}^1$.

Пример 3.1.2. Пространство $C(D)$ всех определенных на компакте $D \subset \mathbb{R}^n$ нерперывных функций есть банахово пространство относительно нормы
$$\|f \mid C(D)\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}. \tag{3.7}$$

Пример 3.1.3. В пространстве L^p , $1 \leq p < \infty$, с интегралом I рассмотрим линейное подпространство L_0:
$$L_0 = \{f \mid I(|f|^p) = 0\},$$
и рассмотрим фактор-пространство относительно пространства L_0:
$$L^p/L_0.$$
Это фактор-пространство есть банахово пространство относительно нормы
$$\forall(\widetilde{f} \in L^p/L_0)\ :\ \|\widetilde{f}\| = I(|f|^p)^{1/p}.$$
где f -любая функция из класса эквивалентности $\widetilde{f}$. Полнота пространства L^p/L_0 следует из теоремы Рисса-Фишера.

Обычно фактор-пространство L^p/L_0 отождествляется с L^p и обозначается тем же символом.

Теорема 3.1.2. *В банаховом пространстве операции сложения*

$$(B \times B) \ni x \times y \mapsto x + y \in B$$

и умножения на число

$$(\mathbb{C}^1 \times B) \ni \lambda \times x \mapsto \lambda x \in B$$

непрерывны.

Доказательство. Пусть

$$x_n \in B \;,\; y_n \in B \;,\; x_n \to x_0 \;,\; y_n \to y_0 \;, n \to \infty.$$

Тогда

$$\|(x_0 + y_0) - (x_n + y_n)\| \le \|x_0 - x_n\| + \|y_0 - y_n\| \to 0 \,,\; n \to \infty,$$

что и доказывает непрерывность операции сложения. Непрерывность умножения на число доказывается абсолютно аналогично.

Теорема 3.1.3. *1. Если O -открытое множество в банаховом пространстве B и $\lambda \ne 0$, то множество*

$$\lambda O = \{x \mid x = \lambda y \,,\; y \in O\}$$

открыто.

2. Если O -открытое множество в банаховом пространстве B и A - произвольное множество в банаховом пространстве B, то множество

$$A + O = \{x \mid x = y + z \,,\; y \in O \,,\; z \in A\}$$

открыто.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения заметим, что отображение

$$B \mapsto B \colon x \mapsto x/\lambda$$

непрерывно. Множество λO есть прообраз открытого множества O при этом отображении и поэтому открыто.

Для доказательства второго утверждения заметим, что отображение

$$B \mapsto B \colon x \mapsto x - y$$

непрерывно. Поэтому при любом $y \in A$ множество $y + O$ открыто как прообраз открытого множества O при непрерывном отображении. Множество $A + O$ открыто как объединение открытых множеств.

3.2 Пространство линейных отображений.

Пусть B_1 и B_2 -банаховы пространства.

Определение 3.2.1. Отображение

$$T\colon B_1 \mapsto B_2$$

называется линейным, если

$$\forall(\lambda \in \mathbb{C}\,,\ \mu \in \mathbb{C}\ ,\ x \in B_1\,,\ y \in B_1) : T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y).$$

Лемма 3.2.1. *Если линейное отображение непрерывно в точке $x = 0$, то оно непрерывно в произвольной точке $x_0 \in B_1$.*

Доказательство. Пусть

$$x_n \to x_0\,,\ n \to \infty.$$

Тогда

$$(x_n - x_0) \to 0\,,\ n \to \infty,$$

и если линейное отображение T непрерывно в нуле, то

$$\|T(x_n) - T(x_0)\| = \|T(x_n - x_0)\| \to 0\,,\ n \to \infty,$$

а отсюда следует непрерывность отображения T в точке x_0.

Лемма 3.2.2. *Если линейное отображение непрерывно в некоторой точке $x_0 \in B_1$, то оно непрерывно в нуле.*

Доказательство. Пусть

$$y_n \to 0\,,\ n \to \infty.$$

Тогда

$$(x_0 + y_n) \to x_0,$$

и если линейное отображение T непрерывно в точке x_0, то

$$\|T(y_n)\| = \|T(x_0 + y_n) - T(x_0)\| \to 0\,,\ n \to \infty,$$

Из лемм 3.2.1 и 3.2.2 вытекает

Теорема 3.2.1. *Если линейное отображение непрерывно в одной точке, то оно непрерывно всюду.*

Множество всех линейных непрерывных отображений банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 мы обозначим символом $\mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$.

Определение 3.2.2. Линейное отображение

$$T\colon B_1 \mapsto B_2$$

ограничено, если существует такая константа $C < \infty$, что

$$\forall (x \in B_1) \, : \, \|T(x)\| < C\|x\|. \tag{3.8}$$

В левой части неравенства (3.8) норма берется в пространстве B_2, в правой части неравенства (3.8) норма берется в пространстве B_1. В дальнейшем мы не будем специально оговаривать в каком именно пространстве берутся нормы, если это можно понять из контекста.

Точная нижняя грань всех возможных констант C, которые удовлетворяют неравенству (3.8) называется нормой ограниченного оператора T:

$$\|T \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\| := \sup\{\|T(x) \mid B_2\| \mid \|x \mid B_1\| \leq 1\}. \tag{3.9}$$

Мы оставляем читателю проверку того, что правая часть (3.9) действительно задает норму на линейном пространстве всех ограниченных линейных операторов, которые действуют из B_1 в B_2.

Теорема 3.2.2. *Линейный оператор непрерывен в том и только том случае, если он ограничен.*

Доказательство. Непосредствено из определения (3.8) следует, что ограниченный оператор непрерывен в нуле, поэтому ограниченный оператор непрерывен.

Если оператор T непрерывен в нуле, то тогда существует такая константа $\delta > 0$, что

$$\forall (\|x\| < \delta) \, : \, \|T(x)\| < 1. \tag{3.10}$$

Положим в (3.10)

$$x = \delta y / 2\|y\| \, , \, y \neq 0. \tag{3.11}$$

Тогда получим:

$$\forall (y \in B_1) \, : \, \|T(y)\| \leq \frac{2}{\delta}\|y\|,$$

что и доказывает ограниченность непрерывного оператора T.

В дальнейшем пространство $\mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$ мы будем рассматривать как нормированное пространство с нормой (3.9).

Теорема 3.2.3. *Пространство* $\mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$ *есть банахово пространство, т. е. оно полно относительно метрики, которая индуцирована нормой* (3.9).

Доказательство. Пусть $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$ -произвольная последовательность, которая фундаментальна по норме (3.9). Так как

$$\forall (x \in B_1) : \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$$

и пространство B_2 полно, то

$$\forall (x \in B_1) \,,\, \exists T(x) : \lim_{n \to \infty} T_n(x) = T(x). \tag{3.12}$$

Ясно, что определенный равенством (3.12) оператор T линеен. Докажем, что он ограничен.

Пусть N выбрано настолько большим, что

$$\forall (m \,,\, n > N) : \|T_n - T_m\| < 1$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\forall (x \in B_1) : \|T_n(x)\| \leq \|T_n(x) - T_m(x)\| + \|T_m(x)\| \leq \\ &(1 + \|T_m\|)\|x\|. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Переходя в неравенстве (3.13) к пределу $n \to \infty$, мы получаем неравенство

$$\forall (x \in B_1) : \|T(x)\| \leq (1 + \|T_m\|)\|x\|,$$

из которого и следует ограниченность оператора T. Но оганиченный оператор непрерывен, поэтому наша теорема доказана.

Рассмотрим

Пример 3.2.1. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ -замкнутая ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $k(x \,,\, y)$ -непрерывная функция, заданная в области $D \times D$. Формула

$$Kf(x) = \int\limits_D k(x \,,\, y) f(y) dy \tag{3.14}$$

задает оператор

$$K \colon C(D) \mapsto C(D).$$

Оценим его норму. Имеем:

$$\|Kf \mid C(D)\| = \sup\{|\int\limits_D k(x\,,\,y)f(y)dy|x \in D\} \leq$$

$$(\sup\{\int\limits_D |k(x\,,\,y)|dy \mid x \in D\})\sup\{|f(y)| \mid y \in D\} =$$

$$(\sup\{\int\limits_D |k(x\,,\,y)|dy \mid x \in D\})\|f \mid C(D)\|$$

Следовательно,

$$\|K \mid \mathcal{L}(C(D) \mapsto C(D))\| \leq \sup\{\int\limits_D |k(x\,,\,y)|dy \mid x \in D\}.$$

Будем рассматривать заданный формулой (3.14) оператор как оператор из $L^1(D)$ в $L^1(D)$ и оценим его норму. Имеем:

$$\|Kf \mid L^1(D)\| = \int\limits_D |\int\limits_D k(x\,,\,y)f(y)dy|dx$$

$$\leq (\sup\{\int\limits_D |k(x\,,\,y)|dx \mid y \in D\})\int\limits_D |f(y)|dy \leq$$

$$\sup\{\int\limits_D |k(x\,,\,y)|dx \mid y \in D\}\|f \mid L^1(D)\|.$$

Следовательно,

$$\|K \mid \mathcal{L}(L^1(D) \mapsto L^1(D))\| \leq \sup\{\int\limits_D |k(x\,,\,y)|dx \mid y \in D\}.$$

Будем рассматривать заданный формулой (3.14) оператор как оператор из $L^2(D)$ в $L^2(D)$ и оценим его норму. Имеем:

$$\|Kf \mid L^2(D)\|^2 = \left(\int\limits_D \left|\int\limits_D k(x\,,\,y)f(y)dy\right| dx\right)^2$$

$$\leq \left(\iint\limits_{D\times D} |k(x\,,\,y)|^2 dxdy\right)\left(\int\limits_D |f(y)|^2 dy\right)$$

Следовательно,

$$\|K \mid \mathcal{L}(L^2(D) \mapsto L^2(D))\| \leq \left(\iint\limits_{D\times D} |k(x\,,\,y)|^2 dxdy \right)^{1/2} .$$

В рассмотренном примере мы получили оценку сверху для нормы оператора. Точное вычисление нормы оператора может быть трудной задачей.

3.3 Основные принципы.

Основными принципами функционального анализа традиционно называются несколько наиболее часто цитируемых теорем, которые, как правило, составляют "трудную" часть доказательств. Интересно, что эти теоремы (за исключением теоремы Хана-Банаха) являются следствием теоремы Бэра о категориях.

3.3.1 Принцип равномерной ограниченности и теорема Банаха-Штейнгауза.

Пусть

$$F_\alpha \colon B_1 \mapsto B_2\ ,\ \alpha \in I$$

-семейство *не обязательно линейных* отображений банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2. Следующее утверждение обычно называется принципом равномерной ограниченности.

Теорема 3.3.1. *Предположим, что выполнены следующие условия.*

1. Каждое отображение F_α непрерывно.

2. Выполнены неравенства:

$$\forall(\alpha \in I\,,\, x\,,\, y \in B_1) : \|F_\alpha(x+y)\| \leq \|F_\alpha(x)\| + \|F_\alpha(y)\|, \tag{3.15}$$

$$\forall(\alpha \in I\,,\, \lambda \in \mathbb{R}^1\,,\, x \in B_1) : \|F_\alpha(\lambda x)\| \leq |\lambda|\|F_\alpha(x)\|. \tag{3.16}$$

3. При каждом $x \in B_1$ семейство отображений F_α ограничено равномерно по α :

$$\forall(x \in B_1) : \sup\{\|F_\alpha(x)\| \mid \alpha \in I\} = C(x) < \infty. \tag{3.17}$$

Тогда семейство отображений F_α непрерывно в нуле равномерно по α :

$$\lim_{\delta\to 0} \sup\{\|F_\alpha(x)\| \mid \|x\| < \delta\ ,\ \alpha \in I\} = 0. \tag{3.18}$$

Доказательство. В силу непрервности отображения F_α при каждом $\alpha \in I$, $n \geq 1$ множество

$$\{x \mid \|F_\alpha(x)\| \leq n\}$$

замкнуто. Поэтому при каждом $n \geq 1$ множество

$$X_n = \bigcap_{\alpha \in I} \{x \mid \|F_\alpha(x)\| \leq n\}$$

замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

Из (3.17) следует, что

$$B_1 = \bigcup_n X_n,$$

поэтому в силу теоремы Бэра о категориях (см. стр. 114) существует такой открытый шар $b(x_0\,, \epsilon)$ и такое n, что

$$b(x_0\,, \epsilon) \subset X_n. \tag{3.19}$$

Включение (3.19) означает, что

$$\forall (\|y\| < \epsilon) \,:\, \sup\{\|F_\alpha(x_0 + y)\| \mid \alpha \in I\} \leq n.$$

Следовательно, в силу неравенства (3.15) справедлива оценка:

$$\begin{aligned}
&\forall (\|y\| < \epsilon) \,:\, \sup\{\|F_\alpha(y)\| \mid \alpha \in I\} \leq \\
&\sup\{\|F_\alpha(x_0 + y)\| \mid \alpha \in I\} + \sup\{\|F_\alpha(-x_0)\| \mid \alpha \in I\} \leq \\
&n + C(x_0).
\end{aligned}$$

Но тогда из (3.16) следует, что

$$\sup\{\|F_\alpha(x)\| \mid \|x\| < \delta\,,\ \alpha \in I\} \leq \delta(n + C(x_0))/\epsilon.$$

Теорема доказана.

Следующие две теоремы есть простое следствие принципа равномерной ограниченности и вместе эти теоремы называются теоремой Банаха-Штейнгауза.

Теорема 3.3.2. *Пусть T_α -семейство линейных непрерывных отображений банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2. Если*

$$\forall (x \in B_1) \,:\, \sup\{\|T_\alpha(x)\| \mid \alpha \in I\}\} = C(x) < \infty,$$

то

$$\sup\{\|T_\alpha\| \mid \alpha \in I\} < \infty.$$

Доказательство. Применим теорему 3.3.1 к семейству отображений $F_\alpha = T_\alpha$. Получим, что

$$\exists(\delta > 0)\,,\, \forall(\|x\| < \delta)\,:\, \sup\{\|F_\alpha(x)\| \mid \|x\| < \delta\,,\ \alpha \in I\} < 1.$$

Но тогда

$$\sup\{\|T_\alpha\| \mid \alpha \in I\} = \sup\{\|T_\alpha(x)\| \mid \|x\| < 1\,,\ \alpha \in I\} < 1/\delta.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.3.3. *Пусть T_n -последовательность линейных непрерывных отображений банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 и для каждого $x \in B_1$ существует предел*

$$\forall(x \in B_1)\,,\, \exists\, T_0(x)\,:\, \lim_{n\to\infty} T_n(x) = T_0(x). \tag{3.20}$$

Тогда определенный формулой (3.20) *оператор T_0 непрерывен.*

Доказательство. Из (3.20) следует, что

$$\forall(x \in B_1)\,:\ \ \sup\{\|T_n(x)\| \mid 1 \le n < \infty\} < \infty.$$

Но тогда в силу теоремы 3.3.2

$$\sup\{\|T_n\| \mid 1 \le n < \infty\} < \infty,$$

и

$$\forall(x \in B_1)\,:\, \|T_0(x)\| \le \sup\{\|T_n\| \mid 1 \le n < \infty\}\|x\|.$$

Следовательно, оператор T_0 ограничен и поэтому непрерывен.

Теорема доказана.

Следующая теорема есть простое следствие неравенства треугольника, но она тоже иногда называется теоремой Банаха-Штейнгауза.

Теорема 3.3.4. *Пусть T_n -последовательность линейных непрерывных отображений банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 удовлетворяет условию*

$$\sup\{\|T_n\| \mid 1 \le n < \infty\} = C < \infty, \tag{3.21}$$

пусть D -плотное в B_1 множество:

$$\mathbf{Cl}(D) = B_1,$$

и для каждого $x \in D$ существует предел:

$$\forall (x \in D)\,,\, \exists T_0(x)\,:\; T_0(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Тогда предел $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ существует для всех $x \in B_1$ и определенный формулой

$$T_0(x) \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} T_n(x) \tag{3.22}$$

оператор непрерывен.

Доказательство. Для каждого $x \in B_1$ и $\epsilon > 0$ найдем такое $y(x\,,\,\epsilon) \in D$, что

$$\|x - y(x\,,\,\epsilon)\| < \epsilon/4C,$$

где C -константа из (3.21). Тогда

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \le \|(T_n - T_m)y(x\,,\,\epsilon)\| + \|(T_n - T_m)(x - y(x\,,\,\epsilon))\| \le \epsilon/2 + \|(T_n - T_m)y(x\,,\,\epsilon)\|.$$

Пусть $n\,,\,m$ выбраны настолько большими, что

$$\|(T_n - T_m)y(x\,,\,\epsilon)\| < \epsilon/2.$$

Тогда из предыдущего неравенства следует, что для таких $n\,,\,m$ будет выполнено неравенство

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \le \epsilon.$$

Следовательно, последовательность $T_n(x)$ сходится для всех $x \in B_1$.

Ясно, что

$$\|T_0(x)\| \le \sup\{\|T_n\| \mid 1 \le n < \infty\}\|x\| \le C\|x\|.$$

Следовательно, оператор T_0 ограничен и поэтому непрерывен.

Теорема доказана.

Рассмотрим

Пример 3.3.1. Пусть B -банахово пространство всех периодичных и непрерывных на отрезке $[0\,,\,2\pi]$ функций: $f \in B$, если f непрерывна и

$$f(0) = f(2\pi).$$

Определим в пространстве B норму:

$$\|f \mid B\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0\,,\,2\pi]\}.$$

Определим в пространстве B операторы $T_n \in \mathcal{L}(B \mapsto \mathbb{C}^1)$, положив

$$T_n(f) = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{1 \le k \le n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \bigg|_{x=0},$$

где a_k, b_k -коэффициенты Фурье функции f по тригонометрической системе функций:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \ , \ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Оценим норму оператора T_n. С этой целью вспомним интегральное представление частной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле:

$$T_n(f) = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin((n+1/2)(t-x))}{2\sin((t-x)/2)} f(t) dt \right) \bigg|_{x=0}.$$

Пусть

$$0 \le m \le 2n+1 \, , \, t_{m\,,\,n} = \pi m/(n+1/2) \, , \, m = 0, \dots ,$$
$$f_{n\,,\,\epsilon}(t) = \begin{cases} sign \sin((n+1/2)(t)) \, , \text{ если } |t - t_{m\,,\,n}| > \epsilon \, , \\ \text{линейна на участке } |t - t_{m\,,\,n}| < \epsilon \end{cases}$$

и непрерывна. Ясно, что

$$\|f_{n\,,\,\epsilon}\| = 1,$$
$$\|T_n \mid \mathcal{L}(B \mapsto \mathbb{C}^1)\| \ge \sup\{|T_n f_{n\,,\,\epsilon}| \mid\mid \epsilon > 0\} =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt \ge$$
$$C_1 \int_0^{\pi n} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = C_1 \sum_{0 \le k \le n-1} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin(t)|}{t} dt \ge$$
$$const. \sum_{1 \le k \le (n-1)} \frac{1}{k} \approx const. \ln n.$$

В выписанных выше неравенствах

$$C_1 = \min_{0 \le t \le \pi} \frac{t}{2\pi \sin(t/2)},$$

символ $const.$ обозначает положительную константу, которая не зависит от n и точное значение которой для нас не важно. Следовательно, нормы операторов T_n не ограничены в совокупности. Из теоремы 3.3.2 следует, что это может быть только в том случае, если существует такая функция $f_0 \in B$, что $|T_n(f_0)(0)| \to \infty$, $n \to \infty$. Следовательно, существует такая непрерывная периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке $x = 0$ (сдвигом аргумента существование такой функции доказывается для любой точки).

Доказанный нами результат -это теорема существования, и теорема Банаха-Штенгауза часто используется для этих целей.

3.3.2 Теорема об открытом отображении и ее следствия.

Определение 3.3.1. Линейное отображение T банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 называется открытым, если образ любого открытого в B_1 множества открыт в B_2.

Заметим, что отображение может быть линейным и непрерывным, но не быть открытым. Примером линейного, непрерывного, но не открытого отображения является отображение, которое все пространство B_1 переводит в ноль пространства B_2.

Определение 3.3.2. Образом (или областью значений) отображения

$$T\colon B_1 \mapsto B_2$$

называется множество

$$\mathbf{Im}(T) = \{y \mid y = T(x)\, ,\, x \in B_1\}. \tag{3.23}$$

Иногда область значений отображения T обозначается символом

$$\mathbf{Range}(T) \equiv \mathbf{Im}(T). \tag{3.24}$$

.

Следующее утверждение называется теоремой об открытом отображении или принципом открытости отображения.

Теорема 3.3.5. *Если отображение*

$$T \in \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$$

линейно, непрерывно и образ пространства B_1 при отображении T есть все пространство B_2:

$$\mathbf{Im}(T) = B_2, \tag{3.25}$$

то отображение T открыто.

Доказательству теоремы 3.3.5 мы предпошлем несколько лемм.

В дальнейшем шар в пространстве B_i мы будем помечать тем же индексом:

$$b_i(\, , \,) \subset B_i.$$

Лемма 3.3.1. *Если выполнены условия теоремы 3.3.5, то замыкание образа любого шара с центром в нуле содержит открытый шар с центром в нуле:*

$$\forall(\epsilon > 0) \, , \, \exists \delta(\epsilon) \colon b_2(0 \, , \, \delta(\epsilon)) \subset \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, \epsilon))). \tag{3.26}$$

Доказательство. Из условия (3.25) следует, что

$$B_2 = \bigcup_n \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, n)). \tag{3.27}$$

Из (3.27) и теоремы Бэра о категориях (см. стр. 114)следует, что

$$\exists(n \, , \, y_0 \in B_2 \, , \, r > 0) \, : b_2(y_0 \, , \, r) \subset \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, n))). \tag{3.28}$$

Теперь заметим, что из включения

$$y \in \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, n)))$$

следует включение

$$-y \in \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, n))),$$

а из включений

$$y_1 \in \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, n))) \, , \, y_2 \in \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, n)))$$

следует включение

$$\forall(0 \leq \alpha \leq 1) \, : \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 \in \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, n)))$$

Поэтому из (3.28) следует, что

$$M = \{y \mid y = (2\alpha - 1)z \, , \, z \in b_2(y_0 \, , \, r) \, , \, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, n))) \tag{3.29}$$

Так как шар $b_2(y_0 \, , \, r)$ открыт, множество M открыто и содержит точку 0, поэтому

$$\exists(\epsilon > 0) \, : b_2(0 \, , \, \epsilon) \subset M \subset \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, n))).$$

Следовательно,

$$\forall(\lambda > 0) \, : b_2(0 \, , \, \lambda\epsilon) \subset \mathbf{Cl}(T(b_1(0 \, , \, \lambda n))).$$

Положив в этом включении

$$\lambda = \epsilon/n,$$

мы получим включение (3.26) с

$$\delta(\epsilon) = \epsilon^2/n.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3.2. *Если выпонены условия предыдущей леммы, а числа* ϵ *и* $\delta(\epsilon)$ *удовлетворяют условию* (3.26), *то*

$$b_2(0\,,\,\delta(\epsilon)) \subset T(b_1(0\,,\,3\epsilon)). \tag{3.30}$$

Доказательство. Пусть

$$\epsilon_1 = \epsilon\,,\;\epsilon_n = 2^{-(n-1)}\epsilon_{(n-1)}.$$

Мы будем считать, что выбранная в соответствии с (3.26) последовательность $\delta(\epsilon_n)$ удовлетворяет условию:

$$\delta(\epsilon_{(n+1)}) < \frac{1}{2}\delta(\epsilon_n).$$

Фиксируем произвольно

$$y \in b_2(0\,,\,\delta(\epsilon_1)).$$

Нам нужно доказать, что

$$\exists(x \in b_1(0\,,\,3\epsilon))\,:\,y = T(x).$$

Из леммы 3.3.1 следует, что

$$b_2(y\,,\,\frac{1}{2}\delta(\epsilon_2))\bigcap T(b_1(0\,,\,\epsilon_1)) \neq \emptyset,$$

и поэтому существует такое $x_1 \in b_1(0\,,\,\epsilon_1)$, что

$$\|y - T(x_1)\| < \frac{1}{2}\delta(\epsilon_2).$$

Следовательно,

$$(y - T(x_1)) \in b_2(0\,,\,\delta(\epsilon_2)),$$

и существует такое $x_2 \in b_1(0\,,\,\epsilon_2)$ что

$$\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{1}{2}\delta(\epsilon_3).$$

Рассуждая по индукции, мы получим такую последовательность $\{x_n\}$, что

$$\|x_n\| < \epsilon_n\ ,\ \|y - T(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\| < \frac{1}{2}\delta(\epsilon_{(n+1)}) \to 0\,,\, n \to \infty. \quad (3.31)$$

Положим

$$x = \sum_n x_n.$$

Из (3.31) следует, что

$$y = T(x)\ ,\ \|x\| < \epsilon(1 + 1/2 + \ldots) < 3\epsilon.$$

Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы.

Пусть A -открытое в пространстве B_1 множество, $x_0 \in A$ и

$$y_0 = T(x_0).$$

Так как A -открыто, то существует такой шар $b_1(0\,,\,\epsilon) \subset B_1$, что

$$x_0 + b_1(0\,,\,\epsilon) = b_1(x_0\,,\,\epsilon) \subset A.$$

В силу леммы 3.3.2 существует такой шар $b_2(0\,,\,\delta(\epsilon)) \subset B_2$, что $b_2(0\,,\,\delta(\epsilon)) \subset T(b(0\,,\,\epsilon))$. Поэтому

$$y_0 + b_2(0\,,\,\delta(\epsilon)) = b_2(y_0\,,\,\delta(\epsilon)) \subset T(x_0 + b_1(0\,,\,\epsilon)) \subset T(A).$$

Следовательно, множество $T(A)$ вместе с каждой своей точкой содержит некоторый открытый шар с центром в этой точке и поэтому множество $T(A)$ открыто. Теорема доказана.

Выведем некоторые следствия из доказанной теоремы.

Пусть

$$T\colon B_1 \mapsto B_2 \quad (3.32)$$

-линейное (не обязательно непрерывное) отображение и $\mathbf{Im}(T) = B_2$.

Определение 3.3.3. Отображение

$$T^{-1}\colon B_2 \mapsto B_1$$

называется обратным к отображению T, если

$$\forall(x \in B_1) : T^{-1}(T(x)) = x\ ,\ \forall(y \in B_2) : T(T^{-1}(y)) = y.$$

Замечание. Сейчас мы рассматриваем только такие отображения, область определения которых *совпадает со всем пространством.* Позже мы будем рассматривать отображения, область определения которых является лишь линейным подмногообразием в банаховом пространстве, и для таких отображений будет дано свое определение обратного отображения.

Для существования обратного отображения необходимо и достаточно, во-первых, чтобы образ пространства B_1 при отображении T совпадал бы со всем пространством B_2, и, во-вторых, чтобы каждый элемент пространства B_2 имел бы только один прообраз при отображении T:

$$(T(x_1) = T(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2).$$

В силу линейности отображения T последнее условие можно сформулировать в виде:

$$(T(x_1 - x_2) = 0) \Rightarrow (x_1 - x_2 = 0).$$

Определение 3.3.4. Ядром линейного отображения T назавается множество

$$\mathbf{Ker}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid T(x) = 0\}. \tag{3.33}$$

Итак, необходимое и достаточное условие существования обратного к линейному (не обязательно непрерывному) отображению (3.32) состоит в следующем:

$$\mathbf{Im}(T) = B_2 \; , \; \mathbf{Ker}(T) = 0. \tag{3.34}$$

Отображения, удовлетворяющие первому из условий (3.34), называются сюръективными отображениями. Отображения, удовлетворяющие второму условию (3.34), называются инъективными отображениями.

Следующая теорема называется теоремой Банаха об обратном отображении.

Теорема 3.3.6. *Если линейное отображение T удовлетворяет условиям* (3.34) *и непрерывно, то обратное отображение непрерывно.*

Доказательство. Пусть A -открытое множество в пространстве B_1. Тогда в силу теоремы об открытом отображении множество

$$(T^{-1})^{-1}(A) = T(A)$$

открыто, поэтому при отображении T^{-1} (которое существует в силу (3.34)) прообраз любого открытого множества открыт, т. е. отображение T^{-1} непрерывно (см. стр. 117).

Теорема доказана.

Еще одно следствие теоремы об открытом отображении -теорема о замкнутом графике.

Определение 3.3.5. Графиком линейного отображения

$$T\colon B_1 \mapsto B_2 \tag{3.35}$$

называется множество

$$\mathbf{Gr}(T) = \{x \oplus T(x) \mid x \in B_1\} \subset B_1 \oplus B_2. \tag{3.36}$$

График линейного отображения есть линейное подмногообразие прямой суммы области определения и области значений.

Обратное отображение -это оператор с графиком

$$\mathbf{Gr}(T^{-1}) = \{Tx \oplus x \mid x \in B_1\} \subset B_2 \oplus B_1.$$

Если отображение непрерывно, то график отображения есть замкнутое подпространство этой прямой суммы. Оказывается, что справедливо и обратное утверждение. Следующая теорема называется теоремой о замкнутом графике.

Теорема 3.3.7. *Если график линейного отображения* (3.35) *замкнут, то отображение T непрерывно.*

Доказательство. Если подмножество $\mathbf{Gr}(T) \subset B_1 \oplus B_2$ замкнуто, то пространство $\mathbf{Gr}(T)$ есть банахово подпространство банахова пространства $B_1 \oplus B_2$. Отображение

$$Pr_1\colon x \oplus T(x) \mapsto x \tag{3.37}$$

есть линейное непрерывное отображение банахова пространства $\mathbf{Gr}(T)$ на пространство B_1, причем $\mathbf{Im}(Pr_1) = B_1$, $\mathbf{Ker}(Pr_1) = 0$. В силу теоремы Банаха об обратном отображении отображение

$$B_1 \mapsto \mathbf{Gr}(T)\colon x \mapsto x \oplus T(x)$$

непрерывно. Следовательно, отображение

$$B_1 \mapsto B_2\colon x \mapsto x \oplus T(x) \mapsto T(x)$$

непрерывно как композиция непрерывных отображений. (Мы учли, что сужение непрерывного отображения проектирования $x \oplus y \mapsto y$ на замкнутое $B_1 \oplus B_2$ множество $\mathbf{Gr}(T)$ непрерывно.)

Теорема доказана.

Заметим, что в доказанной нами теореме предполагалось, что отображение задано *на всем пространстве.*

3.3.3 Теорема Хана-Банаха.

В теореме Хана-Банаха топологическая структура пространств не рассматривается и в дальнейших рассуждениях она никак не используется.

Определение 3.3.6. Заданная на вещественном линейном пространстве L функция
$$p\colon L \mapsto \mathbb{R}^1_+ \tag{3.38}$$
называется калибровочнной функцией, если она удовлетворяет условиям:
$$\forall(x\,,\, y \in L) : p(x+y) \le p(x) + p(y). \tag{3.39}$$
$$\forall(\alpha > 0\,,\, x \in L) : p(\alpha x) = \alpha p(x). \tag{3.40}$$

Определение 3.3.7. Заданная на комплексном линейном пространстве L функция
$$p\colon L \mapsto \mathbb{R}^1_+$$
называется полунормой, если она удовлетворяет условиям
$$\forall(x \in L\,,\, y \in L) :\ p(x+y) \le p(x) + p(y), \tag{3.41}$$
$$\forall(x \in L\,,\, \alpha \in \mathbb{C}^1) : p(\alpha x) = |\alpha| p(x). \tag{3.42}$$

Всякая полунорма есть калибровочная функция, а отличие полунормы от нормы состоит в том, что для полунормы из условия $p(x) = 0$ не следует, что $x = 0$.

Следующая теорема называется теоремой Хана-Банаха для вещественно-линейных пространств.

Теорема 3.3.8. *Пусть L -вещественное линейное пространство, $L_0 \subset L$ -подпространство пространства L , $p(x)$ -калибровочная функция на L и $f(x)$ -заданный на подпространстве L_0 вещественно-линейный функционал, который удовлетворяет условию*
$$\forall(x \in L_0) : f(x) \le p(x). \tag{3.43}$$
Тогда существует заданный на всем пространстве L вещественно-линейный функционал $\widetilde{f}$, который удовлетворяет условиям:
$$\forall(x \in L_0) : \widetilde{f}(x) = f(x)\,,\, \forall(x \in L) :\ - p(-x) \le \widetilde{f}(x) \le p(x). \tag{3.44}$$

Доказательство. Если $L = L_0$, то доказывать нечего. Пусть $x_0 \in L\setminus L_0$. Из (3.43) и определения калибровочной функции следует, что справедливо неравенство:

$$\forall (x \in L_0\,,\, y \in L_0\,,\, x_0 \in L \setminus L_0) : f(x) + f(y) = f(x+y) \le$$
$$p(x+y) = p(x - x_0 + y + x_0) \le p(x - x_0) + p(y + x_0).$$

Поэтому

$$\forall (x \in L_0\,,\, y \in L_0\,,\, x_0 \in L) : f(x) - p(x - x_0) \le p(y + x_0) - f(y). \quad (3.45)$$

Левая часть неравенства (3.45) не зависит от y, правая часть неравенства (3.45) не зависит от x, поэтому существует такая не зависящая от x и y (но зависящая от x_0) константа a, что выполнены неравенства:

$$\forall (x \in L_0\,,\, y \in L_0) : f(x) - p(x - x_0) \le a \le p(y + x_0) - f(y). \quad (3.46)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\forall (x \in L_0) : f(x) - a \le p(x - x_0) \\ &\forall (y \in L_0) : f(y) + a \le p(y + x_0). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Пусть L_1 прямая сумма линейного пространства L_0 и одномерного пространства, которое натянуто на вектор x_0:

$$L_1 = L_0 \oplus \{t x_0\}\,,\, t \in \mathbb{R}^1.$$

На пространстве L_1 определим линейный функционал

$$\forall (x \in L_0) : f_1(x + t x_0) = f(x) + t a. \quad (3.48)$$

Так как $x_0 \notin L_0$, то определение (3.48) корректно.

Из (3.47) следует, что

$$\forall (t > 0) : f_1(x + t x_0) = t(f(x/t) + a) \le t p(x/t + x_0) = p(x + t x_0),$$
$$\forall (t > 0) : f_1(x - t x_0) = t(f(x/t) - a) \le t p(x/t - x_0) = p(x - t x_0).$$

Если $L = L_1$, то теорема доказана. Если $L \setminus L_1 \ne \emptyset$, то повторим наше построение.

Далее мы проведем расуждения, которые опираются на аксиому выбора и иногда называются трансфинитной индукцией.

Пусть $\{L_\alpha\,,\, f_\alpha\}\,,\ \alpha \in I$ -множество всех пространств и функционалов, которые можно получить описанным выше способом. Введем в этом множестве частичное упорядочение, положив

$$\{L_\alpha\,,\, f_\alpha\} \ge \{L_\beta\,,\, f_\beta\}$$

если
$$L_\alpha \supset L_\beta \text{ и } \forall(x \in L_\beta) \,:\, f_\beta(x) = f_\alpha(x).$$
При таком линейном упорядочении каждая линейная цепь имеет максимальный элемент: им является пара, состоящая из объединения всех входящих в цепь пространств L_α и естественно определенного на этом объединении функционала. В силу аксиомы выбора существует такой максимальный относительно введенного упорядочения элемент $\{L_{max}\ ,\ f_{max}\}$, что $\{L_{max}\ ,\ f_{max}\} \geq \{L_0\ ,\ f\}$. Если $L_{max} \neq L$, то мы снова можем провести описаное выше построение и получить элемент, который будет больше элемента $\{L_{max}\ ,\ f_{max}\}$ и не совпадать с ним, что противоречит определению максимального элемента. Следовательно, $L_{max} = L$ и теорема доказана.

Простым следствием доказанной теоремы является теорема Хана-Банаха для комплексно-линейных пространств.

Теорема 3.3.9. *Пусть L -комплексно- линейное пространство, $L_0 \subset L$ -подпространство пространства L , $p(x)$ -полунорма на L и $f(x)$ -заданный на подпространстве L_0 линейный функционал, который удовлетворяет условию*
$$\forall(x \in L_0) : |f(x)| \leq p(x). \tag{3.49}$$
Тогда существует заданный на всем пространстве L линейный функционал $\widetilde{f}$, который удовлетворяет условиям:
$$\forall(x \in L_0) : \widetilde{f}(x) = f(x)\ ,\ \forall(x \in L) : |f(x)| \leq p(x). \tag{3.50}$$

Доказательство. Сначала будем рассматривать наше пространство как вещественно-линейное и применим предыдущую теорему к вещественно-линейному функционалу $Re\, f(x)$ и полунорме $p(x)$, которую будем рассматривать как калибровочную функцию. Пусть $Re\,\widetilde{f}$ -полученное согласно предыдущей теореме расширение вещественно-линейного функционала $Re\, f(x)$. Положим по определению
$$\forall(x \in L) \,:\, \widetilde{f(x)} = Re\,\widetilde{f(x)} - iRe\,\widetilde{f(ix)} \tag{3.51}$$
Ясно, что формула (3.51) задает комплексно-линейное расширение функционала $f(x)$. Проверим, что выполнена оценка (3.50). Пусть
$$\widetilde{f(x)} = |\widetilde{f(x)}| \exp(i\theta).$$
Тогда
$$|\widetilde{f(x)}| = Re\, f(\widetilde{\exp(-i\theta)x})) \leq p((\exp(-i\theta)x)) = p(x).$$

Теорема доказана.

Теорему Хана-Банаха часто формулируют в упрощенной форме: заданный на линейном подмножестве банахова пространства линейный функционал можно продолжить на все пространство с сохранением нормы.

3.4 Сопряженное пространство и элементы теории двойственности.

3.4.1 Сопряженное пространство.

Определение 3.4.1. Сопряженным к данному банахову пространству B называется банахово пространство

$$B^\star = \mathcal{L}(B \mapsto \mathbb{C}^1)$$

всех линейных непрерывных отображений банахова пространства B в множество комплексных чисел.

Норма в сопряженном пространстве задается формулой:

$$\forall (f \in B^\star) : \|f \mid B^\star\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in B\,,\ \|x\| \leq 1\}. \tag{3.52}$$

Рассмотрим пример. Пусть D -ограниченная замкнутая область в пространстве $\mathbb{R}^d$. Напомним, что в силу теоремы 1.2.10 (см. стр. 83) при $1 < p < \infty$ между пространствами $L^q(D)$, $q = p/(p-1)$, и $L^p(D)^\star$ можно установить взаимно однозначное соответствие

$$J : L^q(D) \mapsto L^p(D)^\star,$$

при котором функции $g \in L^q(D)$ ставится в соответсвие функционал $J(g) \in L^p(D)^\star$, действующий по правилу:

$$\forall (\phi \in L^p(D)) : J(g)(\phi) = \int\limits_D g(x)\phi(x)dx. \tag{3.53}$$

В теореме 1.2.10 доказывается, что любой функционал из $L^p(D)^\star$ можно задать с помощью этой формулы и

$$\|J(g) \mid L^p(D)^\star\| = \|g \mid L^q(D)\|,$$

поэтому пространства $L^p(D)^\star$ и $L^q(D)$ иногда отождествляются.

Теорема 3.4.1. *Пусть B_0 замкнутое линейное подпространство банахова пространства B , $y_0 \notin B_0$,*

$$dist(y_0\,,\,B_0) = \inf\{\|y_0 - x\| \mid x \in B_0\} = d > 0.$$

Тогда существует такой линейный непрерывный функционал $f \in B^\star$, что

$$f(B_0) = 0\;,\; f(y_0) = 1\;,\; \|f \mid B^\star\| = 1/d. \tag{3.54}$$

Доказательство. Рассмотрим линейное пространство L_0, которое есть прямая сумма линейного пространства B_0 и пространства, натянутого на вектор y_0:

$$L_0 = B_0 \oplus \{\lambda y_0\}\;,\; \lambda \in \mathbb{C}^1.$$

Так как $y_0 \notin B_0$, то это определение корректно.

На пространстве L_0 определим линейный функционал f:

$$\forall (x \in B_0)\;:\; f(x + \lambda y_0) = \lambda. \tag{3.55}$$

Определенный равенством (3.55) функционал удовлетворяет условиям:

$$f(B_0) = 0\;,\; f(y_0) = 1.$$

Будем рассматривать линейное пространство L_0 как банахово подпространство банахова пространства B и вычислим норму функционала f в пространстве $L_0^\star$.

Имеем:

$$\forall (x \in B_0)\;:\; \|x + \lambda y_0 \mid L_0\| = \|x + \lambda y_0 \mid B\| =$$
$$|\lambda| \|(1/\lambda)x + y_0 \mid B\| \geq |\lambda| d = |f(x + \lambda y_0)| d.$$

Отсюда следует, что

$$\forall (x \in L_0)\;:\; |f(x)| \leq \frac{1}{d}\|x\|, \text{ поэтому } \|f \mid L_0^\star\| \leq \frac{1}{d}. \tag{3.56}$$

Пусть $\{x_n\} \subset L_0$ -последовательность, которая удовлетворяет условию:

$$\|y_0 - x_n\| \to d\;,\; n \to \infty.$$

Тогда

$$1 = |f(y_0 - x_n)| \leq \|f \mid L_0^\star\| \|y_0 - x_n\| \to \|f \mid L_0^\star\| d.$$

Следовательно,

$$\|f \mid L_0^\star\| \geq \frac{1}{d}.$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (3.56), мы получаем равенство

$$\|f \mid L_0^\star\| = \frac{1}{d}.$$

Теперь воспользуемся теоремой Хана-Банаха и распространим функционал f на все пространство B.

Теорема доказана.

Теорема 3.4.2. *Для любого элемента x банахова пространства B существует такой функционал $f_x \in B^\star$, что*

$$\|f_x \mid B^\star\| = 1\ ,\ f_x(x) = \|x\|. \tag{3.57}$$

Доказательство. Если $x = 0$, то доказывать нечего. Пусть $x \neq 0$. Применим предыдущую теорему к подпространству $B_0 = 0$ и элементу $y_0 = x$. Пусть f -функционал, который удовлетворяет условию

$$f(x) = 1\ ,\ \|f\| = 1/\|x\|.$$

Тогда функционал

$$\forall (y \in B)\ :\ f_x(y) = \|x\| f(y)$$

-искомый.

Из определения нормы функционала (3.52) и теоремы 3.4.2 вытекает

Следствие 3.4.1. *Справедливо равенство*

$$\|x \mid B\| = \sup\{|f(x)| \mid \|f \mid B^\star\| \leq 1\}. \tag{3.58}$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать обозначение

$$\forall (f \in B^\star\,,\, x \in B)\ :\ < f \mid x >= f(x). \tag{3.59}$$

Пусть B_1 и B_2 -банаховы пространства и

$$\theta\colon B_1 \times B_2 \mapsto \mathbb{C}^1 \tag{3.60}$$

-линейная по каждому аргументу функция. Такая функция называется билинейной формой.

Определение 3.4.2. Билинейная форма (3.60) ставит пространства B_1 и B_2 в отделимую двойственность (или задает отделимую двойственность на пространствах B_1 и B_2), если из равенства

$$\forall (y \in B_2) : \theta(x\,,\, y) = 0$$

следует, что

$$x = 0,$$

а из равенства

$$\forall (x \in B_1) : \theta(x\,,\,y) = 0$$

следует, что

$$y = 0.$$

Из (3.52) и (3.58) следует, что билинейная форма $< f \mid x >$ ставит пространства $B^\star$ и B в отделимую двойственность, причем справедливы равенства

$$\|f \mid B^\star\| = \sup\{|< f \mid x >| \mid \|x \mid B\| \leq 1\}, \tag{3.61}$$

$$\|x \mid B\| = \sup\{|< f \mid x >| \mid \|f \mid B^\star\| \leq 1\}. \tag{3.62}$$

Теорема 3.4.3. *Пусть*

$$T \colon B_1 \mapsto B_2$$

-линейный непрерывный оператор из банахова пространства B_1 *в банахово пространство* B_2. *Тогда*

$$\|T \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\| = \\ \sup\{|< f \mid T(x) >| \mid \|f \mid B_2^\star\| \leq 1\ ,\ \|x \mid B_1\| \leq 1\}. \tag{3.63}$$

Доказательство. Следует из равенств

$$\|T(x) \mid B_2\| = \sup\{|< f \mid T(x) >| \mid \|f \mid B_2^\star\| \leq 1\},$$
$$\|T \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\| = \sup\{\|T(x) \mid B_2\| \mid \|x \mid B_1\| \leq 1\}.$$

Теорема 3.4.4. *Если* $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ *-такое подмножество в банаховом пространстве* B, *что*

$$\forall (f \in B^\star)\ :\ \sup\{|f(x_\alpha)| \mid \alpha \in I\} < \infty,$$

то

$$\sup\{\|x_\alpha\| \mid \alpha \in I\} < \infty.$$

Доказательство. Определим отображения

$$T_\alpha \colon B^\star \mapsto \mathbb{C}^1$$

по формуле

$$T_\alpha(f) =< f \mid x_\alpha > .$$

Из теоремы Банаха-Штейнгауза (см. стр. 160, теорема 3.3.2) следует, что

$$\sup\{\|T_\alpha\| | \alpha \in I\} < \infty.$$

Но в силу равенства (3.62)

$$\|T_\alpha\| = \sup\{| < f \mid x_\alpha > | \mid \|f \mid B^\star\| \leq 1\} = \|x_\alpha\|,$$

что и доказывает нашу теорему.

Теорема 3.4.5. *Пусть* $\{T_\alpha \mid \alpha \in I\} \subset \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$ *-семейство линейных непрерывных отображений банахова пространства* B_1 *в банахово пространство* B_2*. Следующие условия эививалентны:*

1. $\sup\{\|T_\alpha \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\| \mid \alpha \in I\} < \infty.$ (3.64)
2. $\forall(x \in B_1) \, : \, \sup\{\|T_\alpha(x) \mid B_2\| \mid \alpha \in I\} < \infty.$ (3.65)
3. $\forall(x \in B_1 \, , \, f \in B_2^\star) \, : \, \sup\{| < f \mid T_\alpha(x) > | \alpha \in I\} < \infty.$ (3.66)

Доказательство. Ясно, что из (3.64) следует (3.65), а из (3.65) следует (3.66). В силу теоремы 3.4.4 из (3.66) следует, что

$$\forall(x \in B_1) \, : \, \sup\{\|T_\alpha(x)\| \mid \alpha \in I\} < \infty,$$

поэтому из (3.66) следует (3.65). Неравенство (3.64) следует из (3.65) в силу теоремы Банаха-Штейнгауза.

Теорема доказана.

Говорят, что последовательность операторов $T_n \in \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$ сходится к оператору $T_0 \in \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$:

в равномерной операторной топологии, если

$$\|T_n - T_0 \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\| \to 0 \, , \, n \to \infty,$$

в сильной операторной топологии, если

$$\forall(x \in B_1) : \, \|T_n x - T_0 x \mid B_2\| \to 0 \, , \, n \to \infty,$$

в слабой операторной топологии, если

$$\forall(x \in B_1 \, , \, f \in B_2^\star) : \, f(T_n(x)) \to f(T_0(x)) \, , \, n \to \infty.$$

Из теоремы 3.4.5 следует, что из сходимости последовательности операторов T_n в слабой операторной топологии следует равномерная по n ограниченность норм операторов T_n.

Пусть B -банахово пространство и $B^\star$ -его сопряженное. Фиксируем $x \in B$. Формула

$$f \mapsto < f \mid x > \tag{3.67}$$

задает линейный непрерывный функционал на пространстве $B^\star$. Обозначим этот функционал символом $J(x)$, а множество всех линейных непрерывных функционалов на пространстве $B^\star$ обозначим символом $B^{\star\star}$:

$$J\colon B \mapsto B^{\star\star}\ ,\ J(x)(f) =< f \mid x > . \tag{3.68}$$

Из формулы (3.58) следует, что

$$\|J(x) \mid B^{\star\star}\| = \sup\{| < f \mid x > | \mid \|f \mid B^\star\| \leq 1\} = \|x\|.$$

Мы видим, заданное формулой (3.68) отображение пространства B в пространство $B^{\star\star}$ (это пространство называется вторым сопряженным) есть линейное и изометрическое отображение. Следовательно, образ $J(B)$ пространства B в пространстве $B^{\star\star}$ при отображении J замкнут.

Определение 3.4.3. Пространство B называется рефлексивным, если

$$J(B) = B^{\star\star}. \tag{3.69}$$

Таким образом, пространство B рефлексивно, если оно изометрично своему второму сопряженному (иногда говорят: совпадает со своим вторым сопряженным) и любой линейный непрерывный функционал на пространстве $B^\star$ задается формулой (3.67).

Из теоремы 1.2.10 (см. стр. 83) следует

Теорема 3.4.6. *При $1 < p < \infty$ пространство $L^p(D\,,\,\mu(dx))$ -рефлексивное пространство.*

Доказательство. Из теоремы 1.2.10 следует, что для каждого функционала $f \in (L^p(D\,,\,\mu(dx)))^\star$ существует такая функция $f \in L^q(D\,,\,\mu(dx))$, $q = p/(p-1)$, что

$$\forall (g \in L^p(D\,,\,\mu(dx)))\,:\ < f \ \mid\ g >= \int f(x)g(x)\mu(dx). \tag{3.70}$$

Оперделенное формулой (3.70) отображение

$$(L^p(D\,,\,\mu(dx)))^\star \ni f \mapsto f(x) \in L^q(D\,,\,\mu(dx))$$

взаимно однозначно и изометрично. В силу этой же формулы отображение

$$(L^q(D\,,\,\mu(dx)))^* \ni g \mapsto g(x) \in L^p(D\,,\,\mu(dx))$$

взаимно однозначно и изометрично. Следовательно,

$$J(L^p(D\,,\,\mu(dx))) = L^p(D\,,\,\mu(dx))^{\star\star}.$$

Теорема доказана.

Пространство $L^1(D\,,\,\mu(dx))$, вообще говоря, не есть рефлексивное пространство.

3.4.2 Сопряженный оператор.

Определение 3.4.4. Оператором $T^\star$, сопряженным к оператору

$$T \in \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$$

называется оператор, который каждому функционалу $f \in B_2^\star$ ставит в соответствие функционал $T^\star(f) \in B_1^\star$, действующий по формуле

$$\forall (f \in B_2^\star\,,\, x \in B_1) : \; < T^\star(f) \mid x > = < f \mid T(x) > . \tag{3.71}$$

Рассмотрим пример.

Пусть D -ограниченная замкнутая область в пространстве $\mathbb{R}^d$. Пусть функция $k(x\,,\,y)$ непрерывна в $D \times D$:

$$k(x\,,\,y) \in C(D \times D).$$

На пространстве $L^p(D)$ рассмотрим оператор T, который действует по правилу:

$$\forall (f \in L^p(D)) : T(f)(x) = \int\limits_D k(x\,,\,y) f(y) dy. \tag{3.72}$$

Эта формула задает оператор

$$T \in \mathcal{L}(L^p(D) \mapsto L^p(D)).$$

Пусть J -определенное в (3.53) отображение. Вычислим оператор

$$T_J^\star \in \mathcal{L}(L^q(D) \mapsto L^q(D)),$$

который делает коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L^p(D)^\star & \xrightarrow{T^\star} & L^p(D)^\star \\ {\scriptstyle J}\big\downarrow & & {\scriptstyle J}\big\downarrow \\ L^q(D) & \xrightarrow{T_J^\star} & L^q(D) \end{array}$$

Имеем:

$$< T_J^{\star}(g) \mid \phi >=< J(g) \mid T(\phi) >= \int\limits_D g(x) \left(\int\limits_D k(x\,,\,y)\phi(y)dy \right) dx =$$

$$\int\limits_D \left(\int\limits_D k(x\,y)g(x)dx \right) \phi(y)dy.$$

Отсюда следует, что

$$T_J^{\star}(g)(y) = \int\limits_D k(x\,,\,y)g(x)dx.$$

Разница между операторами $T^{\star}$ и $T_J^{\star}$ в том, что оператор $T^{\star}$ действует в пространстве $L^p(D)^{\star}$, а оператор $T_J^{\star}$ в пространстве $L^q(D)$. Часто этой разницей пренебрегают и отждествляют оператор $T^{\star}$ с операторм $T_J^{\star}$.

Теорема 3.4.7. *Отображение*

$$T \mapsto T^{\star} \tag{3.73}$$

есть линейное изометрическое отображение пространства $\mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$ *в пространство* $\mathcal{L}(B_2^{\star} \mapsto B_1^{\star})$.

Доказательство. Линейность отображения (3.73) очевидна, а для доказательства изометричности этого отображения заметим, что

$$\begin{aligned}
&\|T^{\star} \mid \mathcal{L}(B_2^{\star} \mapsto B_1^{\star})\| = \\
&\sup\{\|T^{\star}(f) \mid B_1^{\star}\| \mid \|f \mid B_2^{\star}\| \leq 1\} = \\
&\sup\{| < T^{\star}(f) \mid x > | \mid \|f \mid B_2^{\star}\| \leq 1\,,\ \|x \mid B_1\| \leq 1\} = \\
&\sup\{| < f \mid T(x) > | \mid \|f \mid B_2^{\star}\| \leq 1\,,\ \|x \mid B_1\| \leq 1\} = \\
&\|T \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\|
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Определение 3.4.5. Аннулятором подмножества $A \subset B^{\star}$ называется подмножество пространства B, определяемое равенством

$$\mathcal{N}(A) = \{x \mid \forall (f \in A) :\ < f \mid x >= 0\} = \bigcap_{f \in A} \{x \mid < f \mid x >= 0\}. \tag{3.74}$$

Аналогично,

Определение 3.4.6. Аннулятором подмножества $A \subset B$ называется подмножество пространства $B^\star$, определяемое равенством

$$\mathcal{N}(A) = \{f \mid \forall(x \in A):\ < f \mid x >= 0\} = \bigcap_{x \in A} \{x \mid < f \mid x >= 0\}. \quad (3.75)$$

Если $A \subset B$, то $\mathcal{N}(A) \subset B^\star$, а если $A \subset B^\star$, то $\mathcal{N}(A) \subset B$. Иногда аннулятор обозначается символом

$$A^\perp \equiv \mathcal{N}(A).$$

Теорема 3.4.8. *Для любого оператора*

$$T \in \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$$

справедливо равенство

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(T)) = \mathcal{N}(\mathbf{Ker}(T^\star)). \quad (3.76)$$

Доказательство. Пусть

$$y \in \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(T)).$$

Тогда существует такая последовательность $\{x_n\} \subset B_1$, что

$$y_n = T(x_n) \to y\,,\ n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\forall(f \in \mathbf{Ker}(T^\star))\ :\ < f \mid y >= \lim_{n\to\infty} < f \mid T(x_n) >=$$
$$\lim_{n\to\infty} < T^\star f \mid x_n >= 0.$$

Поэтому

$$y \in \mathcal{N}(\mathbf{Ker}(T^\star))$$

и

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(T)) \subset \mathcal{N}(\mathbf{Ker}(T^\star)). \quad (3.77)$$

Пусть

$$y \notin \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(T)). \quad (3.78)$$

Тогда в силу теоремы 3.4.1 (см. стр. 174) существует такой функционал $f_0 \in B_2^\star$, что

$$f_0(y) = 1\ ,\ f_0(\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(T))) = 0. \quad (3.79)$$

Следовательно,

$$\forall(x \in B_1) : \ < f_0 \mid T(x) >=< T^\star(f_0) \mid x >= 0.$$

Отсюда вытекат, что

$$T^\star(f_0) = 0,$$

и поэтому

$$f_0 \in \mathbf{Ker}(T^\star). \tag{3.80}$$

Из (3.79) и (3.80) следует, что если справедливо (3.78), то

$$y \notin \mathcal{N}(\mathbf{Ker}(T^\star)) \tag{3.81}$$

Поэтому

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(T)) \supset \mathcal{N}(\mathbf{Ker}(T^\star)). \tag{3.82}$$

Из (3.77) и (3.82) вытекает утверждение теоремы.

Пусть $B_i\,, 1 \le i \le 3$ -банаховы пространства,

$$T_1 \in \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\ ,\ T_2 \in \mathcal{L}(B_2 \mapsto B_3)$$

Определение 3.4.7. Определенный формулой

$$B_1 \mapsto B_3 \colon x \mapsto T_1(x) \mapsto T_2(T_1(x))$$

оператор называется композицией (или произведением) операторов T_2 и T_1:

$$T_2 \cdot T_1 \in \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_3)\ ,\ T_2 \cdot T_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} T_2(T_1(x)). \tag{3.83}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered}\|T_2 \cdot T_1(x) \mid B_3\| \le \|T_2 \mid \mathcal{L}(B_2 \mapsto B_3)\| \cdot \|T_1(x) \mid B_2| \le \\ \|T_2 \mid \mathcal{L}(B_2 \mapsto B_3)\| \cdot \|T_1 \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\| \cdot \|x \mid B_1\|.\end{gathered}$$

Поэтому

$$\|T_2 \cdot T_1 \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_3)\| \le \|T_2 \mid \mathcal{L}(B_2 \mapsto B_3)\| \cdot \|T_1 \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\|. \tag{3.84}$$

Определение 3.4.8. Тождественным (или единичным) отображением (оператором) мы называем отображение (оператор) $\mathsf{id} \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$, которое определено формулой

$$\forall(x \in B) : \mathsf{id}(x) = x. \tag{3.85}$$

Тождественное отображение *на любом пространстве* мы будем обозначать одним и тем же символом id.

Таким образом, определение обратного оператора может быть записано в виде:

$$T^{-1}\colon T^{-1}\cdot T = T\cdot T^{-1} = \mathsf{id}. \tag{3.86}$$

Очевидна

Лемма 3.4.1. *Справедливо равенство*

$$(T_2\cdot T_1)^\star = T_1^\star\cdot T_2^\star \in \mathcal{L}(B_3^\star \mapsto B_1^\star) \tag{3.87}$$

Теорема 3.4.9. *Оператор $(T^\star)^{-1}$ существует в том и только том случае, если существует оператор T^{-1}, причем справедливо равенство*

$$(T^\star)^{-1} = (T^{-1})^\star. \tag{3.88}$$

Доказательство. Пусть оператор T^{-1} существует. Тогда переходя к сопряженным операторам в (3.86), мы получаем:

$$T^\star\cdot(T^{-1})^\star = (T^{-1})^\star\cdot T^\star = \mathsf{id}. \tag{3.89}$$

Следовательно, оператор $(T^\star)^{-1}$ существует и справедливо равенство (3.88).

Теперь предположим, что оператор $(T^\star)^{-1}\in\mathcal{L}(B_1^\star\to B_2^\star)$ существует. Тогда существует оператор $(T^{\star\star})^{-1}$. Так как оператор $T^{\star\star}$ на пространстве $B_1\subset B_1^{\star\star}$ совпадает с оператором T, то

$$\mathbf{Ker}(T)\subset\mathbf{Ker}(T^{\star\star}) = 0. \tag{3.90}$$

Простанство B_1 замкнуто в пространстве $B_1^{\star\star}$, и множество $\mathbf{Im}(T)\subset B_2$ есть прообраз замкнутого в пространстве $B_1^{\star\star}$ множества B_1 при непрерывном отображении $(T^{\star\star})^{-1}$. Следовательно, множество $\mathbf{Im}(T)$ замкнуто в B_2. Так как оператор $(T^\star)^{-1}$ существует, то

$$\mathbf{Ker}(T^\star) = 0,$$

и в силу теоремы 3.4.8 (см. стр. 181) справедливо равенство

$$B_2 = \mathbf{Ker}(T^\star)^\perp = \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(T)) = \mathbf{Im}(T). \tag{3.91}$$

Из (3.90) , (3.91) и теоремы Банаха о существовании обратного оператора 3.3.6 (см. стр. 168) следует существование непрерывного оператора T^{-1}.

Теорема доказана.

3.5 Банаховы алгебры и операторное исчисление.

3.5.1 Предварительные сведения.

Напомним определение алгебры.

Определение 3.5.1. Множество $\mathcal{A}$ называется алгеброй над полем комплексных чисел $\mathbb{C}^1$, если множество $\mathcal{A}$ есть линейное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}^1$ и в множестве $\mathcal{A}$ определена бинарная операция умножения

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A} \,:\, a \times b \mapsto ab,$$

которая удовлетворяет следующим условиям.

1. Операция умножения ассоциативна:

$$\forall(a \in \mathcal{A}\,,\, b \in \mathcal{A}\,,\, c \in \mathcal{A}) \,:\, a(bc) = (ab)c.$$

2. Операция умножения билинейна:

$$\forall(a \in \mathcal{A}\,,\, b \in \mathcal{A}\,,\, c \in \mathcal{A}\,,\; \alpha \in \mathbb{C}\,,\, \beta \in \mathbb{C}\,,\, \gamma \in \mathbb{C}) \,:$$
$$(\alpha a + \beta b)c = \alpha ac + \beta bc\,,\; a(\beta b + \gamma c) = \beta ab + \gamma ac.$$

Определение 3.5.2. Алгебра $\mathcal{A}$ называется банаховой алгеброй, если на $\mathcal{A}$ определена норма, относительно которой $\mathcal{A}$ есть банахово пространство, причем операция умножения и норма связаны условием:

$$\|ab\| \le \|a\|\|b\|. \tag{3.92}$$

Определение 3.5.3. Банахова алгебра $\mathcal{A}$ называется унитальной банаховой алгеброй (или алгеброй с единицей) если

$$\exists(\mathsf{id} \in \mathcal{A})\,,\, \forall(a \in \mathcal{A}) \,:\, \mathsf{id} \cdot a = a \cdot \mathsf{id} = a.$$

В дальнейшем (если явно не оговорено другое) рассматриваемые нами алгебры будут алгебрами с единицей. Из (3.92) следует, что операция умножения непрерывна: если

$$a_n \to a_0\,,\, b_n \to b_0\,,\, n \to \infty,$$

то

$$\|a_n b_n - a_0 b_0\| \le \|a_n\|\|b_n - b_0\| + \|b_0\|a_n - a_0\| \to 0\,,\, n \to \infty.$$

Примером унитальной банаховой алгебры является банахово пространство

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}(B \mapsto B) \tag{3.93}$$

всех линейных непрерывных операторов из банахова пространства B в банахово пространство B, в котором операция умножения определена как композиция операторов (см. определение 3.4.7 и (3.83) на стр. 182).

В частности, если банахово пространство $B = \mathbb{R}^n$, то алгебру (3.93) можно отождествить с алгеброй квадратных матриц размером $n \times n$, в которой линейные операции и операция умножения матриц определены обычным образом.

В дальнейшем (как можно доказать, в существенном не ограничивая общности) для простоты можно считать, что рассматриваемая нами алгебра есть алгебра (3.93).

Распространим на функции со значениями в банаховой алгебре некоторые понятия теории функций комплексного переменного.

Гладким контуром l в плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}^1$ мы будем называеть образ полуинтервала $[a\,,\,b)$ при непрерывно дифференцируемом инъективном (взаимно-обнозначном на образе) отображении:

$$l = \{z \mid z = z(t)\,,\, a \le t < b\,,\, |z'(t)| < const. < \infty, \}\,,\, l \subset \mathbb{C}^1. \tag{3.94}$$

Пусть

$$a(z)\colon l \mapsto \mathcal{A}$$

-равномерно по z непрерывное отображение контура l в алгебру $\mathcal{A}$.

Составим интегральную сумму Римана:

$$S = \sum_j a(z(\widetilde{t_j}))(z(t_{j+1}) - z(t_j))\,,\, t_j \le \widetilde{t_j} \le t_{j+1}. \tag{3.95}$$

Диаметром разбиения

$$a = t_0 < t_1 \ldots t_j < t_{j+1} \ldots < b$$

полуинтервала $[a\,,\,b)$ называется число

$$\delta = \max_j |t_{j+1} - t_j|.$$

Если S и S' -две интегральные суммы Римана и δ , δ' -соответствующие этим суммам диаметры разбиений полуинтервала $[a\,,\,b)$, то справедлива очевидная оценка

$$\|S - S'\| \le (b-a) \sup_t |z'(t)| \times$$
$$\sup\{\|a(z(t')) - a(z(t''))\| \mid |t' - t''| < \delta + \delta'\,,\, a \le t'\,,\, t'' < b\},$$

из которой следует

Лемма 3.5.1. *Если l -гладкий контур и $a(z)$ -равномерно непрерывная функция на l со значениями в банаховой алгебре $\mathcal{A}$, то существует предел*

$$\int\limits_l a(z)dz \overset{def}{=} \lim_{\delta\to 0}\left(\sum_j a(z(\widetilde{t_j}))(z(t_{j+1}) - z(t_j))\right),$$
$$\delta = \max_j |t_{j+1} - t_j|\,,\; t_j \le \widetilde{t_j} \le t_{j+1}. \tag{3.96}$$

Предел (3.96) называется интегралом Бохнера от функции $a(z)$ по контуру l.

Пусть D -открытая область в плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}^1$.

Определение 3.5.4. Функция

$$a(z)\colon D \mapsto \mathcal{A}$$

называется дифференцируемой в точке $z \in D$, если существует предел

$$\frac{da(z)}{dz} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta z\to 0}\frac{a(z+\Delta z) - a(z)}{\Delta z}. \tag{3.97}$$

Определение 3.5.5. Если предел (3.97) существует в каждой точке $z \in D$, то функция $a(z)$ называется аналитичесой в области D.

Доказательство существования предела (3.97) облегчает

Теорема 3.5.1. *Пусть в области D задана функция:*

$$D \ni z \mapsto T(z) \in \mathcal{L}(B \mapsto B). \tag{3.98}$$

Если

$$\forall (x \in B\,,\; f \in B^\star)$$

функция

$$\psi(z\,,\,x\,,\,f) = < f \mid T(z)(x) >$$

аналитична в области D, то функция (3.98) *аналитична в области D в смысле определения 3.5.5.*

Доказательство. Фиксируем $z \in D$. Из аналитичности функции $\psi(z\,,\,x\,,\,f)$ следует, что функция

$$\Delta z \mapsto \phi(f\,,\,x\,,\,\Delta z) = (\psi(z+\Delta z\,,\,x\,,\,f) - \psi(z\,,\,x\,,\,f))/\Delta z$$

аналитична в окрестности нуля. Следовательно,

$$\forall(x \in B\,,\, f \in B^{\star})\,,\, \exists(\delta > 0)\,:\, \sup\{|(\Delta z_1 - \Delta z_2)^{-1}\times \\ (\phi(f\,,\, x\,,\, \Delta z_1) - \phi(f\,,\, x\,,\, \Delta z_2))|\,|\, |\Delta z_1| + |\Delta z_2| < \delta\} < \infty. \tag{3.99}$$

Из теоремы 3.4.5 (см. стр. 177) следует, что

$$\exists(\delta > 0)\,:\, \sup\{\|(\Delta z_1 - \Delta z_2)^{-1}((T(z + \Delta z_1) - T(z))/\Delta z_1 - \\ (T(z + \Delta z_2) - T(z))/\Delta z_2\|\,|\, \Delta z_1| + |\Delta z_2| < \delta\} < \infty.$$

Поэтому

$$\exists(\delta > 0\,,\, C(\delta) < \infty)\,:\, \|((T(z + \Delta z_1) - T(z))/\Delta z_1 - \\ (T(z + \Delta z_2) - T(z))/\Delta z_2\| < C(\delta)|\Delta z_1 - \Delta z_2|.$$

Теорема доказана.

На функции комплексного переменного со значениями в банаховой алгебре практически без изменения формулировок и доказательств (с очевидной заменой оценок по модулю на оценки по норме) переносятся многие классические теоремы теории функций комплексного переменного. Детали доказательств подобных обобщений мы предоставляем читателю. В частности, нам понадобятся обобщение интегральной формулы Коши и некоторых теорем теории степенных рядов (формулы для радиуса сходимости степенного ряда и теоремы Коши о существовании особых точек на границе круга сходимости). Мы надеямся, что читатель самостоятельно получит обобщения этих теорем на случай функций со значениями в банаховой алгебре.

3.5.2 Резольвента и спектр.

Определение 3.5.6. Элемент $a^{-1} \in \mathcal{A}$ называется обратным к элементу $a \in \mathcal{A}$, если

$$a^{-1}a = aa^{-1} = \mathsf{id}.$$

Определение 3.5.7. Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется обратимым, если у него существует обратный элемент $a^{-1} \in \mathcal{A}$.

Очевидна

Лемма 3.5.2. *Если элементы a и b обратимы, то элемент $c = ab$ обратим и*

$$c^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

В дальнешем мы по определению полагаем

$$\forall (a \neq 0) \, : a^0 = \mathsf{id}.$$

Прямым вычислением доказывается

Лемма 3.5.3. *Если* $\|a\| < 1$, *то элемент* $(\mathsf{id} - a)$ *обратим и*

$$(\mathsf{id} - a)^{-1} = \sum_{0 \leq n < \infty} a^n.$$

Отсюда вытекает

Лемма 3.5.4. *Если элемент* a *обратим и* $\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, *то элемент* $a + b$ *обратим и*

$$(a + b)^{-1} = \left(\sum_{0 \leq n < \infty} (-a^{-1}b)^n \right) a^{-1}. \tag{3.100}$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$(a + b) = a(\mathsf{id} + a^{-1}b),$$

и оба сомножителя в правой части этого равенства обратимы, так как

$$\|a^{-1}b\| \leq \|a^{-1}\| \|b\| < 1.$$

Из этого утверждения вытекает очень важное

Следствие 3.5.1. *Множество всех обратимых элементов банаховой алгебры* $\mathcal{A}$ *открыто и отображение*

$$a \mapsto a^{-1} \tag{3.101}$$

непрерывно в достаточно малой окрестности обратимого элемента.

Определение 3.5.8. Если элемент $(\lambda \cdot \mathsf{id} - a)^{-1} \in \mathcal{A}$ существует, то он называется резольвентой элемента $a \in \mathcal{A}$:

$$R(\lambda \, , \, a) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda \cdot \mathsf{id} - a)^{-1}. \tag{3.102}$$

Замечание. Иногда резольвентой элемента a называют элемент $(a - \lambda \cdot \mathsf{id})^{-1}$.

В формулах, подобных (3.102), часто опускают обозначение id, считая по умолчанию, что:

$$\lambda \cdot \mathsf{id} \equiv \lambda,$$

и при такой договоренности определение (3.102) записывается так:

$$R(\lambda \, , \, a) = (\lambda - a)^{-1}.$$

Определение 3.5.9. Резольвентным множеством элемента $a \in \mathcal{A}$ называется множество $\lambda \in \mathbb{C}^1$ тех точек комплексной плоскости , для которых существует резольвента:

$$\operatorname{res}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \mid \exists(\lambda \cdot \mathsf{id} - a)^{-1}\}. \tag{3.103}$$

Из следствия 3.5.1 вытекает, что резольвентное множество любого элемента банаховой алгебры открыто, а из леммы 3.5.3 следует, что

$$\forall(|\lambda| > \|a\|) : R(\lambda\,, a) = \frac{1}{\lambda}\sum_{0 \leq n < \infty}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n . \tag{3.104}$$

В дальнешем нам понадобится следующее очевидное следстие непрерывности резольвенты как функции своих аргументов.

Теорема 3.5.2. *Предположим, что резольвента $R(\lambda\,, a_0)$ существует в каждой точке $\lambda \in D$ некоторого компактного множества $D \subset \mathbb{C}^1$. Тогда существует такая открытая окрестность $O(D)$ множества D и такой открытый шар $b(a_0\,, \epsilon) \in \mathcal{A}$, что резольвента $R(\lambda\,, a)$ существует при всех $\lambda \times a \in O(D) \times b(a_0\,, \epsilon)$.*

Доказательство. В силу непрерывности резольвенты $R(\lambda\,, a)$ по совокупности переменных $\lambda\,, a$ в метрике

$$d((\lambda_1\,, a_1)\,, (\lambda_2\,, a_2)) = \max(|\lambda_1 - \lambda_2|\,, \|a_1 - a_2\|)$$

для каждой точки $\lambda_0 \in D$ существует такое $\epsilon(\lambda_0)$, что резольвента $R(\lambda\,, a)$ существует при $|\lambda - \lambda_0| < \epsilon(\lambda_0)$ и $a \in b(a_0\,, \epsilon(\lambda_0))$. Открытые окружности $\{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \epsilon(\lambda_0)\}\,, \lambda_0 \in D$ составляют покрытие компактного множества D, поэтому это покрытие содержит конечное подпокрытие. Выбирая число ϵ равным наименьшиму радиусу $\epsilon(\lambda_0)$ входящих в это покрытие окружностей, мы получим утверждение теоремы. (Искомая открытая окрестность множества D есть объединение конечного числа входящих в выбранное конечное покрытие окружностей).

Лемма 3.5.5. *Если U -обратимый элемент алгебры $\mathcal{A}$, то справедлива формула*

$$UR(\lambda\,, a)U^{-1} = R(\lambda\,, UaU^{-1}). \tag{3.105}$$

Доказательство. Следует из равенства

$$(\lambda \mathsf{id} - UaU^{-1})UR(\lambda\,, a)U^{-1} = \mathsf{id}.$$

Определение 3.5.10. Спекторм $\sigma(a)$ элемента $a \in \mathcal{A}$ называется дополнение резольвентного множества элемента a :

$$\sigma(a) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{C}(\text{res}(a)). \tag{3.106}$$

Иногда спектр элемента $a \in \mathcal{A}$ обозначается символом

$$\mathbf{Sp}(a) \equiv \sigma(a).$$

Так как резольвентное множество открыто, то спектр -замкнутое множество, и если U -обратимый элемент, то

$$\sigma(UaU^{-1}) = \sigma(a). \tag{3.107}$$

Теорема 3.5.3. *Справедливы равенства:*

$$R(\lambda\,,\,b) - R(\lambda\,,\,a) = R(\lambda\,,\,b)(b-a)R(\lambda\,,\,a), \tag{3.108}$$

$$R(\lambda\,,\,b) - R(\lambda\,,\,a) = R(\lambda\,,\,a)(b-a)R(\lambda\,,\,b), \tag{3.109}$$

$$R(\lambda\,,\,a) - R(\mu\,,\,a) = -(\lambda-\mu)R(\lambda\,,\,a)R(\mu\,,\,a). \tag{3.110}$$

Доказательство. Равенство

$$(\lambda \mathsf{id} - a) - (\lambda \mathsf{id} - b) = (b-a)$$

умножаем слева на $R(\lambda\,,\,b)$, а справа на $R(\lambda\,,\,a)$. Получим (3.108). Умножая это же равенство справа на $R(\lambda\,,\,b)$, а слева на $R(\lambda\,,\,a)$, получим (3.109).

Аналогично, исходя из равенства

$$(\mu \mathsf{id} - a) - (\lambda \mathsf{id} - a) = -(\lambda-\mu)\mathsf{id},$$

мы легко получим (3.110).

Замечания. Ясно, что (3.108) и (3.109) есть разные формы записи одного и того же равентсва. Это равенство называется вторым резольвентным уравнением (или вторым резольвентным тождеством). Равенство (3.110) называется первым резольвентным уравнением (или первым резольвентным тожеством, или тождеством Гильберта). Можно доказать, что если операторные функции удовлетворяют уравнениям (3.108)-(3.110), то они являются резольвентой некоторого элемента.

Если оператор $(b-a)$ достаточно "хороший", то иногда бывает удобно преобразовать второе резольвентное уравнение. Положим по определению

$$\forall(\lambda \in res(a)\bigcap res(b)): \;\; T(\lambda\,,\,a\,,\,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) + (b-a)R(\lambda\,,\,b)(b-a), \tag{3.111}$$

$$Q(\lambda\,,\,a\,,\,b) = \mathsf{id} + T(\lambda\,,\,a\,,\,b)R(\lambda\,,\,a). \tag{3.112}$$

Лемма 3.5.6. *Справедивы равенства*

$$R(\lambda\,,\,b)=R(\lambda\,,\,a)+R(\lambda\,,\,a)T(\lambda\,,\,a\,,\,b)R(\lambda\,,\,a)=R(\lambda\,,\,a)Q(\lambda\,,\,a\,,\,b), \tag{3.113}$$

$$T(\lambda\,,\,a\,,\,b)=(b-a)+(b-a)R(\lambda\,,\,a)T(\lambda\,,\,a\,,\,b), \tag{3.114}$$

$$R(\lambda\,,\,b)(b-a)=R(\lambda\,,\,a)T(\lambda\,,\,a\,,\,b), \tag{3.115}$$

$$(b-a)R(\lambda\,,\,b)=T(\lambda\,,\,a\,,\,b)R(\lambda\,,\,a), \tag{3.116}$$

$$T(\lambda\,,\,a\,,\,b)-T(\mu\,,\,a\,,\,b)=-(\lambda-\mu)T(\lambda\,,\,a\,,\,b)R(\lambda\,,\,a)R(\mu\,,\,a)T(\mu\,,\,a\,,\,b). \tag{3.117}$$

Доказательство. Из второго резольвентного уравнения следует, что

$$\begin{aligned}&R(\lambda\,,\,b)(b-a)=R(\lambda\,,\,a)(b-a)+R(\lambda\,,\,a)(b-a)R(\lambda\,,\,b)(b-a)=\\&R(\lambda\,,\,a)(b-a)+R(\lambda\,,\,a)(T(\lambda\,,\,a\,,\,b)-(b-a))=\\&R(\lambda\,,\,a)T(\lambda\,,\,a\,,\,b).\end{aligned}$$

Подставив левую часть этого равенства в (3.111), мы получим (3.114). Подставив во второе резольвентное уравнение, получим (3.113). Равенство (3.116) доказывается абсолютно аналогично.

Далее имеем:

$$\begin{aligned}&T(\lambda\,,\,a\,,\,b)-T(\mu\,,\,a\,,\,b)=(b-a)(R(\lambda\,,\,b)-R(\mu\,,\,b)(b-a)=\\&-(\lambda-\mu)(b-a)(R(\lambda\,,\,b)R(\mu\,,\,b)(b-a)=\end{aligned}$$

(с учетом доказанных выше равенств)

$$-(\lambda-\mu)T(\lambda\,,\,a\,,\,b)R(\lambda\,,\,a)R(\mu\,,\,a)T(\mu\,,\,a\,,\,b).$$

Лемма доказана.

В теории потенциального рассеяния бывает удобна следующая форма второго резольвентного уравнения.

Лемма 3.5.7. *Пусть*

$$b-a=cd.$$

Тогда в тех точках λ, где существуют операторы

$$R(\lambda\,,\,a)\ ,\ R(\lambda\,,\,b)\ ,\ (\mathsf{id}-dR(\lambda\,,\,a)c)^{-1},$$

справедливо равенство

$$R(\lambda\,,\,b)-R(\lambda\,,\,a)=R(\lambda\,,\,a)c(\mathsf{id}-dR(\lambda\,,\,a)c)^{-1}dR(\lambda\,,\,a). \tag{3.118}$$

Доказательство. Из второго резольвентного уравнения

$$R(\lambda\,,\,b) - R(\lambda\,,\,a) = R(\lambda\,,\,b)cdR(\lambda\,,\,a)$$

следует равенство

$$dR(\lambda\,,\,b)c - dR(\lambda\,,\,a)c = dR(\lambda\,,\,b)cdR(\lambda\,,\,a)c.$$

Пусть

$$\alpha = dR(\lambda\,,\,b)c\;,\;\beta = dR(\lambda\,,\,a)c.$$

Тогда предыдущее равенство можно записать в виде

$$\alpha - \beta = \alpha\beta,$$

поэтому

$$(\mathsf{id} - \beta)(\mathsf{id} + \alpha) = \mathsf{id} \quad , \quad (\mathsf{id} + \alpha) = (\mathsf{id} - \beta)^{-1}.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
&R(\lambda\,,\,b) - R(\lambda\,,\,a) = R(\lambda\,,\,b)cdR(\lambda\,,\,a) = \\
&(R(\lambda\,,\,a) + R(\lambda\,,\,a)cdR(\lambda\,,\,b))cdR(\lambda\,,\,a) = \\
&R(\lambda\,,\,a)(\mathsf{id} + cdR(\lambda\,,\,b))cdR(\lambda\,,\,a) = \\
&R(\lambda\,,\,a)c(\mathsf{id} + dR(\lambda\,,\,b)c)dR(\lambda\,,\,a) = \\
&R(\lambda\,,\,a)c(\mathsf{id} + \alpha)dR(\lambda\,,\,a) = \\
&R(\lambda\,,\,a)c(\mathsf{id} - \beta)^{-1}dR(\lambda\,,\,a).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из тождества Гильберта (3.108) и непрерывности резольвенты вытекает

Теорема 3.5.4. *На резольвентном множестве резольвента $R(\lambda\,,\,a)$ аналитична по λ и*

$$\frac{dR(\lambda\,,\,a)}{d\lambda} = -R(\lambda\,,\,a)^2. \tag{3.119}$$

Будем рассматривать алгебру $\mathcal{A}$ как алгебру операторов $\mathcal{L}(B \mapsto B)$. Тогда мы получим, что при любых $x \in B\,,\, f \in B^\star$ функция $\lambda \mapsto < f \mid R(\lambda\,,\,a)x >$ аналитична на резольвентном множестве элемента a и не постоянна. Следовательно, в силу теоремы Лиувилля она обязательно имеет особые точки. Отсюда вытекает, что спектр любого элемента банаховой алгебры не пуст. Итак, справедлива

Теорема 3.5.5. *Спектр $\sigma(a)$ любого элемента a банаховой алгебры есть непустое замкнутое множество, которое содержится в круге $\{\lambda \mid |\lambda| \leq \|a\|\}$.*

3.5.3 Операторное исчисление.

Пусть a -элемент банаховой алгебры и $\sigma(a)$ -его спектр.

Определение 3.5.11. $\mathcal{F}_a$ -это множество всех функций, каждая из которых аналитична в открытой окрестности (своей для каждой функции) множества $\sigma(a)$.

Множество $\mathcal{F}_a$ есть алгебра функций относительно поточечного сложения и умножения функций. Пусть $f \in \mathcal{F}_a$ и D_f -открытая окрестность множества $\sigma(a)$, которая выбрана так, что граница $l = \partial D_f$ есть гладкая кривая и множество $l \bigcup D_f$ принадлежит области, в которой функция f аналитична. Заметим, что область D_f не обязательно есть односвязная область: область D_f и кривая $l(f)$ могут состоять из нескольких компонент. Поставим каждой функции $f \in \mathcal{F}_a$ оператор $f(a) \in \mathcal{A}$ по правилу:

$$\mathcal{O}p_a : \mathcal{F}_a \mapsto \mathcal{A}\,,\ f(\lambda) \mapsto f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_l R(\lambda\,,\, a) f(\lambda) d\lambda. \tag{3.120}$$

Интеграл по замкнутому контуру l в (3.120) берется в направлении положительного обхода содержащей спектр оператора a области D_f. Интеграл (3.120) иногда называется интегралом Данфорда.

Теорема 3.5.6. *Заданное формулой* (3.120) *отображение* $\mathcal{O}p_a$ *есть алгебраический гомоморфизм алгебры функций* $\mathcal{F}_a$ *в алгебру операторов* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Линейность отображения (3.120) очевидна. Нам нужно доказать, что произведение функций при отображении (3.120) переходит в произведение операторов. Пусть $f \in \mathcal{A}\,,\ g \in \mathcal{A}$. Будем считать, что области $D_f\,,\ D_g$ выбраны в соответствии с описанными выше правилами и

$$D_g \bigcup \partial D_g \subset D_f\,,\ \mathrm{dist}(\partial D_f\,,\, \partial D_g) > 0.$$

Из тождества Гильберта следует равенство

$$\begin{aligned}
&f(a)g(a) = \\
&(2\pi i)^{-2} \oint\limits_{l(f)} R(\lambda\,,\, a) f(\lambda) d\lambda \cdot \oint R(\mu\,,\, a) g(\mu) d\mu = \\
&(2\pi i)^{-2} \oint\limits_{l(f)} \oint\limits_{l(g)} f(\lambda) g(\mu) R(\lambda\,,\, a) R(\mu\,,\, a) d\lambda d\mu = \\
&(2\pi i)^{-2} \oint\limits_{l(f)} \oint\limits_{l(g)} f(\lambda) g(\mu) (R(\lambda\,,\, a) - R(\mu\,,\, a))(\mu - \lambda)^{-1} d\lambda d\mu.
\end{aligned}$$

Но

$$\oint\limits_{l(g)} f(\lambda)g(\mu)R(\lambda\,,\,a)(\mu-\lambda)^{-1}d\mu=0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l(f)} f(\lambda)(\lambda-\mu)^{-1}d\lambda=f(\mu).$$

Поэтому

$$f(a)g(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l(f)} R(\lambda\,,\,a)f(\lambda)g(\lambda)d\lambda.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим примеры.

Пусть $\mathcal{A}$ есть алгебра 2×2 матриц,

$$a=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&(\lambda\mathsf{id}-a)=\begin{pmatrix}\lambda-1&-2\\-2&\lambda-1\end{pmatrix},\\
&\det(\lambda\mathsf{id}-a)=(\lambda+1)(\lambda-3)\;,\;\sigma(a)=\{-1\,,\,3\},\\
&R(\lambda\,,\,a)=\frac{1}{\lambda+1}\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\-1/2&1/2\end{pmatrix}+\frac{1}{\lambda-3}\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}\\
&f(a)=f(-1)\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\-1/2&1/2\end{pmatrix}+f(3)\begin{pmatrix}1/2&1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Пусть

$$a=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&(\lambda\mathsf{id}-a)=\begin{pmatrix}\lambda-1&-1\\0&\lambda-1\end{pmatrix},\\
&\det(\lambda\mathsf{id}-a)=(\lambda-1)^2\;,\;\sigma(a)=\{1\},\\
&R(\lambda\,,\,a)=\frac{1}{\lambda-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{(\lambda-1)^2}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\\
&f(a)=f(1)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+f'(1)\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Из формулы (3.104) следует

Лемма 3.5.8. *Если контур $\partial\mathcal{D}$ содержит внутри себя спектр элемента a:*

$$\sigma(a) \subset \mathcal{D},$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial\mathcal{D}} R(\lambda\,,\, a) d\lambda = \mathsf{id}. \tag{3.121}$$

Заметим, что если аналитическая в некоторой открытой окрестности замкнутого множества M функция $\phi(\lambda)$ не имеет нулей на множестве M, то у множества M есть открытая окрестность, в которой функция $1/\phi(\lambda)$ аналитична. Из этого замечания вытекает

Теорема 3.5.7. *Если $\phi \in \mathcal{F}_a$, то элемент $\phi(a)^{-1}$ существует в том и только том случае, если функция $\phi(\lambda)$ не имеет нулей на спектре элемента a.*

Доказательство. Если $\phi \in \mathcal{F}_a$ и

$$\forall(\lambda \in \sigma(a)) \,:\, |\phi(\lambda)| > 0,$$

то существует такая открытая окрестность D спектра $\sigma(a)$, что функции $\phi(\lambda)$ и $1/\phi(\lambda)$ аналитичны в D и

$$\forall(\lambda \in D) \,:\, \phi(\lambda) \cdot \frac{1}{\phi(\lambda)} = 1. \tag{3.122}$$

Из (3.122) и леммы 3.5.8 следует, что элемент $\frac{1}{\phi(a)}$ определен и

$$\phi(a) \cdot \frac{1}{\phi(a)} = \frac{1}{\phi(a)} \cdot \phi(a) = \mathsf{id}.$$

Теперь предположим, что функция $\phi(\lambda)$ имеет ноль в точке $\lambda_0 \in \sigma(a)$. Тогда

$$\phi(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda) h(\lambda),$$

где функция $h(\lambda)$ -аналитична в окрестности спектра элемента a. Следовательно,

$$\phi(a) = (\lambda_0 \mathsf{id} - a) h(a).$$

Если бы у элемента $\phi(a)$ существовал обратный, то тогда мы имели бы равенство:

$$\mathsf{id} = (\lambda_0 \mathsf{id} - a) h(a) \phi(a)^{-1} = h(a) \phi(a)^{-1} (\lambda_0 \mathsf{id} - a),$$

из которого следует, что элемент $(\lambda_0 \mathsf{id} - a)$ имеет обратный, а это противоречит включению

$$\lambda_0 \in \sigma(a).$$

Теорема доказана.

Теоремы 3.5.6 и 3.5.7 можно изложить в немного другой редакции.

Введем в множестве $\mathcal{F}_a$ соотношение эквивалентности, положив

$$\psi_1(\lambda) \sim \psi_2(\lambda), \text{ если } \exists O(\sigma(a)) \ , \ \forall(\lambda \in O(\sigma(a))) : \ \psi_1(\lambda) = \psi_2(\lambda) \quad (3.123)$$

Здесь $O(\sigma(a))$ -открытая окрестность множества $\sigma(a)$.

Обозначим символом $\widetilde{\psi}$ тот класс эквивалентности, который содержит функцию $\psi \in \mathcal{F}_a$. Умножение и сложение функций в алгебре $\mathcal{F}_a$ естественно индуцируют умножение и сложение в множестве $\widetilde{\mathcal{F}_a}$ всех классов эквивалентности, и относительно этих операций множество $\widetilde{\mathcal{F}_a}$ становится алгеброй с единицей: единица в алгебре $\widetilde{\mathcal{F}_a}$ -это тот класс эквивалентности, который содержит функцию $\psi(\lambda) \equiv 1$. Элемент $\widetilde{\psi} \in \widetilde{\mathcal{F}_a}$ обратим в том и только том случае, если существут не имеющая нулей на спектре элемента a функция $\psi \in \widetilde{\psi}$.

Пространство $\widetilde{\mathcal{F}_a}$ называется алгеброй ростков аналитических функций, заданных на компакте $\sigma(a)$.

Поясним смысл введения этого пространства.

Функция $\phi_0(\lambda) \in \mathcal{F}_a$ есть единица алгебры $\mathcal{F}_a$, если

$$\forall(\phi(\lambda) \in \mathcal{F}_a) : \phi_0(\lambda)\phi(\lambda) \equiv \phi(\lambda)\phi_0(\lambda) = \phi(\lambda).$$

Следовательно, единица алгебры $\mathcal{F}_a$ есть определенная *на всей* плоскости комплексного переменного функция

$$\phi_0(\lambda) \equiv 1.$$

Но тогда элемент $\phi(\lambda) \in \mathcal{F}_a$ имеет обратный в том и только том случае, если

$$\frac{1}{\phi(\lambda)} \cdot \phi(\lambda) = 1, \quad (3.124)$$

и *оба сомножителя* в (3.124) аналитичны *на всей* плоскости комплексного переменного. Следовательно, в алгебре $\mathcal{F}_a$ обратимы только функции, тождественно равные константам.

Ясно, что формула (3.120) индуцирует алгебраический гомоморфизм алгебры $\widetilde{\mathcal{F}_a}$ в алгебру $\mathcal{A}$. Теперь теорему 3.5.7 можно сформулировать так.

Теорема 3.5.8. *Элемент $\phi(a)^{-1}$ существует в том и только том случае, если элемент $\widetilde{\phi}$ имеет обратный элемент в алгебре $\widetilde{\mathcal{F}_a}$*

Из теоремы 3.5.7 следует, что элемент $(\mu \cdot \mathsf{id} - f(a))$ имеет обратный в том и только том случае, если функция

$$\lambda \mapsto (\mu - f(\lambda))$$

не имеет нулей на спектре элемента a. Это утверждение эквивалентно

Теорема 3.5.9. *Справедливо равенство*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)). \tag{3.125}$$

Пусть функция $\phi(z)$ аналитична в окрестности спектра $\sigma(a)$, а функция $f(z)$ аналитична в окрестности $\phi(\sigma(a))$. Оператор $f(\phi(a))$ мы можем вычислить двумя способами. Мы можем вычислить функцию $z \mapsto f(\phi(z))$, а потом поставить этой функции в соответствие оператор $f(\phi(a))$. Мы можем вычислить оператор $\phi(a)$, а потом оператор $f(\phi(a))$ как функцию оператора $\phi(a)$. Оказывается, что оба способа дадут один и тот же результат.

Лемма 3.5.9. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\phi(z) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{O}p_a"'] & f(\phi(z)) \arrow[d, "\mathcal{O}p_a"] \\
\phi(a) \arrow[r, "\mathcal{O}p_{\phi(a)}"'] & f(\phi(a))
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&f(\phi(a)) = \frac{1}{2\pi i}\oint R(\xi\,,\,\phi(a))f(\xi)d\xi = \\
&\frac{1}{2\pi i}\oint\left(\frac{1}{2\pi i}\oint(\xi - \phi(\lambda))^{-1}R(\lambda\,,\,a)d\lambda\right)f(\xi)d\xi = \\
&\frac{1}{2\pi i}\oint f(\phi(\lambda))R(\lambda\,,\,a)d\lambda = f(\phi(a)).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

По-существу, эта лемма доказывает корректность опеределния (3.120): мы доказали, что оператор $f(\phi(a))$ определяется только функцией $z \mapsto f(\phi(z))$ и не зависит от способа вычисления этой функции.

Определение 3.5.12. Образ алгебры $\mathcal{F}_a$ при гомоморфизме (3.120) мы обозначим символом $\mathcal{O}p_a(\mathcal{F}_a)$.

Ясно, что $\mathcal{O}p_a(\mathcal{F}_a)$ -коммутативная подалгебра алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{L}(B \mapsto B)$.

Пусть $f \in \mathcal{F}_a$ и W -содержащая спектр элемента $a \in \mathcal{A}$ открытая окрестность, в которой аналитична функция f. Из (3.120) следует очевидная оценка:

$$\|f(a)\| \leq |l| \sup\{\|R(\lambda\,,\,a)\| \mid \lambda \in l\} \sup\{|f(\lambda)| \mid \lambda \in W\}, \tag{3.126}$$

где $|l|$ -длина контура l. Константа

$$C(W\,,\,a) = |l| \sup\{\|R(\lambda\,,\,a)\| \mid \lambda \in l\}$$

не зависит от функции $f \in \mathcal{F}_a$, но зависит только от элемента $a \in \mathcal{A}$ и окрестности W, в которой аналитична функция f. Следовательно, для всех функций f, аналитичных в фиксированной окрестности W, справедлива оценка:

$$\|f(a)\| \leq C(W\,,\,a) \sup\{|f(\lambda)| \mid \lambda \in W\}. \tag{3.127}$$

Отсюда вытекает

Теорема 3.5.10. *Пусть все функции $\{f_n\}$ аналитичны в фиксированой окрестности $W \supset \sigma(a)$. Пусть последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна в метрике*

$$d_W(f\,,\,g) = \sup\{|f(\lambda) - g(\lambda)| \mid \lambda \in W\}. \tag{3.128}$$

Тогда существует такая функция $f \in \mathcal{F}_a$, что

$$\|f_n(a) - f(a)\| \to 0\,,\ n \to \infty. \tag{3.129}$$

Доказательство. Существование функции $f \in \mathcal{F}_a$ -следствие теоремы Вейрштрасса, утверждение (3.129) -следствие оценки (3.127).

Сейчас мы не рассматриваем топологию в множестве $\mathcal{F}_a$, поэтому вопрос о непрерывности отображения (3.120) нами не ставится.

Докажем несколько простых свойств гомоморфизма (3.120).

Теорема 3.5.11. *Если*

$$f(\lambda) = \sum_{0 \leq n < \infty} \alpha_n \lambda^n \tag{3.130}$$

и радиус сходимости степенного ряда (3.130) *больше, чем* $\|a\|$, *то*

$$f(a) = \sum_{0 \leq n < \infty} \alpha_n a^n. \tag{3.131}$$

Доказательство. Выберем $\epsilon > 0$ настолько малым, что число $\|a\| + \epsilon$ было бы меньше, чем радиус сходимости ряда (3.131), выберем в качестве контура интегрирования в (3.120) окружность радиуса $\|a\| + \epsilon$ и подставим в (3.120) разложения (3.104) и (3.131). Получим (3.131).

В теории банаховых алгебр важное значение имеет понятие спектрального радиуса.

Определение 3.5.13. Спектральным радиусом элемента a банаховой алгебры называется число

$$\mathbf{r}(a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}. \tag{3.132}$$

Теорема 3.5.12. *Справедлива формула*

$$\mathbf{r}(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}. \tag{3.133}$$

Доказательство. Обратимся к формуле (3.104). Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле

$$R_0 = \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}. \tag{3.134}$$

Доказательство этой формулы для случая банаховах алгебр дословно повторяет известное доказательство в теории функций комплексного переменного, и так же, как и в теории функций комплексного переменного легко доказывается, что ряд (3.104) сходится при $|\lambda| > R_0$, расходится при $|\lambda| < R_0$ и представленная рядом (3.104) функция обязательно имеет особенности на окружности $\{\lambda \mid |\lambda| = R_0\}$ Отсюда следует, что

$$\mathbf{r}(a) = \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}. \tag{3.135}$$

Теперь заметим, что из формулы (3.125) следует, что

$$\{\lambda \mid \lambda = \mu^n\,,\, \mu \in \sigma(a)\} = \sigma(a^n) \subset \{\lambda \mid |\lambda| \le \|a^n\|\},$$

поэтому

$$\forall (n > 0) \,:\, \mathbf{r}(a)^n \le \|a^n\|.$$

Следовательно,

$$\mathbf{r}(a) \le \liminf_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}. \tag{3.136}$$

Сравнивая формулы (3.135) и (3.136), мы получаем утверждение теоремы.

Теорема 3.5.13. *Пусть спектр элемента a есть объединение конечного числа замкнутых множеств:*

$$\sigma(a) = \bigcup \sigma_j \,,\ dist(\sigma_j \,,\, \sigma_k) > 0 \,,\ j \neq k.$$

Тогда существуют такие элементы $P(\sigma_j) \in \mathcal{A}$, что

$$P^2(\sigma_j) = P(\sigma_j), \tag{3.137}$$

$$P(\sigma_j)P(\sigma_k) = 0 \,,\ j \neq k, \tag{3.138}$$

$$\sum_j P(\sigma_j) = \mathsf{id}, \tag{3.139}$$

$$\forall (f \in \mathcal{F}_a) \ :$$

$$f(a)P(\sigma_j) = P(\sigma_j)f(a) \,,\ \sigma(P(\sigma_j)f(a)) = \{0\} \bigcup f(\sigma_j). \tag{3.140}$$

Доказательство. Пусть $O(\sigma_j)$ -непересекающиеся открытые окрестности множеств σ_j. Положим

$$P_j(\lambda) = \begin{cases} 1 \,,\ \lambda \in O(\sigma_j), \\ 0 \,,\ \lambda \notin O(\sigma_j). \end{cases} \tag{3.141}$$

Элементы

$$P(\sigma_j) \stackrel{\text{def}}{=} P_j(a) \tag{3.142}$$

удовлетворяют условиям теоремы.

Если $\mathcal{A} = \mathcal{L}(B \mapsto B)$, то доказанную нами теорему можно изложить в несколько иной редакции.

Определение 3.5.14. Оператор $P \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$ называется проектором, если

$$P^2 = P. \tag{3.143}$$

Обратим внимание на то, что мы рассматриваем только ограниченные линейные операторы, которые удовлетворяют равентсву (3.143)

Определение 3.5.15. Пусть σ_j -замкнутая компонента спектра элемента $a \in \mathcal{A}$:

$$\mathrm{dist}(\sigma_j \,,\, \sigma(a) \setminus \sigma_j) > 0.$$

Проектор

$$P(\sigma_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} R(\lambda \,,\, a) d\lambda$$

где
$$\sigma_j \subset D \subset O(\sigma_j)\,,\; O(\sigma_j)\bigcap(\sigma(a)\setminus\sigma_j)=\emptyset,$$
называется спектральным проектором на компоненту σ_j спектра элемента a.

Пусть P -проектор и $y = Px$. Тогда
$$Py = P^2x = Px = y,$$
поэтому справедлива

Лемма 3.5.10. *Если P -проектор, то $y \in \mathbf{Im}(P)$ в том и только том случае, если*
$$y = Py. \tag{3.144}$$

Следовательно, для любого непрерывного проектора P подпространство $\mathbf{Im}(P) \subset B$ есть замкнутое подпространство. Далее замечаем, что если P -проектор, то $(\mathsf{id} - P)$ -проектор. Следовательно, для любого непрерывного проектора P пространство B разлагается в прямую сумму замкнутых подпространств:
$$B = PB \oplus (\mathsf{id} - P)B = \mathbf{Im}(P) \oplus \mathbf{Im}(\mathsf{id} - P).$$

Теперь теорему 3.5.13 можно сформулировать так.

Теорема 3.5.14. *Пусть спектр элемента $a \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$ есть объединение конечного числа замкнутых множеств:*
$$\sigma(a) = \bigcup \sigma_j\,,\; dist(\sigma_j\,,\,\sigma_k) > 0\,,\; j \neq k,$$
и $P(\sigma_j)$ -соответсвующие спектральные проекторы. Тогда пространство B разлагается в прямую сумму
$$B = \oplus \sum_j P(\sigma_j)B, \tag{3.145}$$
причем
$$\forall (f \in \mathcal{F}_a) : f(a)P(\sigma_j)B \subset P(\sigma_j)B\,,\; \sigma(P(\sigma_j)f(a)) = \{0\}\bigcup f(\sigma_j). \tag{3.146}$$

Посмотрим, как изменяется оператор $f(a)$ при малом изменении оператора a.

Из теоремы 3.5.2 (см. стр. 189) следует

Теорема 3.5.15. *Пусть $f \in \mathcal{F}_a$. Тогда существует такое $\epsilon > 0$, что*

$$\forall (b \in b(a\,,\,\epsilon)) : f \in \mathcal{F}_b$$

и

$$f(b) = \sum_{0 \le n \le \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l(a)} R(\lambda\,,\,a)((b-a)R(\lambda\,,\,a))^n f(\lambda) d\lambda. \qquad (3.147)$$

Доказательство. Из второго резольвентного тождества ((3.108), стр. 190) следует, что

$$R(\lambda\,,\,b)(\mathsf{id} - (b-a)R(\lambda\,,\,a)) = R(\lambda\,,\,a).$$

Поэтому при достаточно малом $\epsilon > 0$:

$$\forall (b \in b(a\,,\,\epsilon)) : R(\lambda\,,\,b) = R(\lambda\,,\,a) \sum_{0 \le n \le \infty} ((b-a)R(\lambda\,,\,a))^n. \qquad (3.148)$$

Подставив эту формулу в (3.120), мы получим утверждение теоремы.

Из (3.147) следует полезное и часто используемое равенство:

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l(a)} R(\lambda\,,\,a)(b-a)R(\lambda\,,\,a) f(\lambda) d\lambda + O(\|b-a\|^2), \quad (3.149)$$

где символ $O(\ldots)$ означает слагаемое, норма которого имеет указанный в скобках порядок.

Наконец отметим, что из леммы 3.5.5 (см. стр. 189) и формулы (3.107) следует

Теорема 3.5.16. *Если $U \in \mathcal{A}$ -обратимый элемент, то*

$$Uf(a)U^{-1} = f(UaU^{-1}). \qquad (3.150)$$

3.6 Изолированные особые точки резольвенты.

3.6.1 Общий случай.

Определение 3.6.1. Точка λ_0 называется изолированной особой точкой резольвенты $R(\lambda\,,\,a)$, если существует такое $\delta_0 > 0$, что

$$\forall (\lambda \in \{\lambda \mid 0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta_0\}) :$$

$$R(\lambda\,,\,a) = \sum_{-\infty < n < \infty} A_n (\lambda - \lambda_0)^n, \qquad (3.151)$$

$$\exists (n < 0) : A_n \neq 0 \qquad (3.152)$$

Входящие в (3.152) коэффициенты A_n удовлетворяют ряду тождеств, которые мы сейчас выведем.

Введем функции

$$\theta(n) = \begin{cases} 1\,,\ n \geq 0 \\ 0\,,\ n < 0. \end{cases}$$

$$\delta_n^m = \begin{cases} 1\,,\ n = m, \\ 0\,,\ n \neq m. \end{cases}$$

Теорема 3.6.1. *Справедливы равенства*

$$1.\ \forall(m\,,\,n)\,:\,A_nA_m = (1-\theta(m)-\theta(n))A_{m+n+1}. \qquad (3.153)$$

$$2.\ \forall n\colon\ (a-\lambda_0\mathsf{id})A_n = A_{n-1} - \delta_n^0\mathsf{id}. \qquad (3.154)$$

Доказательство. Пусть $0 < \epsilon < \delta_0$. Положим

$$l1 = \{\mu \mid |\mu-\lambda_0| = \epsilon/2\},$$
$$l2 = \{\lambda \mid |\lambda-\lambda_0| = \epsilon\}.$$

Тогда из (3.152) следует, что

$$\forall n\,:\,A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l2} R(\lambda\,,\,a)(\lambda-\lambda_0)^{-(n+1)}d\lambda, \qquad (3.155)$$

и

$$A_nA_m =$$
$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{l2} R(\lambda\,,\,a)(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}d\lambda \oint\limits_{l1} R(\mu\,,\,a)(\mu-\lambda_0)^{-m-1}d\mu =$$
$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{l2}\oint\limits_{l1} R(\lambda\,,\,a)R(\mu\,,\,a)(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}(\mu-\lambda_0)^{-m-1}d\lambda d\mu =$$
$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits_{l2}\oint\limits_{l1}(R(\lambda\,,\,a)-R(\mu\,,\,a))(\mu-\lambda)^{-1}\times$$
$$(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}(\mu-\lambda_0)^{-m-1}d\lambda d\mu.$$

Но

$$(\mu-\lambda)^{-1} = -(\lambda-\lambda_0)^{-1}\sum_{0\leq k\leq\infty}\left(\frac{\mu-\lambda_0}{\lambda-\lambda_0}\right)^k.$$

Подставив это равенство в предыдущее, мы получим первое утверждение теоремы.

Теперь докажем второе утверждение теоремы.

Справедливо равенство

$$((\lambda_0 \mathsf{id} - a) + (\lambda - \lambda_0)\mathsf{id})R(\lambda\,,\,a) = \mathsf{id}.$$

Умножим это равенство на $(2\pi i)^{-1}(\lambda - \lambda_0)^{-n-1}$ и проинтегрируем по контуру $l2$. Получим (3.154). Теорема доказана.

Определим операторы

$$P(\lambda_0) \stackrel{\text{def}}{=} A_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l2} R(\lambda\,,\,a)d\lambda, \tag{3.156}$$

$$D(\lambda_0) = A_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l2} R(\lambda\,,\,a)(\lambda - \lambda_0)d\lambda, \tag{3.157}$$

$$A_0(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l2} R(\lambda\,,\,a)(\lambda - \lambda_0)^{-1}d\lambda. \tag{3.158}$$

Теорема 3.6.2. *В окрестности изолированной особой точки резольвента имеет разложение:*

$$R(\lambda\,,\,a) = S_-(\lambda) + P(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^{-1} + S_+(\lambda), \tag{3.159}$$

где

$$S_-(\lambda) = \sum_{-\infty < n \le -2} D(\lambda_0)^{(|n|-1)}(\lambda - \lambda_0)^n, \tag{3.160}$$

$$S_+(\lambda) = \sum_{0 \le n < \infty} (-1)^{n+1} A_0(\lambda_0)^{n+1}(\lambda - \lambda_0)^n. \tag{3.161}$$

Доказательство. Положим в (3.153) $m = -2$, $n = -q$, $q \ge 1$. Получим:

$$A_{-(q+1)} = A_{-2}A_{-q},$$

поэтому

$$A_{-(q+1)} = A^q_{-2}.$$

Положим в (3.153) $m = 0$, $n \ge 0$. Получим:

$$A_{(n+1)} = -A_0 A_n,$$

поэтому

$$\forall (n \ge 0) \,:\, A_n = (-A_0)^{(n+1)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3.6.3. *Если у резольвенты элемента a есть только изолированные особые точки и нет других особенностей, то*

$$a = \sum_j (\lambda_j P(\lambda_j) + D(\lambda_j)), \tag{3.162}$$

где сумирование распространено на все особые точки резольвенты и входящие в (3.162) *операторы вычисляются по формулам* (3.156)-(3.157).

Во-первых отметим, что поскольку все особые точки резольвенты расположены внутри круга конечного радиуса, то изолированных особых точек может быть только конечное число. Далее заметим, что из (3.154) следует равенство

$$\forall j \colon P(\lambda_j)a - \lambda_j P(\lambda_j) = D(\lambda_j).$$

Суммируя эти равенства по всем λ_j и учитывая (3.139), мы получим утверждение теоремы.

3.6.2 Строение резольвенты в окрестности полюса.

Определение 3.6.2. Изолированная особая точка λ_0 называется полюсом порядка $m \geq 1$, если в разложении (3.152)

$$\forall (n > m) : A_{-n} = 0 \ , \ A_{-m} \neq 0. \tag{3.163}$$

В дальнешем нам будет удобно считать, что

$$a = T \in \mathcal{L}(B \mapsto B).$$

Напомним

Определение 3.6.3. Число λ_0 называется собственным значением оператора $T \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$, если

$$\exists (x \in B \, , \, x \neq 0) : Tx = \lambda_0 x.$$

Теорема 3.6.4. *Если λ_0 -полюс порядка m для резольвенты оператора T, то*

1. λ_0 -собственное значение оператора T.

2. При $n \geq m$ справедливы равенства:

$$\forall (n \geq m) : \mathbf{Ker}((\lambda_0 - T)^n) = \mathbf{Im}(P(\lambda_0)). \tag{3.164}$$

$$\forall (n \geq m) : \mathbf{Im}((\lambda_0 - T)^n) = \mathbf{Im}(\mathsf{id} - P(\lambda_0)), \tag{3.165}$$

где $P(\lambda_0)$ -спектральный проектор (3.156).

Таким образом,

$$\forall (n \geq m) : B = \mathbf{Im}((\lambda_0 \mathsf{id} - T)^n) \oplus \mathbf{Ker}((\lambda_0 \mathsf{id} - T)^n). \tag{3.166}$$

Доказательство. Из (3.154) следует равенство

$$\forall (n \geq 1) : (T - \lambda_0 \mathsf{id}) A_{-n} = A_{-(n+1)}. \tag{3.167}$$

Если

$$A_{-m} \neq 0 \text{ , но } A_{-(m+1)} = 0,$$

то существует такой вектор $z \in B$, что

$$x = A_{-m} z \neq 0 \text{ , } A_{-(m+1)} z = 0.$$

Поэтому из (3.167) следует, что

$$\exists (x \in B \, , \, x \neq 0) \, : (T - \lambda_0 \mathsf{id}) x_0 = 0.$$

Мы доказали, что полюс резольвенты оператора есть собственное значение оператора.

Замечание. Если λ_0 -собственное значение оператора, то $\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T) \neq 0$ и у оператора $(\lambda_0 \mathsf{id} - T)$ нет обратного, поэтому собственное значение всегда принадлежит спектру оператора, но собственное значение может не быть изолированной особой точкой резольвенты оператора.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы.

Из (3.153) и (3.154) следуют равенства:

$$\begin{aligned} &\forall (n \geq 0) : A_n = (T - \lambda_0 \mathsf{id}) A_{(n+1)}, \\ &(T - \lambda_0 \mathsf{id}) A_0 = P(\lambda_0) - \mathsf{id}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\forall (k \geq 0) : (P(\lambda_0) - \mathsf{id}) = (T - \lambda_0 \mathsf{id}) A_0 = (T - \lambda_0 \mathsf{id})^2 A_1 = \dots \\ &(T - \lambda_0 \mathsf{id})^{(k+1)} A_k = A_k (T - \lambda_0 \mathsf{id})^{(k+1)}. \end{aligned} \tag{3.168}$$

Следовательно,

$$\forall (n \geq 1) : \mathbf{Ker}((\lambda_0 \mathsf{id} - T)^n) \subset \mathbf{Im}(P(\lambda_0)). \tag{3.169}$$

Из (3.144) и (3.168) следует, что

$$\begin{aligned} &\forall (n \geq m \, , \, x \in \mathbf{Im}(P(\lambda_0))) \, : \\ &(T - \lambda_0 \mathsf{id})^n x = (T - \lambda_0 \mathsf{id})^n A_{-1} x = A_{-(n+1)} x = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\forall (n \geq m) : \mathbf{Im}(P(\lambda_0)) \subset \mathbf{Ker}((T - \lambda_0 \mathsf{id})^n). \tag{3.170}$$

Из (3.169) и (3.170) следует, что

$$\forall(n \geq m) : \mathbf{Im}(P(\lambda_0)) = \mathbf{Ker}((T - \lambda_0\mathsf{id})^n). \tag{3.171}$$

Если

$$x = (P(\lambda_0) - \mathsf{id})z,$$

то в силу равенства (3.154)

$$x = (T - \lambda_0\mathsf{id})A_0 z = (T - \lambda_0\mathsf{id})^n A_{(n-1)} z \in \mathsf{Im}((T - \lambda_0\mathsf{id})^n),$$

поэтому справедливо включение

$$\forall(n \geq 1) : \mathbf{Im}(\mathsf{id} - P(\lambda_0)) \subset \mathbf{Im}((T - \lambda_0\mathsf{id})^n). \tag{3.172}$$

Теперь докажем, что

$$\forall(n \geq m) : \mathbf{Im}((\lambda_0\mathsf{id} - T)^n) \bigcap \mathbf{Ker}((\lambda_0\mathsf{id} - T)^n) = 0. \tag{3.173}$$

Пусть $n \geq m$ и

$$x = (\lambda_0\mathsf{id} - T)^n z \;,\; (\lambda_0\mathsf{id} - T)^n x = 0. \tag{3.174}$$

Тогда

$$(\lambda_0\mathsf{id} - T)^{2n} z = 0,$$

и из (3.171) следует, что

$$z \in \mathbf{Im}(P(\lambda_0)) = \mathbf{Ker}((\lambda_0 - T)^n),$$

поэтому $x = 0$.

Утверждение (3.173) доказано.

Итак, мы имеем:

$$\forall(n \geq m) : B = (\mathbf{Im}(P(\lambda_0)) \oplus \mathbf{Im}(\mathsf{id} - P(\lambda_0)) =$$
$$\mathbf{Ker}((\lambda_0 - T)^n \oplus \mathbf{Im}((\lambda_0 - T)^n).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.6.5. *Если λ_0 -изолированная особая точка резольвенты и*

$$dim(\mathbf{Im}(P(\lambda_0))) = n < \infty,$$

то λ_0 -полюс.

Доказательство. Пусть e_1 , e_2 $\ldots e_n$ -базис в пространстве $\mathbf{Im}(P(\lambda_0))$. Так как $n+1$ векторов e_1 , Te_1 , $\ldots T^n e_1$ принадлежат пространству $\mathbf{Im}(P(\lambda_0))$ и поэтому линейно зависимы, то должны существовать такие числа $\alpha_{1,j}$, $0 \le j \le n$, что

$$\mathcal{P}_1(T)e_1 := \sum_{0\le j\le n} \alpha_{1,j} T^j e_1 = 0.$$

Точно так же должны существовать такие полиномы $\mathcal{P}_j(\lambda)$, что

$$\forall j : \mathcal{P}_j(T)e_j = 0.$$

Положим

$$Q(\lambda) = \mathcal{P}_1(\lambda)\mathcal{P}_2(\lambda)\ldots\mathcal{P}_n(\lambda).$$

Очевидно, что

$$Q(T)P(\lambda_0) = 0. \tag{3.175}$$

Если точка λ_0 не есть корень многочлена $Q(\lambda)$, то функция

$$W(\lambda) = \begin{cases} 1/Q(\lambda) \ , \ |\lambda - \lambda_0| < \epsilon, \\ 0 \ , \ |\lambda - \lambda)0| > \epsilon \end{cases} \tag{3.176}$$

аналитична в окрестности спектра оператора T, и справедливо равенство

$$W(T)Q(T)P(\lambda_0) = P(\lambda_0).$$

Следовательно, λ_0 корень многочлена $Q(\lambda)$, и существует такое $m < \infty$, что справедливо равенство

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m h(\lambda),$$

где $h(\lambda_0) \neq 0$.

Отсюда вытекает, что существует такое $\epsilon > 0$, при котором функция $1/h(\lambda)$ аналитична в окрестности $\{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \epsilon\}$ и

$$\forall(|\lambda - \lambda_0| < \epsilon) : (\lambda - \lambda_0)^m = Q(\lambda)/h(\lambda),$$

Отсюда следует, что оператор $1/h(T)$ существует и

$$(T - \lambda_0 \mathsf{id})^m P(\lambda_0) = \frac{1}{h(T)} Q(T)P(\lambda_0) = 0,$$

поэтому

$$\forall(n > m) : A_{-n} = (T - \lambda_0 \mathsf{id})^n P(\lambda_0)$$
$$= (T - \lambda_0 \mathsf{id})^{(n-m)} (T - \lambda_0 \mathsf{id})^m P(\lambda_0) = 0.$$

Теорема доказана.

Если λ_0 -изолированная особая точка, то число $\dim(\mathbf{Im}(P(\lambda_0))$ называется алгебраической кратностью собственного значения, а число $\dim(\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T))$ называется геометрической кратностью собственного значения.

Из (3.169) следует, что всегда выполнено неравенство

$$\dim(\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T)) \leq \dim(\mathbf{Im}(P(\lambda_0)), \tag{3.177}$$

причем, как показывают примеры, неравенство может быть строгим.

Ниже мы уточним теорему 3.6.5 и докажем, что если условия теоремы выполнены, то порядок полюса резольвенты не может превышать алгебраичесой кратности собственного значения.

3.7 Возмущение изолированного собственного значения.

3.7.1 Зависящие от параметра проекторы.

Напомним, что оператор

$$P \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$$

называется проектором, если

$$P^2 = P,$$

а пространство B есть прямая сумма своих подпространств B_j:

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \equiv \oplus \sum_j B_j,$$

если все подпространства B_j замкнуты,

$$\forall (x \in B) : x = \sum_j x_j \, , \, x_j \in B_j,$$

и

$$\forall j : \; B_j \bigcap \left(\bigcup_{i \neq j} B_i \right) = 0.$$

Выясним связь между проектором и разложением пространства в прямую сумму своих подпространств.

Если оператор P -проектор, то оператор $(\mathsf{id} - P)$ -проектор, так как

$$(\mathsf{id} - P)^2 = \mathsf{id} - 2P + P^2 = \mathsf{id} - P.$$

Если

$$x \in \mathbf{Im}(P) \bigcap \mathsf{Im}(\mathsf{id} - P),$$

то $x = 0$, так как если справедливы равенства

$$x = Pz = (\mathsf{id} - P)y,$$

то

$$Pz = P^2 z = (P - P)y = 0.$$

Легко видеть, что

$$(x \in \mathbf{Im}(P)) \iff (x = Px)$$

Следовательно, для любого проектора $P \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$ пространство $\mathbf{Im}(P)$ замкнуто и для любого проектора $P \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$ все пространство B есть прямая сумма своих замкнутых подпространств:

$$B = \mathbf{Im}(P) \oplus \mathbf{Im}(\mathsf{id} - P).$$

Предположим, что банахово пространство B есть прямая сумма своих замкнутых подпространств:

$$B = B_1 \oplus B_2.$$

Тогда любой вектор $x \in B$ единственным образом представим в виде

$$x = x_1 + x_2\,,\ x_1 \in B_1\,,\ x_2 \in B_2, \tag{3.178}$$

и поэтому разложение (3.178) корректно определяет линейный оператор

$$P : x \mapsto x_1 \in B_1, \tag{3.179}$$

который удовлетворяет равенству $P^2 = P$. В силу замкнутости пространства B_1 и этого равенства определенный во всем пространстве формулой (3.179) оператор замкнут и поэтому непрерывен.

Очевидна

Лемма 3.7.1. *Если $P \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$ -проектор и $U \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$ -обратимый оператор, то оператор*

$$Q = UPU^{-1} \tag{3.180}$$

-проектор.

Определение 3.7.1. Проекторы P и Q подобны, если они связаны равенством (3.180).

Лемма 3.7.2. *Если проекторы P и Q подобны и*

$$dim(\mathbf{Im}(P)) = n < \infty, \tag{3.181}$$

то

$$dim(\mathbf{Im}(Q)) = n.$$

Доказательство. Если выполнено условие (3.181), то существуют такие векторы $e_j \in B$ и $l^{(j)} \in B^\star$, что

$$\forall (x \in B) : Px = \sum_{1 \le j \le n} l^{(j)}(x) e_j. \tag{3.182}$$

Тогда из (3.180) следует, что

$$\forall (x \in B) : Qx = \sum_{1 \le j \le n} l^{(j)}(U^{-1}x) U e_j. \tag{3.183}$$

Следовательно,

$$\dim(\mathbf{Im}(Q)) \le \dim(\mathbf{Im}(P)) = n.$$

Осталось заметить, что соотношение подобия рефлексивно.

Напомним, что если векторы $e_j \in B$ составляют базис в некотором подпространстве пространства B, то векторы $l^{(j)} \in B^\star$, которые удовлетворяют условию

$$l^{(j)}(e_i) = \delta_i^j,$$

называются базисом, сопряженным к базису $e_j \in B$.

Из приведенных выше выкладок вытекает

Лемма 3.7.3. *Пусть проекторы P и Q связаны равенством* (3.180), *векторы $e_j \in B$, $1 \le j \le n$, составляют базис в подпространстве $\mathbf{Im}(P)$ и векторы $l^{(j)} \in B^\star$, -сопряженный базис. Тогда векторы Ue_j , $1 \le j \le n$ составляют базис в пространстве $\mathbf{Im}(Q)$, а функционалы*

$$x \mapsto l^{(j)}(U^{-1}x)\, ,\, 1 \le j \le n$$

составляют базис, сопряженный к базису Ue_j , $1 \le j \le n$.

Теорема 3.7.1. *Если проекторы P и Q удовлетворяют условию*

$$\|P - Q\| < 1, \tag{3.184}$$

то они подобны.

Доказательство. Определим операторы

$$\begin{aligned}
&U := QP + (\mathsf{id} - Q)(\mathsf{id} - P),\\
&V := PQ + (\mathsf{id} - P)(\mathsf{id} - Q),\\
&W := \mathsf{id} - (P - Q)^2.
\end{aligned}$$

Прямой выкладкой доказывается, что справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&QU = UP,\\
&UV = VU = W.
\end{aligned}$$

Если выполнено условие (3.184), то оператор W обратим. Из равенства

$$U(VW^{-1}) = (W^{-1}V)U = \mathsf{id}$$

следует, что тогда и оператор U обратим и поэтому проекторы P и Q подобны.

Теорема 3.7.2. *Если $P(\mu) \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$ -семейство проекторов, аналитически зависящих от параметра $\mu \in \{\mu \mid |\mu| < \delta\}$, то существует такое аналитически зависящее от параметра $\mu \in \{\mu \mid |\mu| < \delta\}$ семейство обратимых операторов $U(\mu)$, что*

$$P(\mu) = U(\mu)P(0)U^{-1}(\mu)\,,\, |\mu| < \delta. \tag{3.185}$$

Доказательство. Положим

$$L(\mu) := \frac{dP(\mu)}{d\mu}P(\mu) - P(\mu)\frac{dP(\mu)}{d\mu}.$$

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции со значениями в банаховой алгебре $\mathcal{L}(B \mapsto B)$:

$$\frac{dU(\mu)}{d\mu} = L(\mu)U(\mu),\ U(0) = \mathsf{id};\, |\mu| < \delta. \tag{3.186}$$

Решение этого уравнения существует, единственно и аналитически зависит от параметра μ (доказательство: сведение к интегральному уравнению и традиционный метод последовательных приближений для доказательства существования решения интегрального уравнения).

Аналогично доказывается, что решение уравнения

$$\frac{dV(\mu)}{d\mu} = -V(\mu)L(\mu),\ V(0) = \mathsf{id};\, |\mu| < \delta \tag{3.187}$$

существует, единственно и аналитически зависит от μ.

Далее замечаем, что

$$\frac{d}{d\mu}V(\mu)U(\mu) = -V(\mu)L(\mu)U(\mu) + V(\mu)L(\mu)U(\mu) \equiv 0,$$

поэтому

$$V(\mu)U(\mu) \equiv \mathsf{id},\ |\mu| < \delta.$$

Аналогично показывается, что оператор

$$W(\mu) := U(\mu)V(\mu) - \mathsf{id}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dW(\mu)}{d\mu} = L(\mu)W(\mu) - W(\mu)L(\mu),\ W(0) = 0,$$

и поэтому

$$U(\mu)V(\mu) \equiv \mathsf{id}.$$

Следовательно, определенный как решение уравнения (3.186) оператор $U(\mu)$ обратим и

$$U^{-1}(\mu) = V(\mu).$$

Положим по определению

$$Q(\mu) := U(\mu)P(0)V(\mu). \tag{3.188}$$

Легко проверить, что определенный равенством (3.188) оператор удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dQ(\mu)}{d\mu} = [L(\mu)\ ,\ Q(\mu)]\ ,\ Q(0) = P(0).$$

Дифференцируя равенство

$$P^2(\mu) = P(\mu),$$

легко показать, что этому же уравнению удовлетворяет оператор $P(\mu)$. Следовательно,

$$P(\mu) \equiv Q(\mu).$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и конструкции, использованной при доказательстве теоремы 3.7.3 вытекает

Теорема 3.7.3. *Пусть $P(\mu)$ -семейство проекторов, которые аналитичны при $|\mu| < \delta$ как функции со значениями в $\mathcal{L}(B \mapsto B)$. Пусть*

$$dim(\mathbf{Im}(P(0))) = n < \infty.$$

Тогда

$$\forall(|\mu| < \delta) : dim(\mathbf{Im}(P(\mu))) = n,$$

в пространстве $\mathbf{Im}(P(\mu))$ есть такой базис $\{e_j(\mu)\,, 1 \leq j \leq n\}$, а в пространстве $B^\star$ есть такие векторы $\{l^{(j)}(\mu)\,, 1 \leq j \leq n\}$, что

$$< l^i(\mu) \mid e_j(\mu) >= \delta^i_j,$$

и функции

$$\mu \mapsto e_j(\mu) \in B\ ,\ \mu \mapsto l^{(i)}(\mu) \in B^\star$$

аналитичны.

3.7.2 Аналитическое возмущение изолированного собственного значения.

1. Нам потребуются некоторые элементарные алгебраические факты. Сейчас мы не будем предполагать, что алгебра $\mathcal{A}$ снабжена какой-либо топологией. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ как линейное пространство представлена в виде прямой суммы своих подпространств:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2\,,\ \mathcal{A}_1 \bigcap \mathcal{A}_2 = 0. \tag{3.189}$$

Пусть каждое из подпространств $\mathcal{A}_j$ в (3.189) есть алгебра относительно сложения и умножения в $\mathcal{A}$:

$$\forall(a_i\,,\, b_i \in \mathcal{A}_i) : a_i b_i \in \mathcal{A}_i\,; \forall(i \neq j\,,\, a_i \in \mathcal{A}_i\,,\, b_j \in \mathcal{A}_j) : a_i b_j = 0. \tag{3.190}$$

Примером такой констукции является простанство $\mathbb{C}^2$, рассматриваемое как алгебра с покомпонентным сложением и умножением. В этом случае $\mathcal{A}_1$ есть алгебра элементов вида $(z\,;\,0)$, алгебра $\mathcal{A}_2$ есть алгебра элементов вида $(0\,;\,z)$. Ниже будет рассмотрен и другой пример.

Мы назовем элемент $\mathsf{id}_j \in \mathcal{A}_j$ *локальной единицей*, если

$$\forall(a_j \in \mathcal{A}_j) : \mathsf{id}_j a_j = a_j \mathsf{id}_j = a_j\,; \forall(a_i \in \mathcal{A}_i\,,\, i \neq j) : \mathsf{id}_j a_i = a_i \mathsf{id}_j = 0 \tag{3.191}$$

Мы назовем элемент $a^{-1}_{i,loc} \in \mathcal{A}_i$ *локально обратным* элементу $a_i \in \mathcal{A}_i$, если

$$a^{-1}_{i,loc} a_i = a_i a^{-1}_{i,loc} = \mathsf{id}_j. \tag{3.192}$$

Прямой выкадкой на основе введенных определений проверяется

Лемма 3.7.4. *1. Справедливо равенство*

$$\mathsf{id}_1 + \mathsf{id}_2 = \mathsf{id},$$

где id *-единица алгебры* $\mathcal{A}$.

2. Если элементы $a_i \in \mathcal{A}_i$ *имеют локально обратные* $a^{-1}_{i,loc} \in \mathcal{A}_i$*, то элемент* $(a_1 + a_2)$ *обратим в алгебре* $\mathcal{A}$ *и*

$$a^{-1}_{1,loc} + a^{-1}_{2,loc} = (a_1 + a_2)^{-1}.$$

В рассмотреном выше примере локальными единицами являются элементы $(1\,;\,0)$, $(0\,;\,1)$.

Другой пример. Пусть банахово пространство B есть прямая сумма своих подпространств:

$$B = B_1 \oplus B_2.$$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{L}(B \mapsto B)$, которая состоит из коммутирующих операторов, каждый из которых приводит подпространства B_j:

$$\forall (a \in \mathcal{A}_0) : aB_j \subset B_j.$$

Пусть P_j -проектор на подпространство $B_j \subset B$. Разложим алгебру $\mathcal{A}_0$ в прямую сумму:

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0 P_1 \oplus \mathcal{A}_0 P_2.$$

Тогда операторы P_j есть локальные единицы в подалгебрах $\mathcal{A}_0 P_j$.

2. Пусть

$$b(0\,,\,\delta_0) \ni \mu \mapsto T(\mu) \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$$

-аналитическая функция параметра $\mu \in b(0\,,\,\delta_0) \subset \mathbb{C}^1$ со значениями в банаховом пространстве $\mathcal{L}(B \mapsto B)$.

Пусть точка λ_0 есть изолированная точка спектра оператора $T(0)$. Напомним, что это означает следующее:

$$\lambda_0 \in \sigma(T(0))\ ,\ \mathrm{dist}(\lambda_0\,,\,\sigma(T(0)) \setminus \lambda_0) > 0.$$

Ясно, что изолированная точка спектра оператора есть изолированная особая точка его резольвенты.

Пусть число $\epsilon > 0$ и открытая область $D \subset \mathbb{C}^1$ с гладкой границей ∂D выбраны так, что

$$\sigma(T(0)) \setminus \lambda_0) \subset D\ ,\ D \bigcap b(\lambda_0\,,\,2\epsilon) = \emptyset.$$

В силу этого выбора множество

$$M := \mathbf{C}(D) \bigcap \mathbf{C}(b(\lambda_0\,,\,\epsilon))$$

есть резольвентное множество оператора $T(0)$. Из теоремы 3.5.2 (см. стр. 189) следует, что существует такое $\delta(\epsilon) > 0$, что множество M есть резольвентное множество оператора $T(\mu)$ при $|\mu| < \delta(\epsilon)$. Следовательно

$$\forall(|\mu| < \delta(\epsilon)) : \sigma(T(\mu)) \subset D \bigcup b(\lambda_0 \, , \epsilon). \tag{3.193}$$

В дальнейшем мы считаем, что числа $\epsilon > 0$, $\delta(\epsilon)$ удовлетворяют условию (3.193), а параметры λ , μ изменяются в области

$$W = \{\lambda \, , \mu \mid |\lambda - \lambda_0| < \epsilon \, , |\mu| < \delta(\epsilon)\}. \tag{3.194}$$

3. Пусть $\mathcal{A}(\mu) \subset \mathcal{L}(B \mapsto B)$ -коммутативная алгебра аналитических функций от оператора $T(\mu)$, которая построена по формуле (3.120) (см. стр. 193):

$$\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{O}p_a(\mathcal{F}_a) \, , \, a = T(\mu). \tag{3.195}$$

Пусть

$$2\epsilon < \mathrm{dist}(\lambda_0 \, , \partial D).$$

Положим

$$P_1(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l1} R(\xi \, , T(\mu)) d\xi \, , \, l1 = \{\xi \mid |\xi - \lambda_0| = 2\epsilon\}, \tag{3.196}$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l2} R(\xi \, , T(\mu)) d\xi \; , \; l2 = \partial D. \tag{3.197}$$

Лемма 3.7.5. *1. При $|\mu| < \delta(\epsilon)$ проекторы $P_j(\mu)$, $j = 1 \, , 2$, аналитически зависят от параметра μ как функции со значениями в банаховом пространстве B.*

2. Алгебра $\mathcal{A}(\mu)$ есть прямая сумма своих подалгебр:

$$\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{A}_1(\mu) \oplus \mathcal{A}_2(\mu) \; , \; \mathcal{A}_j(\mu) = \mathcal{A}(\mu) P_j(\mu),$$

и операторы $P_j(\mu)$ есть локальные единицы в подалгебрах $\mathcal{A}_j(\mu)$, причем справедливо равенство

$$P_1(\mu) + P_2(\mu) = \mathsf{id}. \tag{3.198}$$

Доказательство. Это утверждение есть следствие формул (3.196)-(3.198), аналитической зависимости оператора $T(\mu)$ от параметра μ и теоремы 3.5.14.

Лемма 3.7.6. *Оператор*

$$a_2(\lambda\,,\,\mu) := (\lambda\mathsf{id} - T(\mu))P_2(\mu)$$

в алгебре $\mathcal{A}_2(\mu)$ *имеет локальный обратный:*

$$a_{2,loc}^{-1}(\lambda\,,\,\mu) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l2}(\lambda-\xi)^{-1}R(\xi\,,\,T(\mu))d\xi \tag{3.199}$$

который аналитичен по $\lambda\,,\,\mu\,,\,\forall(\lambda\,,\,\mu\in W)$ *как функция со значениями в* $\mathcal{A}(B\mapsto B)$*:*

$$W\ni(\lambda\,;\mu)\mapsto a_{2,loc}^{-1}(\lambda\,,\,\mu)\in\mathcal{A}(B\mapsto B).$$

Доказательство. Аналитичность оператора $a_{2,loc}^{-1}(\lambda\,,\,\mu)$ есть следствие формулы (3.199). Справедливо равенство

$$\begin{aligned}&(\lambda\mathsf{id}-T(\mu))a_{2,loc}^{-1} =\\ &\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l2}(\lambda-\xi)(\lambda-\xi)^{-1}R(\xi\,,\,T(\mu))d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l2}R(\xi\,,\,T(\mu))d\xi =\\ &P_1(\mu).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть выполнено условие

$$\dim(\mathbf{Im}(P_1(0))) = n < \infty. \tag{3.200}$$

Тогда в силу теоремы 3.7.3

$$\dim(\mathbf{Im}(P_1(\mu)))\equiv n,$$

и поэтому

$$\dim(P_1(\mu)B)\equiv n.$$

Пусть $\{e_j(\mu)\}$, $\{l^{(i)}(\mu)\}$ -базисы, которые описаны в теореме 3.7.3. Следующая лемма очевидна.

Лемма 3.7.7. *1. Положим*

$$\alpha_j^i(\lambda\,,\,\mu) =< l^{(i)}(\mu)\mid(\lambda\mathsf{id}-T(\mu))e_j(\mu) > \tag{3.201}$$

$$\psi(\lambda\,,\,\mu) = det\{\alpha_j^i(\lambda\,,\,\mu)\}. \tag{3.202}$$

Определенная равенством (3.202) функция $\psi(\lambda\,,\,\mu)$ аналитична:

$$\psi(\lambda\,,\,\mu) = \lambda^n + \beta_1(\mu)\lambda^{(n-1)} + \ldots + \beta_n(\mu),$$

где $\beta_j(\mu)$ аналитические функции при $|\mu| < \delta(\epsilon)$.

2. Функция

$$\lambda \mapsto \psi(\lambda\,,\,0)$$

в точке $\lambda = \lambda_0$ имеет ноль порядка n и в области W уравнение

$$\psi(\lambda\,,\,\mu) = 0 \tag{3.203}$$

имеет (с учетом кратности) точно n корней $\{\lambda_j(\mu)\,,\,1 \le j \le n\}$.

Уравнение (3.203) относительно параметра λ называется характеристическим уравнением и исследованию поведения его корней как функции коэффициентов уравнения и параметра μ посвящено много работ.

В теории функций комплексного переменного известна теорема Вейрштрасса, из которой следует, что в окрестности точки $\mu = 0$ корни уравнения (3.203) имеют разложение

$$\lambda_j(\mu) = \sum_{1 \le m < \infty} a_{j\,,m}\mu^{m/p}\,,\, 1 \le j \le n, \tag{3.204}$$

где p -целое число.

Заметим, что кратность нуля детерминанта $\psi(\lambda\,,\,0)$ в точке $\lambda = \lambda_0$ совпадает с размерностью пространства $\mathbf{Im}(P(\lambda_0))$, и часто алгебраическая кратность собственного значения по опеределению полагается равной кратности нуля детерминанта $\psi(\lambda\,,\,0)$.

Пусть

$$a_1(\lambda\,,\,\mu) := (\lambda\mathsf{id} - T(\mu))P_1(\mu).$$

Лемма 3.7.8. *Оператор $a_1(\lambda\,,\,\mu)$ имеет локальный обратный в алгебре $\mathcal{A}(\mu)$ в том и только том случае, если $\psi(\lambda\,,\,\mu) \neq 0$, причем*

$$\forall(\psi(\lambda\,,\,\mu) \neq 0) : a_{1,loc}^{-1}(\lambda\,,\,\mu) = \frac{1}{\psi(\lambda\,,\,\mu)} r(\lambda\,,\,\mu), \tag{3.205}$$

где оператор $r(\lambda\,,\,\mu) \in \mathcal{A}(\mu)$ аналитичен в области W как функция со значениями в $\mathcal{L}(B \mapsto B)$

Это утверждение следует из того факта, что оператор $a_1(\lambda\,,\,\mu)$ есть оператор в линейном пространстве $\mathcal{P}_1(\mu)B$ размерности n и оператор $a_1(\lambda\,,\,\mu)$ приводит пространство $\mathcal{P}_1(\mu)B$.

Окончательно наши результаты мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3.7.4. *Если оператор*

$$T(\mu) \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$$

при $|\mu| < \delta$ *аналитичен по* μ *как функция со значениями в банаховом пространстве* $\mathcal{L}(B \mapsto B)$, *точка* λ_0 *есть изолированная точка спектра оператора* $T(0)$ *и размерность области значений спектрального проектора* (3.196) *конечна то тогда*

1. Существуют такие положительные числа $\epsilon > 0$, $\delta(\epsilon) > 0$, *что в области*

$$W = \{\lambda\,,\,\mu \mid |\lambda - \lambda_0| < \epsilon\,,\, |\mu| < \delta(\epsilon)\}$$

описанная в лемме 3.7.7 функция $\psi(\lambda\,,\,\mu)$ *аналитична. При* $\psi(\lambda\,,\,\mu) \neq 0$ *в области* W *справедливо равенство*

$$R(\lambda\,,\,T(\mu)) = \frac{1}{\psi(\lambda\,,\,\mu)} r(\lambda\,,\,\mu) + a(\lambda\,,\,\mu), \tag{3.206}$$

где операторы $a(\lambda\,,\,\mu)$, $r(\lambda\,,\,\mu)$ *в области* W *аналитичны по* $\lambda\,,\,\mu$ *как функции со значениями в банаховом пространстве* $\mathcal{L}(B \mapsto B)$ *и*

$$dim(\mathbf{Im}(r(\lambda\,,\,\mu))) \leq dim(\mathbf{Im}(P_1(0))),$$
$$\mathbf{Im}(r(\lambda\,,\,\mu)) \bigcap \mathbf{Im}(a(\lambda\,,\,\mu)) = 0.$$

2. При $|\mu| < \delta$ *корни уравнения* (3.203) *представимы в виде* (3.204) *и каждый корень* $\lambda_j(\mu)$ *есть собственное знчение оператора* $T(\mu)$.

Из формулы (3.206) следует, что порядок полюса резольвенты не может быть больше алгебраической кратности собственного значения, но он может быть меньше ее, так как оператор $r(\lambda\,,\,0)$ в точке $\lambda = \lambda_0$ может иметь ноль.

Если оператор $T(\mu)$ действует в гильбертовом пространстве, то можно получить более полную информацию о поведении собственных чисел и собственных функций.

Теорема 3.7.5. *Пусть выполнены условия теоремы 3.7.4, пространство* B *-гильбертово и оператор* $T(\mu)$ *самосопряжен при действительных значениях параметра* μ. *Тогда*

1. Собственные значения $\lambda_j(\mu)$ *аналитичны по* μ *в окрестности точки* $\mu = 0$.

2. Определенный формулой (3.196) *проектор* $P_1(\mu)$ *аналитически зависит от параметра* μ *в окрестности точки* $\mu = 0$ *и представим в виде*

$$P_1(\mu) = \sum_{1 \leq j \leq n} P_{1\,,\,j}(\mu), \tag{3.207}$$

где проекторы $P_{1,j}(\mu)$ удовлетворяют условию

$$P_{1,i}(\mu)P_{1,j}(\mu) = 0 \,, \text{ если } \lambda_i(\mu) \neq \lambda_j(\mu)$$

и уравнениям:

$$T(\mu)P_{1,j}(\mu) = \lambda_j(\mu)P_{1,j}(\mu). \tag{3.208}$$

Доказательство. Так как собственные значения $\lambda_j(\mu)$ должны быть действительны при значениях параметра $\mu > 0$, все коэффициенты $a_{j,m}$ в (3.204) должны быть действительны. Так как собственные значения $\lambda_j(\mu)$ должны быть действительны и при значениях параметра $\mu < 0$, должны выполняться равенства

$$\forall m : \; Im \exp(i\pi m/p) = 0.$$

Отсюда следует, что разложение в (3.204) ведется по целым степеням μ.

Каждое собственное значение $\lambda_j(\mu)$ есть изолированная особая точка резольвенты $R(\lambda\,,\,T(\mu))$. В силу оценки

$$\|R(\lambda_j(\mu) + i\epsilon\,,\,T(\mu))\| \leq 1/\epsilon$$

эта особая точка есть полюс первого порядка и поэтому вычет в полюсе $\lambda_j(\mu)$ удовлетворяет уравнению (3.208). Так как интеграл (3.196) есть сумма вычетов, то справедлива формула (3.207). Теорема доказана.

Если собственное значение λ_0 не вырождено, т.е. $n = 1$, то тогда отсюда следует, что отвечающую собственному значению $\lambda(\mu)$, $\lambda(0) = \lambda_0$, собственную функцию можно выбрать так, что она будет аналитичной по μ в окрестности точки $\mu = 0$. В общем случае дело обстоит сложнее (см. [16]).

Покажем, как на практике находить поправки к собственным значениям и собственным функциям. Пусть выполнены условия теоремы 3.7.4 и

$$T(\mu) = T(0) + \mu V,$$

где $T(0)$ и V -самосопряженные операторы в конечномерном гильбертовом пространстве. Пусть ψ_j^0 , $1 \leq j \leq n$ -ортонормированный базис в пространстве $\mathbf{Im}(P_1(0))$. Будем искать собственные значения и соответствующие собственные функции в виде

$$\lambda_j(\mu) = \lambda_0 + b_j\mu + O(\mu^2)\,,\; 1 \leq j \leq n,$$
$$\psi_j(\mu) = \sum_{1\leq i\leq n} a_{j\,,i}\psi_i^0 + \mu\phi_j + O(\mu^2).$$

Подставляя эти разложения в уравнение

$$T(\mu)\psi_j(\mu) = \lambda_j(\mu)\psi_j(\mu)$$

и собирая слагаемые с первыми степенями μ, мы получаем уравнения

$$(T(0) - \lambda_0)\phi_j = \sum_{1\le i\le n} (b_j - V)a_{(j\,,\,i)}\psi_i^0\,,\, 1 \le j \le n. \tag{3.209}$$

Чтобы эти уравнения имели решения, нужно, чтобы правая часть (3.209) была ортогональна всем функциям ψ^0. Это дает систему уравнений

$$\sum_{1\le i\le n} a_{(j\,,\,i)}(\delta_i^k b_j - <\psi_k^0\,,\,V\psi_i^0>) = 0\,,\,1 \le j \le n\,,\,1 \le k \le n. \tag{3.210}$$

Условие существования нетривиального решения у этой системы уравнений дает уравнение для

$$b_j\,:\,\det(\delta_i^k b_j - <\psi_k^0\,,\,V\psi_i^0>) = 0\,,\,1 \le i\,,\,k \le n. \tag{3.211}$$

Пусть b_j корень уравнения (3.211) и вектор $a_j = (a_{(j\,,\,1)}\,,\,a_{(j\,,\,2)}\ldots)$ есть нормированное условием

$$\sum_{1\le i\le n} |a_{(j\,,\,i)}|^2 = 1$$

решение системы (3.210),

$$\psi_j(0) = \sum_{1\le i\le n} a_{(j\,,\,i)}\psi_i^0.$$

Пусть векторы $\psi_k\,,\,\lambda_k \ne \lambda_0$ -нормированные собственные векторы оператора $T(0)$, которые составляют базис в пространстве, ортогональном пространству $\mathbf{Im}(P_1(0))$:

$$T(0)\psi_k = \lambda_k\psi_k\;,\;\psi_k\perp\mathbf{Im}(P_1(0)).$$

Из уравнения (3.209) мы находим:

$$<\psi_k\,,\,(T(0) - \lambda_0)\phi_j >= (\lambda_k - \lambda_0) <\psi_k\,,\,\phi_j >= - <\psi_k\,,\,V\phi_j(0)>$$

и получаем:

$$\begin{aligned}
&\psi_j(\mu) = \psi_j(0) + \\
&\left(\sum_{\lambda_k\ne\lambda_0} (\lambda_0 - \lambda_k)^{-1} <\psi_k\,,\,V\psi_j(0)>\psi_k\right)\mu + O(\mu^2) \\
&\lambda_j(\mu) = \lambda_0 + b_j\mu + O(\mu^2),
\end{aligned}$$

где λ_k , ψ_k система собственных значений и собственных функций оператора $T(0)$, а b_j дается формулой (3.211).

Так как
$$\forall(\lambda_k \neq \lambda_0) : \psi_j(0) \perp \psi_k,$$
то
$$\|\psi_j(0) + \mu\phi_j\|^2 = 1 + O(\mu^2).$$

3.8 Компактные операторы.

3.8.1 Определения и основные свойства компактных операторов.

Определение 3.8.1. Линейный оператор
$$T : B_1 \mapsto B_2$$
компактен, если он переводит единичный шар пространства B_1 в множество, замыкание которого в пространстве B_2 -компакт.

В силу теоремы 2.3.3 (см. стр. 129) это определение эквивалентно следующему.

Определение 3.8.2. Оператор T компактен, если из любой последовательности $\{T(x_n) \mid 1 \leq n < \infty \,, \|x_n \mid B_1\| \leq 1\}$ можно выделить сходящуюся в пространстве B_2 подпоследовательность.

Предел этой последовательности может и не принадлежать множеству $T(b(0\,,\,1))$.

Напомним (см. ту же теорему 2.3.3), что в полном метрическом пространстве множество M компакт, если оно замкнуто и сверхограничено, т. е. для любого $\epsilon > 0$ существует такой конечный набор шаров $\{b(x_j\,,\,\epsilon)\,,\,1 \leq j \leq n(\epsilon)\}$, что
$$M \subset \bigcup_j b(x_j\,,\,\epsilon).$$
Удовлетворяющее этому условию множество $\{x_j\} \subset M$ называется конечной ϵ-сетью для множества M.

Определение 3.8.1 эквивалентно следующему определению.

Определение 3.8.3. Оператор T компактен, если образ единичного шара $T(b(0\,,\,1))$ -сверхограниченное множество.

Все данные выше определения эквивалентны. Иногда компактный оператор определяется как оператор, который любую слабо сходящуюся последовательность переводит в последовательность, сходящуюся по норме. Мы не будем использовать это определение.

Лемма 3.8.1. *Если линейный оператор компактен, то он ограничен и поэтому непрерывен.*

Доказательство. Если $\{x_n \mid 1 \leq n < \infty\} \subset B_1$ такая последовательность, что

$$\|x_n \mid B_1\| \leq 1 \ , \ \|T(x_n) \mid B_2\| \to \infty \, , \, n \to \infty,$$

то из последовательности $T(x_n)$ нельзя извлечь сходящуюся в пространстве B_2 подпоследовательность, что противоречит компактности множества $\mathbf{Cl}(T(b(0\,,\,1)))$. Следовательно,

$$\sup\{\|T(x) \mid B_2\| \mid x \in b(0\,,\,1) \subset B_1\} < \infty,$$

откуда следует, что оператор T ограничен и поэтому непрерывен.

Однако, как мы увидим позже, если пространство B_1 имеет бесконечную размерность, не любой непрерывный оператор в нем компактен. Иногда компактные операторы называются вполне непрерывными.

Перечислим некоторые очевидные свойства компактных операторов.

Лемма 3.8.2. *1. Если операторы T_1 и T_2 -компактны, то оператор*

$$T = \alpha T_1 + \beta T_2$$

-компактен.

2. Если оператор T компактен, а оператор A ограничен, то операторы AT , TA -компактны.

3. Если $\{T_n \mid 1 \leq n < \infty\} \subset \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$ последовательность компактных операторов, которая сходится в норме пространства $\mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$ к оператору T, то оператор T компактен.

Мы докажем только последнее утверждение. Достаточно доказать, что при любом $\epsilon > 0$ множество $\mathbf{Cl}(T(b(0\,,\,1)))$ содержит конечную ϵ-сеть . Пусть

$$y \in \mathbf{Cl}(T(b(0\,,\,1))) \ , \ \{x_j\} \subset b(0\,,\,1) \subset B_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\|y - T(x_j) \mid B_2\| \leq \|y - T(x) \mid B_2\| + \|T(x - x_j) \mid B_2\| \leq \\ &\|y - T(x) \mid B_2\| + 2\|T - T_n \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2\| + \\ &\|T_n(x - x_j) \mid B_2\|. \end{aligned} \tag{3.212}$$

Сначала выберем $x \in T(b(0\,,\,1))$ так, чтобы воподнялось неравенство

$$\|y - T(x) \mid B_2\| < \epsilon/3.$$

Затем выберем n так, чтобы выполнялось неравенство

$$2\|T - T_n \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\| < \epsilon/3.$$

Потом выберем множество $\{x_j \mid 1 \le j \le N(\epsilon)\} \subset b(0\,,\,1) \subset B_1$ так, чтобы множество $\{T(x_j) \mid 1 \le j \le N(\epsilon)\}$ было конечной $\epsilon/3$-сетью в множестве $\mathbf{Cl}(T_n(b(0\,,\,1)))$. Тогда из (3.212) будет следовать неравенство

$$\min\{\|y - T(x_j) \mid B_2\| \mid 1 \le j \le N(\epsilon)\} < \epsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

Приведем пример компактного оператора.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ -замкнутая ограниченная область с гладкой границей, $k(x\,,\,y)$ -непрерывная в области $D \times D$ функция.

Лемма 3.8.3. *Оператор*

$$K : L^p(D) \mapsto C(D)\ ,\ Kf(x) = \int\limits_D k(x\,,\,y)f(y)dy,\ 1 < p < \infty \qquad (3.213)$$

компактен.

Доказательство. Нам нужно доказать, что множество

$$M = \{\phi(x) \mid \phi(x) = \int\limits_D k(x\,,\,y)f(y)dy,\ \|f \mid L^p(D)\| \le 1\}$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Это утверждение есть следствие следующих оценок.

$$|\phi(x)| = |\int\limits_D k(x\,,\,y)f(y)dy| \le \left(\int\limits_D |k(x\,,\,y)|^q dy\right)^{1/q} \|f \mid L^p(D)\|,$$

$$\le \sup\{|k(x\,,\,y)| \mid x \in D\,,\, y \in D\}\mathrm{mes}(D)^{1/q}\|f \mid L^p(D)\|;$$

$$|\phi(x) - \phi(x')| \le$$

$$\sup\{|k(x\,,\,y) - k(x'\,,\,y)| \mid y \in D\}\mathrm{mes}(D)^{1/q}\|f \mid L^p(D)\|.$$

При выводе этих оценок мы воспользовались неравенством Гельдера, положив $q = p/(p-1)$.

Из доказаной леммы следует, что оператор (3.213) компактен как оператор из $L^p(D)$ в $L^q(D)$ при любом $1 < q < \infty$, так как из сходимости в пространстве $C(D)$ вытекает сходимость в каждом из пространств $L^q(D)$.

Следующая теорема называется теоремой Шаудера.

Теорема 3.8.1. *Оператор*

$$T \in \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$$

компактен в том и только том случае, если сопряженный оператор

$$T^\star \in \mathcal{L}(B_2^\star \mapsto B_1^\star)$$

компактен.

Доказательство. Сначала докажем, что из компактости оператора T следует компактность оператора $T^\star$. Пусть оператор T компактен и

$$\{f_n \mid 1 \leq n < \infty\} \subset b(0\,,\,1) \subset B_2^\star.$$

Нам нужно доказать, что последовательность $T^\star(f_n)$ содержит сходящуюся в пространстве $B_1^\star$ подпоследовательность.

Имеем:

$$\forall (x \in B_1): \; < (T^\star(f_n) - T^\star(f_m) \mid x >=< (f_n - f_m) \mid T(x) > . \qquad (3.214)$$

Заданная на компактном множестве $\mathbf{Cl}(Tb(0\,,\,1))$ последовательность функций

$$\mathbf{Cl}(Tb(0\,,\,1)) \ni y \mapsto f_n(y)$$

равномерно ограничена:

$$\forall n : |f_n(y)| \leq \|f_n \mid B_2^\star\| \cdot \|T \mid \mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)\| \cdot \|x \mid B_1\|$$

и равностепенно непрерывна, так как:

$$|f_n(y) - f_n(y')| = |f_n(y - y')| \leq \|f_n \mid B_2^\star\| \cdot \|y - y' \mid B_2\|.$$

По теореме Арцела-Асколи (см. теорему 2.3.4 на стр. 133) последовательность f_n содержит сходящуюся в метрике

$$d(f\,,\,g) = \sup\{|f(y) - g(y)| \mid y \in \mathbf{Cl}(Tb(0\,,\,1))\}$$

подпоследовательность. Будем считать, что сходится сама последовательность f_n. В силу равенства (3.214)

$$\begin{aligned}
&\|T^\star(f_n) - T^\star(f_m) \mid B_1^\star\| = \\
&\sup\{| < T^\star(f_n) - T^\star(f_m) \mid x > | \mid \|x \mid B_1\| \leq 1\} \leq \\
&d(f_n\,,\,f_m),
\end{aligned}$$

что и доказывает сходимость последовательности $T^\star(f_n)$.

Теперь предположим, что оператор $T^\star$ компактен и докажем, что оператор T компактен.

Если оператор $T^\star$ компактен, то в силу только что доказанного свойства оператор

$$T^{\star\star} : B_1^{\star\star} \mapsto B_2^{\star\star}$$

компактен. Пусть $\{x_n\} \subset b(0\,,\,1) \subset B_1$ и J -определенное формулой (3.68) (см. стр. 178) изометрическое вложение:

$$J : B_1 \mapsto B_1^{\star\star}.$$

Тогда

$$\forall (n\,,\, m > N(\epsilon))\ \|T(x_n) - T(x_m) \mid B_2\| =$$
$$\|T^{\star\star}(J(x_n)) - T^{\star\star}(J(x_m)) \mid B_2^{\star\star}\| < \epsilon,$$

если только последовательность $\{x_n\}$ выбрана так, что последовательность $T^{\star\star}(J(x_n))$ сходится, что можно сделать в силу компактности оператора $T^{\star\star}$ и включения $\{J(x_n)\} \subset b(0\,,\,1) \subset B_1^{\star\star}$. Теорема доказана.

Следующая теорема называется теоремой (или леммой) Рисса о почти перпендикуляре. Эта теорема не использует понятие компактости, но на ней основано доказательство часто используемой теоремы Рисса о компактности единичного шара в банаховом пространстве и многих других теорем о компактных операторах.

Теорема 3.8.2. *Пусть B_0 -замкнутое линейное подпространство банахова простанства B и $B \backslash B_0 \neq \emptyset$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ в пространстве B существует такой вектор x, что выполнены условия:*

$$\|x\| = 1,\ dist(x\,,\, B_0) > 1 - \epsilon. \tag{3.215}$$

Доказательство. Пусть $y \in B \setminus B_0$. Тогда $\operatorname{dist}(y\,,\, B_0) = \alpha > 0$ и существует такой вектор $z \in B_0$, что

$$\|z - y\| < (1 + \epsilon)\alpha.$$

Пусть

$$x = (z - y)/\|z - y\|.$$

Тогда $\|x\| = 1$ и

$$\forall (z' \in B_0) : \|x - z'\| = \|z - y\|^{-1} \|z - \|z - y\| z' - y\| \geq$$
$$\frac{\alpha}{(1 + \epsilon)\alpha} > 1 - \epsilon.$$

Теорема доказана.

Следующая ниже теорема и есть упоминавшаяся теорема Рисса о компактности единичного шара.

Теорема 3.8.3. *Если в банаховом пространстве B замыкание единичного шара есть компактное множество, то банахово пространство B конечномерно.*

Доказательство. Пусть $\{e_1\,, \ldots\} \subset B$ -линейно-независимые векторы, норма которых равна единице,

$$B_n = \mathbf{Cl}(\mathrm{span}\{e_1\ \ldots, e_n\}).$$

Тогда $B_n \subset B_{(n+1)}$, и если $B_{(n+1)} \setminus B_n \neq \emptyset$, то согласно предыдущей теореме существует такой вектор $y_n \in B_{(n+1)}$, что

$$\|y_n\| = 1,\ \mathrm{dist}(y_n\,,\,B_n) > 1/2.$$

Если последовательность $\{y_n\}$ бесконечна, то это будет такая принадлежащая замыканию единичного шара последовательность, из которой нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность, поэтому если единичный шар компактен, то начиная с некоторого номера n должно быть выполнено равенство $B_n = B_{(n+1)}$. Теорема доказана.

3.8.2 Теория Рисса-Шаудера.

Теория Рисса-Шаудера описывает резольвенту компактного оператора и устанавливает связь между областью значений и ядром оператора $(\lambda\mathsf{id} - T)$ в том случае, если оператор T компактен. Эти результаты будут подытожены нами в теореме 3.8.5.

Мы будем считать, что рассматриваемое нами банахово пространство рефлексивно:

$$B^{\star\star} = B.$$

Начнем мы с доказательства нескольких лемм. В дальнейшем множество компактных операторов, действующих из пространства B в пространство B мы обозначим символом $\mathcal{K}(B \mapsto B)$. Ясно, что

$$\mathcal{K}(B \mapsto B) \subset \mathcal{L}(B \mapsto B).$$

Лемма 3.8.4. *Если T -компактный оператор и $\lambda \neq 0$, то пространство* $\mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - T)$ *замкнуто.*

Доказательство. Пусть

$$y_n \in \mathbf{Im}(\lambda \mathsf{id} - T)\ ,\ y_n \to y_0\ ,\ n \to \infty.$$

Нам нужно доказать, что

$$y_0 \in \mathbf{Im}(\lambda \mathsf{id} - T).$$

Пусть

$$y_n = (\lambda \mathsf{id} - T)(x_n).$$

Положим

$$\alpha_n = \mathrm{dist}(x_n\ , \mathbf{Ker}(\lambda \mathsf{id} - T)),$$

и пусть элементы w_n выбраны так, что

$$w_n \in \mathbf{Ker}(\lambda \mathsf{id} - T)\ ,\ \alpha_n \le \|x_n - w_n\| \le (1 + 1/n)\alpha_n.$$

Положим

$$z_n = x_n - w_n.$$

Рассмотрим два случая: $\alpha_n \le const$ и $\alpha_n \to \infty$.

В первом случае мы имеем:

$$z_n = (1/\lambda)(y_n + Tz_n)\ ,\ \|z_n\| \le const. \tag{3.216}$$

Так как оператор T компактен, из последовательности Tz_n можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Для простоты можно считать, что сходится последовательность Tz_n. Переходя к пределу в предыдущем равенстве, мы получаем:

$$z_0 = (y_0 + Tz_0)/\lambda,$$

Следовательно,

$$y_0 \in \mathbf{Im}(\lambda \mathsf{id} - T).$$

Теперь мы покажем, что второй случай невозможен. Пусть $\alpha_n \to \infty$ и

$$\xi_n = z_n/\|z_n\|.$$

Тогда $\|\xi_n\| = 1$, и мы можем предположить, что последовательность $T\xi_n$ сходится. Тогда из (3.216) следует, что и сама последовательность ξ_n сходится:

$$\xi_n \to \xi_0, \tag{3.217}$$

причем

$$\lambda \xi_0 = T\xi_0.$$

С другой стороны,

$$\|\xi_n - \xi_0\| = \|x_n - w_n\|^{-1}\|x_n - w_n - (\|x_n - w_n\|)\xi_0\| \geq$$
$$\|x_n - w_n\|^{-1}\mathrm{dist}(x_n\,, \mathbf{Ker}(\lambda \mathsf{id} - T)) \geq$$
$$\frac{\alpha_n}{(1+1/n)\alpha_n} \to 1\,,\ n \to \infty.$$

Это противоречит определению элемента ξ_0 как предела последовательности ξ_n. Лемма доказана.

Лемма 3.8.5. *Если T -компактный оператор, $\lambda \neq 0$ и*

$$\mathbf{Im}(\lambda \mathsf{id} - T) = B, \tag{3.218}$$

то

$$\mathbf{Ker}(\lambda \mathsf{id} - T) = 0. \tag{3.219}$$

Доказательство. Предположим, что выполнено равенство (3.218), а равенство (3.219) не выполнено. Докажем, что это противоречит компактности оператора T.

Положим

$$N_k = \mathbf{Ker}(\lambda \mathsf{id} - T)^k\,,\ k = 1\,,\ \ldots.$$

Каждое из пространств N_k замкнуто и

$$\forall k : N_k \subset N_{(k+1)}. \tag{3.220}$$

В силу сделанных нами предположений

$$N_1 \neq 0,$$

и существуют такие векторы x_1 , x_2, что

$$x_1 \neq 0\,,\ (\lambda \mathsf{id} - T)x_1 = 0\,,\ (\lambda \mathsf{id} - T)x_2 = x_1.$$

Но тогда

$$(\lambda \mathsf{id} - T)x_2 \neq 0\,,\ (\lambda \mathsf{id} - T)^2 x_2 = 0,$$

Следовательно,

$$x_2 \notin N_1\,,\ x_2 \in N_2\,,\ N_2 \setminus N_1 \neq 0.$$

Мы можем продолжить наше построение и получим, что в (3.220) все включения -строгие:

$$\forall k : N_{(k+1)} \setminus N_k \neq 0.$$

В силу теоремы Рисса о почти-перпендикуляре 3.8.2 (см. стр. 226) существует такая последовательность $\{y_k\}$, что

$$\|y_k\| = 1\,,\ y_k \in N_k\,,\ \mathrm{dist}(y_k\,,\ N_{(k-1)}) > 1/2.$$

Дале мы замечаем, что

$$\begin{aligned}&Ty_n - Ty_m = \lambda[y_n - (y_m - ((\lambda\mathsf{id} - T)y_m - (\lambda\mathsf{id} - T)y_n)/\lambda)],\\ &\forall(n > m) : y_m - ((\lambda\mathsf{id} - T)y_m - (\lambda\mathsf{id} - T)y_n)/\lambda \in N_{(n-1)},\end{aligned}$$

поэтому

$$\forall(n > m) : \|Ty_n - Ty_m\| \geq |\lambda|\mathrm{dist}(y_n\,,\ N_{n-1}) = |\lambda|/2.$$

Мы видим, что из последовательности Ty_n нельзя извлечь сходящейся подпоследовательности, что противоречит компактности оператора T. Лемма доказана.

Лемма 3.8.6. *Если оператор T компактен и*

$$\mathbf{Ker}(\lambda\mathsf{id} - T) = 0, \tag{3.221}$$

то

$$\mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - T) = B. \tag{3.222}$$

Доказательство. В силу теоремы 3.4.8 (см. стр. 181) из условия (3.221) следует равенство

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - T)^\star) = B^\star.$$

Так как в силу теоремы Шаудера оператор $T^\star$ компактен, то из леммы 3.8.4 следует, что

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - T)^\star) = \mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - T)^\star) = B^\star.$$

Воспользовавшись леммой 3.8.5, мы получаем:

$$\mathbf{Ker}(\lambda\mathsf{id} - T)^\star = 0.$$

На основе теоремы 3.4.8 отсюда следует, что

$$\mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - T) = \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - T)) = B.$$

Лемма доказана.

Из лемм 3.8.6 и 3.8.5 следует

Лемма 3.8.7. *Если оператор T компактен и $\lambda \neq 0$, то*

$$\mathbf{Ker}(\lambda \mathsf{id} - T) = 0$$

в том и только том случае, если

$$\mathbf{Im}(\lambda \mathsf{id} - T) = B.$$

Из этого утверждения и теоремы Банаха 3.3.6 (см. стр. 168) следует

Теорема 3.8.4. *Если оператор T компактен и $\lambda \neq 0$, то либо*

$$\mathbf{Ker}(\lambda \mathsf{id} - T) \neq 0, \tag{3.223}$$

либо

$$(\lambda \mathsf{id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(B \mapsto B). \tag{3.224}$$

Утверждение теоремы 3.8.4 называется альтернативой Фредгольма. Необходимость условия (3.223) тривиальна: если это условие не выполнено, то однозначно определенного оператора (3.224) не существует. Нетривиальная часть теоремы 3.8.4 состоит в том, что условие (3.223) достаточно для существования оператора (3.224).

Из теоремы 3.8.4 следует, что отличные от нуля точки спектра компактного оператора есть его собственные значения и только собственные значения есть отличные от нуля особые точки резольвенты компактного оператора.

Изучим эти собственные значения.

Напомним один результат из линейной алгебры.

Лемма 3.8.8. *Если T -линейный оператор в линейном пространстве L и $\{x_j\,,\, 1 \leq j \leq n\}$ -последовательность векторов, которые удовлетворяют уравнениям*

$$\forall j : x_j \neq 0\ ,\ \lambda_j x_j = T(x_j)\ ;\ (j \neq k) \Rightarrow (\lambda_j \neq \lambda_k), \tag{3.225}$$

то векторы $\{x_j\}$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \alpha_j x_j = 0. \tag{3.226}$$

Умножая уравнение на оператор T, мы получим равенства:

$$\sum_{1\le j\le n} \alpha_j x_j = 0,$$
$$\sum_{1\le j\le n} \alpha_j \lambda_j x_j = 0,$$
$$\dots\ \dots\dots$$
$$\sum_{1\le j\le n} \alpha_j \lambda_j^{n-1} x_j = 0.$$

Эта система уравнений относительно неизвестных $\{x_j\}$ имеет нетривиальное решение только в том случае, если

$$\alpha_1 \dots \alpha_n \prod_{1\le j<k\le n} (\lambda_j - \lambda_k) = 0,$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

Заметим, что размерность пространства L в данном случае роли не играет.

Лемма 3.8.9. *Если оператор T компактен и $\{x_j\ ,\ 1 \le j < \infty\}$ -последовательность линейно независимых векторов, которые удовлетворяют уравнениям*

$$\lambda_j x_j = T(x_j),$$

то либо последовательность $\{x_j\}$ конечна, либо

$$\lambda_j \to 0\ ,\ j \to \infty.$$

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{x_j\}$ бесконечна и

$$\forall j : \lambda_j \ne 0.$$

(Если нужно, мы можем перейти к подпоследовательности.) Пусть

$$L_n = \mathrm{span}\{x_1, \dots x_n\}.$$

Тогда

$$L_n \subset L_{n+1}\ ,\ L_{n+1} \setminus L_n \ne \emptyset.$$

В силу леммы о почти-перпендикуляре существуют такие векторы $\{y_n\}$, что

$$\|y_n\| = 1\ ,\ \mathrm{dist}(y_n\ ,\ L_{n-1}) \ge 1/2\ ,\ y_n = \sum_{1\le j\le n} \beta_n^j x_j.$$

Заметим, что обязательно выполнено неравество

$$\beta_n^n \neq 0,$$

так как

$$y_n \notin L_{(n-1)}.$$

Положим

$$w_j = y_j/\lambda_j.$$

Пусть $n > m$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}&T(w_n) - T(w_m) =\\&\beta_n^n x_n + z_n = y_n + v_n \ ; \ v_n \in L_{(n-1)} \, , \, z_n \in L_{(n-1)}.\end{aligned}$$

Из этого равенства следует, что

$$\|T(w_n) - T(w_m)\| \geq \mathrm{dist}(y_n \, , \, L_{(n-1)}) \geq 1/2. \tag{3.227}$$

Если

$$\forall j : \ |\lambda_j| \geq const. > 0,$$

то

$$\forall n : \ \|w_n\| < const. < \infty,$$

а это противоречит тому, что оператор T компактен, так как в силу (3.227) из последовательности Tw_n нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Лемма доказана.

Из лемм 3.8.9 и 3.8.8 вытекает

Лемма 3.8.10. *Если T -компактный оператор и*

$$\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T) \neq 0, \tag{3.228}$$

то λ_0 -изолированная особая точка резольвенты $R(\lambda \, , \, T)$ и

$$dim(\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T)) < \infty.$$

Пусть выполнено условие (3.228). Пусть $P(\lambda_0)$ -спектральный проектор:

$$P(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_l R(\lambda \, , \, T) d\lambda, \ l = \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| = \delta\}.$$

Если $x \in \mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T)$, то $(\lambda \mathsf{id} - T)x = (\lambda - \lambda_0)x$, и

$$R(\lambda\,,\, T)x = (\lambda - \lambda_0)^{-1}x\,,\; P(\lambda_0)x = x,$$

поэтому

$$\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T) \subset \mathbf{Im}(P(\lambda_0)).$$

(Вспомним включение (3.169) на стр. 206).

Лемма 3.8.11. *Справедливы равенства:*

$$P^\star(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_l R(\lambda\,,\, T^\star)d\lambda,\; l = \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| = \delta\}, \tag{3.229}$$

$$dim(\mathbf{Im}(P(\lambda_0))) = dim(\mathbf{Im}(P^\star(\lambda_0))) < \infty, \tag{3.230}$$

$$dim(\mathbf{Ker}(\lambda_0 - T)) = dim(\mathbf{Ker}(\lambda_0 - T^\star)) \tag{3.231}$$

Доказательство. Равенство (3.229) следует из теоремы 3.4.9 (см. стр. 183).

Справедливо равенство

$$R(\lambda\,,\, T) = \frac{1}{\lambda}(\mathsf{id} + TR(\lambda\,,\, T)),$$

откуда следует, что

$$P(\lambda_0) = \left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_l \frac{1}{\lambda}R(\lambda\,,\, T)d\lambda\right)T.$$

Следовательно, оператор $P(\lambda_0)$ есть произведение ограниченного оператора и компактного и поэтому компактен. Так как пространство $\mathbf{Im}(P(\lambda_0))$ замкнуто и инвариантно относительно изометричного в пространстве $\mathbf{Im}(P(\lambda_0))$ компактного оператора $P(\lambda_0)$, то единичный шар в пространстве $\mathbf{Im}(P(\lambda_0))$ компактен и в силу теоремы Рисса 3.8.3 (см. стр. 227) пространство $\mathbf{Im}(P(\lambda_0))$ конечномерно.

Пусть

$$\mathbf{Im}(P(\lambda_0)) = \mathrm{span}\{e_1\,,\, \ldots, e_n\}.$$

На пространстве $\mathbf{Im}(P(\lambda_0))$ определим линейные функционалы

$$f^{(j)} :\; < f^{(j)} \mid e_k >= \delta_k^j\,,\; 1 \leq j \leq n \tag{3.232}$$

и распространим их (используя теорему Хана-Банаха) на все пространство B.

Справедливо равенство

$$\forall(x \in \mathbf{Im}(P(\lambda_0))) : x = \sum_{1 \le j \le n} f^{(j)}(x) < f \mid e_j > .$$

Следовательно,

$$\forall(f \in \mathbf{Im}(P^\star(\lambda_0))) : \ < P^\star(\lambda_0)f \mid x >=< f \mid P(\lambda_0)(x) >= \sum_{1 \le j \le n} f^{(j)}(x)e_j,$$

и

$$(\forall f \in \mathbf{Im}(P^\star(\lambda_0))) : f = \sum_{1 \le j \le n} < f \mid e_j > f^{(j)}.$$

Следовательно, векторы $\{f^{(j)}\,,\, 1 \le j \le n\}$ составляют базис в пространстве $\mathbf{Im}(P^\star(\lambda_0))$ и выполнено равенство (3.230).

Теперь заметим, что число $\dim(\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T))$ есть дефект матрицы

$$a_k^{(j)} =< f^{(j)} \mid (\lambda_0[id] - T)(e_k) >,$$

а число $\dim(\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T^\star))$ есть дефект матрицы, транспонированной к матрице $\{a_k^{(j)}\}$. Как известно, эти дефекты совпадают.

Лемма доказана.

Подытожим полученные нами результаты.

Теорема 3.8.5. *Пусть оператор T компактен. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Оператор $T^\star$ компактен.

2. Если $\lambda_0 \ne 0$ и

$$\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T) = 0,$$

то

$$\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T^\star) = 0,$$

и

$$(\lambda_0 - T)^{-1} \in \mathcal{L}(B \mapsto B)\,,\, (\lambda_0 \mathsf{id} - T^\star)^{-1} \in \mathcal{L}(B^\star \mapsto B^\star)$$

3. Если $\lambda_0 \ne 0$ и

$$\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T) \ne 0,$$

то λ_0 -полюс резольвент $R(\lambda\,,\,T)$ и $R(\lambda\,,\,T^\star)$, причем

$$\begin{aligned}
&dim(\mathbf{Im}(P(\lambda_0))) = dim(\mathbf{Im}(P^\star(\lambda_0))) < \infty,\\
&dim(\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T)) = dim(\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T^\star)),\\
&\mathbf{Im}(\lambda_0 \mathsf{id} - T) = \mathcal{N}(\mathbf{Ker}(\lambda_0 \mathsf{id} - T^\star)).
\end{aligned}$$

Последнее утверждение есть напоминание теоремы 3.4.8 (см. стр. 181).

Близкое по смыслу утверждение составляет содержание следующей ниже теоремы, которая есть следствие теорем 3.8.5 и 3.7.4 и иногда называется аналитической теоремой Фредгольма.

Теорема 3.8.6. *Пусть D -открытая связная область в плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}^1$. Пусть в области D задана аналитическая функция*

$$D \ni \mu \mapsto K(\mu) \in \mathcal{L}(B \mapsto B),$$

значения которой есть компактные операторы:

$$\forall \mu : K(\mu) \in \mathcal{K}(B \mapsto B).$$

Тогда либо оператор $(\mathsf{id} - K(\mu))$ не обратим ни в одной точке области D, либо в области D существует такая не равная тождественно нулю аналитическая функция $\phi(\mu)$ и такие аналитические функции

$$D \ni \mu \mapsto r(\mu) \in \mathcal{K}(B \mapsto B)\,,\, D \ni \mu \mapsto a(\mu) \in \mathcal{L}(B \mapsto B),$$

что справедливо равенство

$$\forall (\phi(\mu) \neq 0) : (\mathsf{id} - K(\mu))^{-1} = \frac{1}{\phi(\mu)} r(\mu) + a(\mu),$$

причем

$$dim(\mathbf{Im}(r(\mu))) \leq const. < \infty \,,\, \mathbf{Im}(r(\mu)) \bigcap \mathbf{Im}(a(\mu)) = 0.$$

Доказательство. Достаточно заметить что точка $\lambda = 1$ может быть только изолированной особой точкой резольвенты $R(\lambda\,,\, K(\mu))$ и отвечающий этой особой точке спектральный проектор конечномерен, а затем применить теорему 3.7.4 в каждой точке $\mu \in D$.

3.9 Резольвента и спектр неограниченных операторов.

До сих пор все операторы в банаховых пространствах мы считали линейными ограниченными (а потому и непрерывными) операторами, область определения которых совпадает со всем пространством. Теперь мы переходим к изучению более общей ситуации: мы будем рассматривать такие линейные отображения, область опрделения которых есть не совпадающее со всем пространством линейное многообразие, а сами отображения не ограничены на своей области оперделения. Переходим к точным формулировкам.

Пусть B_1 и B_2 -банаховы пространства, $\mathbf{Dom}(A) \subset B_1$ -линейное многообразие (не обязательно замкнутое) в пространстве B_1.

Определение 3.9.1. Отображение

$$A : \mathbf{Dom}(A) \mapsto B_2$$

мы называем линейным отображением (линейным оператором), если

$$\begin{aligned}
&\forall(\alpha \in \mathbb{C}^1\,,\ \beta \in \mathbb{C}^1\,,\ x \in \mathbf{Dom}(A)\,,\ y \in \mathbf{Dom}(A)) : \\
&A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).
\end{aligned}$$

Если

$$\mathbf{Dom}(A_1) \neq \mathbf{Dom}(A_2),$$

то два оператора

$$A_1 : \mathbf{Dom}(A_1) \mapsto B_2\ ,\ A_2 : \mathbf{Dom}(A_2) \mapsto B_2$$

мы будем считать разными операторами, даже если их значения совпадают на множестве $\mathbf{Dom}(A_1)\bigcap\mathbf{Dom}(A_2)$.

Умножение неограниченного оператора на число коментариев не требует, а сумму двух неограниченных операторов A_1 и A_2 мы определяем только в том случае, если $\mathbf{Dom}(A_1)\bigcap\mathbf{Dom}(A_2) \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Dom}(A_1 + A_2) := \mathbf{Dom}(A_1)\bigcap\mathbf{Dom}(A_2), \\
&(\forall x \in \mathbf{Dom}(A_1 + A_2)) : (A_1 + A_2)(x) := A_1(x) + A_2(x).
\end{aligned}$$

Ядро неограниченного оператора определяется так:

$$\mathbf{Ker}(A) = \{x \mid x \in \mathbf{Dom}(A)\,,\ A(x) = 0\}.$$

Определим резольвенту неограниченного оператора.

Определение 3.9.2. Оператор $R(\lambda\,,\ A)$ называется резольвентой оператора , если

$$1.\mathbf{Dom}(R(\lambda\,,\ A)) = \mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - A)\ ,\ \mathbf{Im}(R(\lambda\,,\ A)) = \mathbf{Dom}(\lambda\mathsf{id} - A)) \tag{3.233}$$

$$2.\mathbf{Ker}(\lambda\mathsf{id} - A) = 0\ ,\ \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - A)) = B, \tag{3.234}$$

$$3.\sup\{\|R(\lambda\,,\ A)x\| \mid x \in \mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - A)\,,\ \|x\| \leq 1\} < \infty; \tag{3.235}$$

$$4.\forall(x \in \mathbf{Im}(\lambda\mathsf{id} - A)):\ (\lambda\mathsf{id} - A)R(\lambda\,,\ A)x = x, \tag{3.236}$$

$$5.\forall(x \in \mathbf{Dom}(\lambda\mathsf{id} - A)):\ R(\lambda\,,\ A)(\lambda\mathsf{id} - A)x = x. \tag{3.237}$$

Это определение согласуется с данными прежде определениями резольвенты элемента банаховой алгебры и резольвенты ограниченного оператора, но с понятием резольвенты неограниченного оператора нужно быть внимательным. В силу условия (3.235) резольвента по непрерывности продолжается на все пространство, но на этом продолжении может не быть выполнено равество $(\lambda \mathsf{id} - A)R(\lambda\,,\,A)x = x$.

Мы примем следующее

Определение 3.9.3. Оператор

$$R(\lambda\,,\,A) \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$$

называется резольвентой неограниченного оператора

$$A : \mathbf{Dom}(A) \mapsto B,$$

если

$$1.\mathbf{Ker}(\lambda \mathsf{id} - A) = 0\ ,\ \mathbf{Im}(\lambda \mathsf{id} - A) = B, \tag{3.238}$$

$$2.\ \mathbf{Dom}(A) \supset \mathbf{Im}(R(\lambda\,,\,A)), \tag{3.239}$$

$$3.\ \forall (x \in B) : (\lambda \mathsf{id} - A)R(\lambda\,,\,A)x = x, \tag{3.240}$$

$$4.\ \forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : R(\lambda\,,\,A)(\lambda \mathsf{id} - A)x = x. \tag{3.241}$$

В рассматриваемых нами приложениях (резольвента инфинитезимального оператора и резольвента самосопряженного оператора) оба определения совпадают. По умолчанию, мы будем пользоваться только вторым определением.

Определение 3.9.4. Резольвентным множеством res(A) неограниченного оператора A называется множество всех комплексных чисел, для которых существует резольвента:

$$\mathrm{res}(A) := \{\lambda \mid \exists R(\lambda\,,\,A)\}.$$

Спектром $\sigma(A)$ неограниченного оператора A называется дополнение резольвентного множества:

$$\sigma(A) = \mathbf{C}(\mathrm{res}(A)).$$

Часто бывает полезна следующая

Лемма 3.9.1. *Если существует такая последовательность* $\{x_n\} \in B$, *что*

$$\|x_n\| = 1\ ,\ y_n = (\lambda \mathsf{id} - A)x_n \to 0, \tag{3.242}$$

то $\lambda \in \sigma(A)$.

Доказательство. Если $\lambda \in \mathrm{res}(A)$, то существует оператор $R(\lambda\,,\,A)$, и из (3.242) следует, что

$$x_n = R(\lambda\,,\,a)y_n\,,\ 1 = \|x_n\| \leq \|R(\lambda\,,\,a)\| \cdot \|y_n\|,$$

что противоречит (3.242). Лемма доказана.

Сформулированный в данной лемме критерий принадлежности точки λ спектру оператора A иногда называется критерием (признаком) Вейля, а удовлетворяющая условию (3.242) последовательность -последовательностью Вейля.

Лемма 3.9.2. *1. Резольвентное множество открыто. Резольвента $R(\lambda\,,\,A)$ аналитична на своем резольвентном множестве как функция параметра λ со значениями в $\mathcal{L}(B \mapsto B)$ и удовлетворяет тождеству Гильберта:*

$$R(\lambda\,,\,A) - R(\mu\,,\,A) = -(\lambda - \mu)R(\lambda\,,\,A)R(\mu\,,\,A). \tag{3.243}$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathrm{res}(A)$. Рассмотрим равенство (3.243) как уравнение относительно неизвестного оператора $R(\mu\,,\,A) \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$:

$$(\mathsf{id} - (\lambda - \mu)R(\lambda\,,\,A))R(\mu\,,\,A) = R(\lambda\,,\,A). \tag{3.244}$$

При

$$|\lambda - \mu| < \|R(\lambda\,,\,A)\|^{-1}$$

уравнение (3.244) имеет единственное решение

$$R(\mu\,,\,A) = \left(\sum_{0\leq n<\infty}((\lambda-\mu)R(\lambda\,,\,A))^n\right)R(\lambda\,,\,A), \tag{3.245}$$

и это решение аналитично по μ в круге

$$\{\mu \mid |\lambda - \mu| < \|R(\lambda\,,\,A)\|^{-1}\}.$$

Докажем, что решение уравнения (3.244) есть резольвента оператора A.

Из (3.243) следует, что

$$\mathbf{Im}(R(\mu\,,\,A)) \subset \mathbf{Dom}(A).$$

Умножая обе части равенства (3.243) слева на $(\lambda\mathsf{id} - A)$, мы получаем:

$$(\lambda\mathsf{id} - A)R(\mu\,,\,A) = \mathsf{id} - (\mu - \lambda)R(\mu\,,\,A),$$

откуда следует, что
$$(\mu \mathsf{id} - A)R(\mu\,,\,A) = \mathsf{id}.$$
Аналогично, применяя равенство (3.243) к элементу $(\lambda \mathsf{id} - A)x$, мы получаем:
$$R(\mu\,,\,A)(\lambda \mathsf{id} - A)x = x + (\lambda - \mu)R(\mu\,,\,A)x,$$
а отсюда следует, что
$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : R(\mu\,,\,A)(\mu \mathsf{id} - A)x = x.$$
Лемма доказана.

Лемма 3.9.3. *Если*
$$\mathbf{Dom}(A_1) = \mathbf{Dom}(A_2)\ ,\ \lambda \in res(A_1)\bigcap res(A_2)\ ,\ (A_1 - A_2) \in \mathcal{L}(B \mapsto B),$$
то справедливы равенства
$$R(\lambda\,,\,A_1) - R(\lambda\,,\,A_2) = R(\lambda\,,\,A_1)(A_1 - A_2)R(\lambda\,,\,A_2), \tag{3.246}$$
$$R(\lambda\,,\,A_1) - R(\lambda\,,\,A_2) = R(\lambda\,,\,A_2)(A_1 - A_2)R(\lambda\,,\,A_1). \tag{3.247}$$

Равенства (3.247)-(3.246) есть две формы записи второго резольвентного тождества (уравнения). Первым резольвентным тождеством (уравнением) называют тождество Гильберта.

Доказательство. Имеем:
$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A_1)) : (\lambda \mathsf{id} - A_2)x - (\lambda \mathsf{id} - A_1)x = (A_1 - A_2)x. \tag{3.248}$$
В (3.248) сделаем замену
$$x \to R(\lambda\,,\,A_1)x$$
и умножим слева на $R(\lambda\,,\,A_2)$. Получим (3.246). Аналогично, сделав замену
$$x \to R(\lambda\,,\,A_2)x$$
и умножив слева на $R(\lambda\,,\,A_2)$, получим (3.247). Лемма доказана.

Лемма 3.9.4. *Если*
$$\exists (\lambda \in \mathbb{C}^1) :\ \ R(\lambda\,,\,A_1) = R(\lambda\,,\,A_2), \tag{3.249}$$
то
$$A_1 = A_2.$$

Доказательство. Из (3.249) следует, что

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A_1)) : x = R(\lambda\,,\, A_2)(\lambda\mathsf{id} - A_1)x.$$

Следовательно,

$$\mathbf{Dom}(A_1) \subset \mathbf{Dom}(A_2)$$

и

$$(\lambda\mathsf{id} - A_2)x = (\lambda\mathsf{id} - A_2)R(\lambda\,,\, A_2)(\lambda\mathsf{id} - A_1)x = (\lambda\mathsf{id} - A_1)x.$$

Определение 3.9.5. Графиком линейного оператора

$$A : B_1 \supset \mathbf{Dom}(A) \mapsto B_2$$

называется множество

$$\mathbf{Gr}(A) = \{x \oplus Ax \mid x \in \mathbf{Dom}(A)\},$$

рассматриваемое как подпространство прямой суммы $B_1 \oplus B_2$ банаховых пространств B_1 и B_2.

Множество $L \subset B_1 \oplus B_2$ есть график линейного оператора в том и только том случае, если, во-первых, L есть линейное многообразие и, во-втрых, из условий

$$x \oplus y \in L\,,\ x' \oplus y' \in L\,,\ x = x'$$

следует, что

$$y = y'.$$

Последнее условие для линейного многообразия эквивалентно требованию:

$$L \bigcap (0 \oplus B_2) = 0 \oplus 0. \tag{3.250}$$

Определение 3.9.6. Оператор A называется замкнутым, если его график замкнут как подпространство прямой суммы $B_1 \oplus B_2$ банаховых пространств $B_1 \supset \mathbf{Dom}(A)$ и $B_2 \supset \mathbf{Im}(A)$.

Определение 3.9.7. Оператор $\mathbf{Cl}(A)$ называется замыканием оператора A, если график оператора $\mathbf{Cl}(A)$ есть замыкание графика оператора A:

$$\mathbf{Gr}(\mathbf{Cl}(A)) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Cl}(\mathbf{Gr}(A)).$$

Замыкание графика оператора A не обязательно удовлетворяет условию (3.250), поэтому замыкание графика оператора не обязательно есть график какого-нибудь оператора, но очевидна

Лемма 3.9.5. *Если выполнено условие*

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Gr}(A))\bigcap(0\oplus B_2)=0\oplus 0, \tag{3.251}$$

то оператор A имеет замыкание $\mathbf{Cl}(A)$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{Dom}(\mathbf{Cl}(A))=Pr_1(\mathbf{Cl}(\mathbf{Cr}(A)),\\ &\forall(x\oplus y\in\mathbf{Cl}(\mathbf{Cr}(A))):\mathbf{Cl}(A)(x)=y.\end{aligned} \tag{3.252}$$

Для доказательства заметим, что в силу условия (3.251) соотношение (3.252) однозначно определяет оператор, график которого есть замкнутое множество $\mathbf{Cl}(\mathbf{Gr}(A))$.

Таким образом, замыкание $\mathbf{Cl}(A)$ оператора A -это оператор, который делает коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}\mathbf{Cl}(\mathbf{Gr}(A)) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{Pr}_1"'] & \mathbf{Cl}(\mathbf{Gr}(A)) \arrow[d, "\mathrm{Pr}_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\mathbf{Cl}(A)"] & B_2\end{tikzcd}$$

где Pr_j -оператор проектирования прямой суммы $B_1\oplus B_2$ на слагаемое B_j.

Так как

$$\mathbf{Gr}(A)\subset\mathbf{Cl}(\mathbf{Gr}(A)),$$

то

$$\mathbf{Dom}(A)\subset\mathbf{Dom}(\mathbf{Cl}(A))\ ,\ \forall(x\in\mathbf{Dom}(A)):Ax=\mathbf{Cl}(A)(x).$$

Заметим, что область опрделения $\mathbf{Dom}(A)$ замкнутого оператора может не быть замкнутым подпространством в банаховом пространстве $B_1\supset\mathbf{Dom}(A)$ и область опрделения замыкания оператора может не быть замыканием области определения исходного оператора.

В дальнейшем оператор и его замыкание, как правило, мы будем обозначать одним и тем же символом.

Рассмотрим примеры.

Пусть

$$\begin{aligned}&B=L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx);\\ &\mathbf{Dom}(A)=\{f\mid f(x)\in L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\ ,\ x^2f(x)\in L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\};\\ &A:\mathbf{Dom}(A)\mapsto L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\ ,\ Af(x)=x^2f(x).\end{aligned}$$

Область определения оператора A плотна в $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)$, так как она содержит все функции с компактным носителем. Оператор A неограничен. Действительно, положим

$$f_\epsilon(x) = (\epsilon/\pi)^{1/4}\exp(-\epsilon x^2/2).$$

Тогда

$$\forall(\epsilon > 0) : f_\epsilon \in \mathbf{Dom}(A)\ ,\ \|f_\epsilon\| = 1\ ,\ \|Af_\epsilon\| > const/\epsilon \to \infty\,,\ \epsilon \to 0.$$

Легко видеть, что

$$R(\lambda\,,\,A)f(x) = \frac{1}{(\lambda - x^2)}f(x)\ ,\ \sigma(A) = [0\,,\,\infty).$$

Оператор A замкнут. Для доказательства этого утверждения рассмотрим последовательность

$$f_n(x) \oplus Af_n(x) \in \mathbf{Gr}(A),$$

которая в топологии прямой суммы $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx) \oplus L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)$ сходится к точке $f_0(x) \oplus \psi(x)$ и докажем, что эта точка принадлежит графику оператора A.

Из определения нормы в прямой сумме пространств следует, что в метрике пространства $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)$

$$f_n(x) \to f_0(x)\ ,\ x^2 f_n(x) \to x^2 f_0(x) = \psi(x)\ ,\ n \to \infty.$$

Из полноты пространства $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)$ вытекает, что

$$f_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\ ,\ x^2 f_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx),$$

Следовательно,

$$f_0(x) \in \mathbf{Dom}(A)\ ,\ \psi(x) = Af_0(x) \text{ и } f_0(x) \oplus \psi(x) \in \mathbf{Gr}(A).$$

Заметим, что в рассмотренном примере область определения оператора A *не замкнута* в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)$.

Рассмотрим другой пример. Положим

$$\begin{aligned}
&B = L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx),\\
&\mathbf{Dom}(A) =\\
&\{f \mid f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\ ,\ f'(x) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\ ,\ f''(x) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\},\\
&A : \mathbf{Dom}(A) \to L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\ ,\ Af(x) = -\frac{d^2}{dx^2}f(x).
\end{aligned}$$

Оператор A неограничен. Действительно, пусть

$$f \in \mathbf{Dom}(A)\ ,\ \|f\| = 1.$$

Тогда

$$\sqrt{n} f(nx) \in \mathbf{Dom}(A)\ ,\ \|\sqrt{n} f(n\cdot)\| = 1,$$

но

$$\|A\sqrt{n} f(n\cdot)\| > const.n \to \infty\ ,\ n \to \infty.$$

Используя преобразование Фурье, можно доказать, что оператор дифференцирования сводится (позже мы уточним, в каком именно смысле) к оператору умножения на независимую переменную, поэтому рассмотренные нами примеры, по-существу, есть разные редакции примера одного и того же оператора.

Пусть

$$z = x + iy \in \mathbb{C}^1\ ,\ B = \{f(z) \mid \int |f(z)|^2 \exp(-|z|^2) dxdy < \infty\}.$$

Положим

$$\begin{aligned}&\mathbf{Dom}(A) = \{f \mid f(z) \in B\ ,\ |z| f(z) \in B\},\\ &A : \mathbf{Dom}(A) \to B\ ,\ Af(z) = zf(z).\end{aligned}$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае резольвентное множество оператора A пусто: $\mathrm{res}(A) = \emptyset$, и спектр оператора совпадает со всей комплексной плоскостью: $\sigma(A) = \mathbb{C}^1$.

3.10 Полугруппы операторов в банаховом пространстве.

Теория полугупп операторов в банаховом пространстве возникла при изучении уравнений вида

$$\frac{du}{dt} = Lu\,,\ t > 0\ ;\ u(+0) = u_0. \tag{3.253}$$

Одна из основных задач теории состоит в ответе на вопрос, при каких условиях на оператор L и начальные данные u_0 уравнение (3.253) имеет решение и это решение единственно. Оказывается, что ответ на эти вопросы можно дать в терминах некоторых свойств неограниченных операторов, с элементами теории которых мы только что познакомились.

Определение 3.10.1. Функция

$$T(t) : \mathbb{R}^1_+ \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$$

называется полугруппой класса C_0, если

1. $\forall(t_1 \in \mathbb{R}^1_+ \,,\, t_2 \in \mathbb{R}^1_+) : T(t_1)T(t_2) = T(t_1 + t_2)$.
2. $T(0) = \mathsf{id} \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$.
3. $(\forall x \in B)$ функция $\mathbb{R}^1_+ \ni t \mapsto T(t)(x) \in B$

непрерывна на $[0 \,,\, \infty)$.

Полугруппой называется функция $\mathbb{R}^1 \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$, которая удовлетворяет условиям 1 и 2. Термин C_0 уточняет условие 3 непрерывности этой функции. Иногда условие 3 формулируется в более слабой форме, которую мы здесь не рассматриваем.

Лемма 3.10.1. *Если $T(t)$ -полугруппа класса C_0, то она ограничена по норме на любом фиксированном интервале:*

$$\forall (t > 0) : \ \sup\{\|T(\tau)\| \mid \tau \le t\} < C(t) < \infty$$

(под нормой опрератора $T(t)$ здесь и ниже мы понимаем его норму в пространстве $\mathcal{L}(B \mapsto B)$).

Доказательство. Из условия 3 определения 3.10.1 следует, что для любого $x \in B$ функция $t \mapsto \|T(t)x\|$ непрерывна на $[0 \,,\, \infty)$, поэтому

$$\forall (t > 0 \,,\, x \in B) : \ \sup\{\|T(\tau)x\| \mid \tau \le t\} = C(x) < \infty.$$

Отсюда и из теоремы Банаха-Штейнгауза 3.3.2 (см. стр. 160) следует, что

$$\sup\{\|T(\tau)\| \mid \tau \le t\} \le C(t) < \infty.$$

Лемма доказана.

Следствием этого утверждения является

Лемма 3.10.2. *Если $T(t)$ -полугруппа класа C_0, то существуют такие константы $M < \infty \,,\, \omega < \infty$, что*

$$\forall (t > 0) : \ \|T(t)\| < M \exp(\omega t). \tag{3.254}$$

Доказательство. Пусть

$$t = n + \delta\ ,\ 0 \leq \delta < 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\|T(t)\| = \|T(n)T(\delta)\| \leq \\ &\|T(1)^n\| \cdot \|T(\delta)\| \leq \|T(1)\|^n \cdot \|T(\delta)\| \leq \\ &\sup\{\|T(\tau)\| \mid \tau \leq 1\} \exp(t \ln \|T(1)\|).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Замечание 3.10.1. О свойствах гладкости функции

$$t \mapsto \|T(t)\|$$

мы сейчас ничего сказать не можем: из наших рассуждений не следует даже измеримость этой функции.

Пусть $T(t)$ -полугруппа класса C_0 и

$$A_h(x) = \frac{1}{h}(T(h)x - x).$$

Положим

$$\mathbf{Dom}(A) := \{x \mid \exists \lim_{h \to +0} A_h(x)\}, \tag{3.255}$$

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : A(x) = \lim_{h \to +0} A_h(x). \tag{3.256}$$

Определение 3.10.2. Определенный равенством (3.256) оператор называется инфинитезимальным оператором полугруппы $T(t)$.

Если A -инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$, то говорят, что полугруппа $T(t)$ порождена инфинитезимальным оператором A.

Лемма 3.10.3. *Если A -инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$ и $x \in \mathbf{Dom}(A)$, то функция*

$$(0\,,\,\infty) \ni t \mapsto T(t)x$$

дифференцируема и

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x.$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$
\begin{aligned}
&\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)\,,\ \delta t > 0) : \frac{(T(t+\delta t) - T(t))x}{\delta t} = \\
&\left(\frac{T(\delta t) - \mathsf{id}}{\delta t}\right) T(t)x = T(t) \left(\frac{T(\delta t) - \mathsf{id}}{\delta t} x\right) \rightarrow \\
&AT(t)x = T(t)Ax\ ,\ \delta t \rightarrow 0, \\
&\frac{(T(t-\delta t) - T(t))x}{(-\delta t)} = T(t-\delta t) \left(\frac{T(\delta t) - \mathsf{id}}{\delta t} x\right) \rightarrow = T(t)Ax.
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Замечание 3.10.2. Инфинитезимальный оператор есть *правая* производная полугруппы в нуле. В лемме 3.10.3 утверждается, что существует *обычная* производная.

Теорема 3.10.1. *Если A -инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$ класса C_0, то следующие условия эквивалентны:*

1. $\mathbf{Dom}(A) = B$,
2. $\|T(t) - \mathsf{id}\| \rightarrow 0\,,\ t \rightarrow +0$,
3. $\exists(A \in \mathcal{L}(B \mapsto B)) : T(t) = \exp(tA)$.

Доказательство.

$1 \rightarrow 2$. Если предел (3.255) существует для любого $x \in B$, то в силу теоремы Банаха-Штейнгауза

$$\sup\{\|(T(h) - \mathbf{id})/h\| \mid 0 < h < h_0\} = C < \infty,$$

поэтому

$$\|T(h) - \mathbf{id}\| \leq Ch \rightarrow 0\,,\ h \rightarrow 0.$$

$2 \rightarrow 3$. Пусть $\epsilon > 0$ выбрано так, что

$$\forall(t < \epsilon) : \|T(t) - \mathbf{id}\| < 1/2.$$

Тогда

$$\sigma(T(t)) \subset b(1\,,\ 1/2) \subset \mathbb{C}^1,$$

и так как функция $\ln(z)$ аналитична в круге $b(1\,,\ 1/2)$, то определен оператор

$$\forall(0 < t < \epsilon) :\ V(t) = \ln T(t).$$

Если $0 < nt < \epsilon$, то

$$V(nt) = \ln T(nt) = \ln(T(t)^n) = nV(t).$$

Отсюда следует, что

$$V(t/n) = \frac{1}{n} V(t),$$

и

$$\forall (m\,,\, n\,,\, \frac{m}{n} t < \epsilon) : V\left(\frac{m}{n} t\right) = \frac{m}{n} V(t).$$

Из непрерывности оператора $V(t)$ как функции t отсюда следует, что

$$\forall (0 < t < \epsilon) :\; V(t) = tA\,,\; A \in \mathcal{L}(B \mapsto B),$$

и

$$T(t) = \exp(tA)\;,\; 0 < t < \epsilon.$$

С помощью полугруппового тождества это равенство распространяется на все $t > 0$.

$3 \mapsto 1$. Утверждение тривиально.

Рассмотрим примеры.

Пусть

$$B = \mathbb{R}^1\;,\; \forall (z \in \mathbb{R}^1) : T(t)z = \exp(at)z.$$

Это соотношение задает в пространстве $\mathbb{R}^1$ полугруппу класса C_0 с инфинитезимальным оператором

$$Az = az.$$

Область определения инфинитезимального оператора в рассматриваемом случае совпадает со всем пространством и инфинитезимальный оператор ограничен.

Пусть $B = C([0\,,\, 2\pi])$ -пространство всех непрерывных на отрезке $[0\,,\, 2\pi]$ периодичных: $f(0) = f(2\pi)\;,\; f \in B$ функций с обычной нормой. Положим

$$T(t)f(\phi) = f(\phi + t).$$

Это сотношение задает в пространстве $C([0\,,\, 2\pi])$ полугруппу класса C_0 с инфинитезимальным оператором

$$Af(\phi) = \frac{df(\phi)}{d\phi}.$$

Область определения инфинитезимального оператора -множество всех непрерывно дифференцируемых функций. Это множество плотно в пространстве $C([0\,,\, 2\pi])$, но не совпадает с ним, а инфинитезимальный оператор неограничен.

3.10.1 Теорема Хилле-Филлипса-Иосиды.

Следующая теорема является основной в теории полугрупп класса C_0.

Теорема 3.10.2. *Оператор A есть инфинитезимальный оператор полугруппы класса C_0 в банаховом пространстве B тогда и только тогда, если оператор A удовлетворяет следующим условиям.*

1. Область определения оператора A плотна в B:

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Dom}(A)) = B.$$

2. Оператор A замкнут.

3. Существуют такие константы $M < \infty$, $\omega < \infty$, что полуплоскость $Re\,\lambda > \omega$ принадлежит резольвентному множеству оператора A и резольвента $R(\lambda\,,\, A)$ удовлетворяет оценке

$$\forall(n > 0\ ,\ \lambda > \omega) : \|R(\lambda\,,\, A)^n\| \leq M|\lambda - \omega|^{-n}. \tag{3.257}$$

Доказательство этой теоремы мы получим как следствие нескольких лемм.

Сначала мы будем доказывать необходимость условий теоремы Хилле-Филлипса-Иосиды и ниже мы предполагаем, что $T(t)$ -полугруппа класса C_0.

На пространстве B определим оператор

$$M_t x = \frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)x d\tau.$$

Это определение корректно, так как функция $t \mapsto T(t)x$ неперерывна.

Лемма 3.10.4. *Если $T(t)$ полугруппа класса C_0, то*

$$\forall(x \in B) : \lim_{t\to 0} M_t x = x.$$

Доказательство. Фиксируем $x \in B$. Из определения полугруппы класса C_0 следует, что

$$\forall(\epsilon > 0)\,,\, \exists\delta(\epsilon) > 0\,,\, \forall(t < \delta(\epsilon)) : \|T(t)x - x\| < \epsilon.$$

Поэтому

$$\forall(t < \delta(\epsilon)) : \|M_t x - x\| < \frac{1}{t}\int_0^t \|T(\tau)x - x\|d\tau < \epsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.10.5. *Справедливо равенство*

$$A_h M_t = A_t M_h.$$

Это утверждение доказывается прямым вычислением:

$$htA_h M_t x = (T(h) - \mathsf{id}) \int_0^t T(\tau) x d\tau = \int_0^t (T(h+\tau) - T(\tau))\, x d\tau =$$

$$\int_h^{t+h} T(\tau) x d\tau - \int_0^t T(\tau) x d\tau = \int_0^h T(\tau)\,(T(t) - \mathsf{id})\, x d\tau = htA_t M_h.$$

Из лемм 3.10.4 и 3.10.5 следует

Лемма 3.10.6. *Справедливы утверждения:*

$$\forall (t > 0) : \mathbf{Im}(M_t) \subset \mathbf{Dom}(A)\ ;\ \mathbf{Cl}(\mathbf{Dom}(A)) = B,$$
$$\forall (x \in B) : AM_t x = A_t x.$$

Итак, мы доказали, что область определения инфинитезимального оператора полугруппы класса C_0 плотна в том пространстве, где действует полугруппа. Теперь докажем лемму

Лемма 3.10.7. *Инфинитезимальный оператор полугруппы класса C_0 замкнут.*

Доказательство. Пусть

$$x_n \oplus Ax_n \in \mathbf{Gr}(A)\ ,\ x_n \oplus Ax_n \to \{x_0\, ,\, y_0\}.$$

Нам нужно доказать, что

$$x_0 \oplus y_0 \in \mathbf{Gr}(A).$$

Из леммы 3.10.3 следует, что справедливо равенство

$$\forall (t > 0)\ : T(t) x_n - x_n = \int_0^t T(\tau) A x_n d\tau.$$

Переходя в этом равенстве к пределу $n \to \infty$, мы получаем:

$$\forall (t > 0)\ : T(t) x_0 - x_0 = \int_0^t T(\tau) y_0 d\tau.$$

Разделив обе части этого равенства на t и переходя к пределу $t \to 0$, мы получим:

$$x_0 \in \mathbf{Dom}(A)\ ,\ Ax_0 = y_0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.10.8. *Пусть $T(t)$ -полугруппа класса C_0 и константы M, ω удовлетворяют оценке* (3.254). *Тогда полуплоскость $Re\,\lambda > \omega$ принадлежит резольвентному множеству инфинитезимального оператора A и при $Re\,\lambda > \omega$ резольвента инфинитезимального оператора может быть вычислена по формуле*

$$R(\lambda\,,\,A)x = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t)T(t)xdt. \tag{3.258}$$

Доказательство. Из оценки (3.254) следует, что интергал в правой части равенства (3.258) сходится. Докажем, что оператор в левой части равенства (3.258) есть резольвента инфинитезимального оператора. Ниже мы предполагаем, что оператор $R(\lambda\,,\,A)$ определен как правая часть равенства (3.258). Имеем:

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : R(\lambda\,,\,A)(\lambda\mathsf{id} - A)x = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \exp(-\lambda t)T(t)(\mathsf{id}\lambda - A)xdt =$$
$$-\lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{d}{dt}\exp(-\lambda t)T(t)xdt = x.$$

Далее:

$$\forall(x \in B) : A_h R(\lambda\,,\,A)x = A_h\int_0^{\infty}\exp(-\lambda t)T(t)xdt =$$
$$\frac{\exp(\lambda h) - 1}{h}\int_h^{\infty}\exp(-\lambda t)T(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^h \exp(-\lambda t)T(t)xdt \to$$
$$\lambda\int_0^{\infty}\exp(-\lambda t)T(t)xdt - x\ ,\ h \to 0.$$

Следовательно,

$$\forall(x \in B) : R(\lambda\,,\,A)x \in \mathbf{Dom}(A)\,,\ (\lambda\mathsf{id} - A)R(\lambda\,,\,A)x = x.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.10.9. *Если A -инфинитезимальный оператор полугруппы класса C_0, то его резольвента удовлетворяет оценке* (3.257).

Доказательство. Из тождества Гильберта и леммы 3.10.8 следует, что

$$R(\lambda\,,\,A)^{n+1}x = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\int_0^{\infty}\exp(-\lambda t)T(t)xdt =$$
$$\frac{1}{n!}\int \exp(-\lambda t)t^n T(t)xdt.$$

Исползуя оценку (3.254), мы получаем:

$$\forall(\lambda > \omega):\ \|R(\lambda\,,\,A)^{n+1}x\| \le \frac{M}{n!}\int_0^\infty \exp(-\lambda t + \omega t)t^n dt\|x\| =$$
$$M|\lambda - \omega|^{-(n+1)}\|x\|.$$

Лемма доказана.

Мы доказали необходимость условий теоремы Хилле-Филлипса-Иосиды.

Переходим к доказательству достаточности этих условий.

Ниже мы будем считать, что $\omega < \lambda < \infty$.

Пусть A -оператор, удовлетворяющий условиям теоремы Хилле-Филлипса-Иосиды и $R(\lambda\,,\,A)$ -его резольвента.

Лемма 3.10.10. *Если выполнены условия теоремы Хилле-Филлипса-Иосиды, то*

$$\forall(x \in B) : \lambda R(\lambda\,,\,A)x \to x\,,\ \lambda \to \infty. \tag{3.259}$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : \lambda R(\lambda\,,\,A)x - x = R(\lambda\,,\,A)Ax.$$

Поэтому

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : \|\lambda R(\lambda\,,\,A)x - x\| \le$$
$$M|\lambda - \omega|^{-1}\|Ax\| \to 0\ ,\ \lambda \to \infty. \tag{3.260}$$

Так как множество $\mathbf{Dom}(A)$ плотно в B, то из (3.260), оценки (3.257) и теоремы Банаха-Штейнгауза 3.3.4 (см. стр. 161) следует утверждение леммы.

Положим

$$\forall(\lambda > \omega) : V(\lambda)x = -\lambda(\mathsf{id} - \lambda R(\lambda\,,\,A))x.$$

Лемма 3.10.11. *Справедливо утверждение*

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : \|V(\lambda)x - Ax\| \to 0\ ,\ \lambda \to \infty. \tag{3.261}$$

Доказательство. Это утверждение следует из леммы 3.10.10 и равенства

$$V(\lambda)x = \lambda R(\lambda\,,\,A)Ax.$$

Положим

$$\forall(\lambda > \omega):\ S(\lambda\,,\,t) = \exp(tV(\lambda)).$$

Лемма 3.10.12. *Справедлива оценка:*

$$\forall (t > 0\,,\, \lambda > \omega) : \|S(\lambda\,,\, t)\| \leq M \exp\left(\frac{\lambda \omega t}{\lambda - \omega}\right).$$

Доказательство. При $\lambda > \omega$ справедливо равенство

$$S(\lambda\,,\, t) = \exp(-\lambda t) \sum_{0 \leq n < \infty} \frac{1}{n!} \left(\lambda^2 t\right)^n R(\lambda\,,\, A)^n.$$

Так как резольвента удовлетворяет оценке (3.257), то

$$\|S(\lambda\,,\, t)\| \leq \exp(-\lambda t) \sum_{0 \leq n < \infty} \frac{1}{n!} \left(\lambda^2 t\right)^n \|R(\lambda\,,\, A)^n\| \leq$$
$$M \exp(-\lambda t) \sum_{0 \leq n < \infty} \frac{1}{n!} \left(\lambda^2 t\right)^n |\lambda - \omega|^{-n} =$$
$$M \exp\left(-\lambda t + \frac{\lambda^2 t}{\lambda - \omega}\right) = M \exp\left(\frac{\lambda \omega t}{\lambda - \omega}\right). \tag{3.262}$$

Лемма доказана.

Лемма 3.10.13. *Существут предел*

$$\forall (x \in B\,,\, t > 0)\,,\, \exists\, T(t) \colon T(t) \stackrel{def}{=} \lim_{\lambda \to \infty} S(\lambda\,,\, t)x. \tag{3.263}$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : S(\lambda\,,\, t)x - S(\mu\,,\, t)x =$$
$$\int_0^t \left(\frac{d}{d\tau} S(\mu\,,\, t - \tau) S(\lambda\,,\, \tau)x\right) d\tau =$$
$$\int_0^t S(\mu\,,\, t - \tau) S(\lambda\,,\, \tau)(V(\mu) - V(\lambda))x d\tau \leq$$
$$const.\|(V(\mu) - V(\lambda))x\| \to 0\,,\; x \in \mathbf{Dom}(A)\,,\, \lambda\,,\, \mu \to \infty.$$

(На последнем этапе мы воспользовались леммой 3.10.11.)

Множество $\mathbf{Dom}(A)$ плотно в B, а норма оператора $S(\lambda\,,\, t)$ ограничена равномерно по λ в силу леммы 3.10.12 , поэтому утверждение леммы следует из теоремы Банаха-Штейнгауза 3.3.4.

Лемма доказана.

Лемма 3.10.14. *Заданный равенством* (3.263) *оператор* $T(t)$ *есть полугруппа класса* C_0 *с инфинитезимальным оператором* A.

Доказательство. Справедливы равенства

$$\forall(x \in B\,,\, t_1 \in \mathbb{R}^1\,,\, t_2 \in \mathbb{R}^1) : S(\lambda\,,\, t_1)S(\lambda\,,\, t_2)x = S(\lambda\,,\, t_1 + t_2)x,$$
$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : S(\lambda\,,\, t)x - x = \int_0^t S(\lambda\,,\, \tau)V(\lambda)xd\tau.$$

Переходя в этих равенствах к пределу $\lambda \to \infty$, мы получаем:

$$\forall(x \in B\,,\, t_1 \in \mathbb{R}^1\,,\, t_2 \in \mathbb{R}^1) : T(t_1)T(t_2)x = T(t_1 + t_2)x,$$
$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : T(t)x - x = \int_0^t T(\tau)Axd\tau. \tag{3.264}$$

Отсюда следует, что заданная формулой (3.263) функция t есть полугруппа и

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : \|T(t)x - x\| \to 0\ ,\ t \to 0.$$

Опять воспользовавшись теоремой Банаха-Штейнгауза 3.3.4, мы получаем:

$$\forall(x \in B) : \|T(t)x - x\| \to 0\ ,\ t \to 0.$$

Следовательно, $T(t)$ -полугруппа класса C_0. Пусть $\widetilde{A}$ -инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$. Умножим обе части равенства (3.264) на $\exp(-\lambda t)$ и проинтегрируем по t от 0 до ∞. Получим:

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : R(\lambda\,,\, \widetilde{A})(\lambda \mathsf{id} - A)x = x. \tag{3.265}$$

В уравнении (3.265) сделаем замену $x \to R(\lambda\,,\, A)x$. Получим:

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : R(\lambda\,,\, \widetilde{A})x = R(\lambda\,,\, A)x. \tag{3.266}$$

Так как $\mathbf{Dom}(A)$ плотно в B, то отсюда следует, что

$$R(\lambda\,,\, \widetilde{A}) = R(\lambda\,,\, A),$$

Отсюда в силу леммы 3.9.4 следует, что

$$\widetilde{A} = A.$$

Итак, мы доказали теорему Хилле-Филлипса-Иосиды.

Переходя к пределу $\lambda \to \infty$ (3.262), мы получаем следующее уточнение теоремы Хилле-Филипса-Иосиды:

Лемма 3.10.15. *Если M и ω -константы, которые входят в оценку* (3.257)*, то для порожденной инфинитезимальным оператором A полугруппы $T(t)$ справедлива оценка*

$$\|T(t)\| \le M \exp(\omega t). \tag{3.267}$$

Определение 3.10.3. Полугруппа $T(t)$ называется сжимающей, если

$$\forall(t > 0) : \|T(t)\| \le 1.$$

Лемма 3.10.16. *Полугруппа $T(t)$ сжимающая в том и только том случае, если резольвента ее инфинитезимального оператора удовлетворяет оценке*

$$\forall(\lambda > 0) : \|R(\lambda\,,\,A)\| \le 1/\lambda. \tag{3.268}$$

Доказательство. Необходимость условия следует из формулы (3.258). Для доказательства достаточности условия (3.268) заметим, что при его выполнении

$$\|R(\lambda\,,\,A)^n\| \le \|R(\lambda\,,\,A)\|^n \le Re\,\lambda^{-n},$$

поэтому в оценке (3.267) мы можем положить $M = 1$, $\omega = 0$.

Заметим, что заменой

$$T(t) \to \exp(-\omega t)T(t)$$

можно добиться того, что рассматриваемая полугруппа будет сжимающей.

Теорема 3.10.3. *Если A_0 -инфинитезимальный оператор полугруппы класса C_0 в банаховом пространстве B и $b \in \mathcal{L}(B \to B)$ то оператор $A_0 + b$ есть инфинитезимальный оператор полугруппы класса C_0.*

Доказательство. Пусть $T_0(t)$ -полугруппа класса C_0, которая порождена инфинитезимальным оператором A_0 и пусть

$$\|T_0(t)\| \le M\exp(\omega t).$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha := \delta\|b\|M\exp(\omega\delta) < 1.$$

Пусть $C([0\,,\,\delta]\,,\,B)$ -банахово пространство всех непрерывных функций от $t \in [0\,,\,\delta]$ со значениями в B. Фиксируем $x \in B$ и в пространстве $C([0\,,\,\delta]\,,\,B)$ рассмотрим оператор

$$\begin{aligned}
&W : C([0\,,\,\delta]\,,\,B) \to C([0\,,\,\delta]\,,\,B),\\
&Wz(t) = T_0(t)x + \int_0^t T_0(t-\tau)bz(\tau)d\tau\,,\; 0 < t < \delta.
\end{aligned}$$

Этот оператор сжимающий. Пусть $z_0(t\,,\,x)$ -его неподвижная точка. Для $[0 < t < \delta]$ определим оператор

$$U(t) : x \mapsto z_0(t\,,\,x).$$

Оператор $U(t)$ -линейный ограниченный оператор:

$$\forall(t < \delta) : \|U(t)x \mid B\| \leq (1-\alpha)^{-1}\delta\|b\|M\exp(\omega\delta)\|x \mid B\|,$$

причем из определения пространства $C([0\,,\,\delta]\,,\,B)$ следует, что

$$\forall(x \in B) : \|U(t)x - x \mid B\| \to 0\,,\,t \to +0.$$

Пусть $t1 + t2 < \delta$. Тогда

$$z_0(t1+t2\,,\,x) = T_0(t2)(T_0(t1)x + \int_0^{t1} T_0(t1-\tau)bz_0(\tau\,,\,x)d\tau)+$$
$$\int_0^{t2} T_0(t2-\tau)bz_0(t1+\tau\,,\,x)d\tau.$$

Так как оператор W при каждом $x \in B$ имеет единственную неподвижную точку, то отсюда следует равенство

$$z(t1+t2\,,\,x) = z(t2\,,\,z(t1\,,\,x)),$$

поэтому

$$\forall(t1+t2 < \delta)\,,: U(t1)U(t2) = U(t1+t2).$$

Пусть

$$t = n\frac{\delta}{2} + \tau\,,\,0 \leq \tau < \frac{\delta}{2}.$$

Положим

$$T(t) \stackrel{\text{def}}{=} U(\frac{\delta}{2})^n U(\tau). \tag{3.269}$$

Это равенство определяет полугруппу класса C_0 с инфинитезимальным оператором $A = A_0 + b$.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример. В пространстве $B = L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)$ на области

$$\mathbf{Dom}(A) = \{f \mid f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\,,\,x^2 f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\}$$

определим оператор

$$Af(x) = -x^2 f(x).$$

Легко видеть, что все условия теоремы Хилле-Филлипса-Иосиды выполнены и оператор A порождает сжимающую полугруппу

$$T(t)f(x) = \exp(-x^2 t)f(x).$$

3.10.2 Абстрактная задача Коши.

Пусть A -линейный (не обязательно непрерывный) оператор с областью определения $\mathbf{Dom}(A)$:

$$A:\ B \supset \mathbf{Dom}(A) \mapsto B.$$

Определение 3.10.4. Функция

$$\mathbb{R}^1_+ \ni t \mapsto y(t\,,\,y_0) \in \mathbf{Dom}(A) \tag{3.270}$$

называется решением абстрактной задачи Коши

$$\frac{dy(t\,,\,y_0)}{dt} = Ay(t\,,\,y_0)\,,\ 0 < t < \infty\,,\ y(+0\,,\,y_0) = y_0, \tag{3.271}$$

если выполнены условия:

$$\begin{aligned}
&1.\ \forall(t>0):\exists\frac{dy(t\,,\,y_0)}{dt} \in B.\\
&2.\ \forall(t>0):y(t\,,\,y_0) \in \mathbf{Dom}(A)\\
&3.\ \|y(t\,,\,y_0) - y_0\| \to 0\,,\ t \to +0
\end{aligned}$$

и равенство (3.271).

Теорема 3.10.4. *Если оператор A есть инфинитезимальный оператор полугруппы класса C_0, $y_0 \in \mathbf{Dom}(A)$, то абстрактная задача Коши* (3.271) *имеет единственное решение:*

$$y(t\,,\,y_0) = T(t)y_0,$$

где $T(t)$ -полугруппа, порожденная инфинитезимальным оператором A.

В доказательстве нуждается только единственность решения. Пусть $z(t)$ -решение абстрактной задачи Коши:

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t)\,,\ t>0\ ,\ z(+0) = 0.$$

Справедливо равенство

$$\forall(0<\tau<t):\frac{d}{d\tau}T(t-\tau)z(\tau) = -AT(t-\tau)z(\tau) + AT(t-\tau)z(\tau) \equiv 0.$$

Следовательно,

$$\forall t > 0: T(0)z(t) = z(t) = T(t)z(0) = 0.$$

Теорема доказана.

3.10.3 Некоторые равенства, связанные с теорией полугрупп.

Выведем некоторые полезные и часто используемые равенства, которые связаны с теорией полугрупп. Для удобства вывода нужных нам равенств мы будем считать все встречающиеся операторы ограниченными. В приложенях область применимости этих равенств исследуется в каждом случае отдельно.

Формула Троттера.

Лемма 3.10.17. *$a\,,\, b \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$, то справедливо равенство*

$$\exp(t(a+b)) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp(ta/n) \cdot \exp(tb/n)\right)^n . \tag{3.272}$$

Доказательство. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}&(\exp(ta/n) \cdot \exp(tb/n))^n = \\ &\big((\mathsf{id} + ta/n + O((1/n)^2))(\mathsf{id} + tb/n + O((1/n)^2))\big)^n = \\ &\big((\mathsf{id} + ta/n + tb/n + O((1/n)^2))\big)^n \to \exp(t(a+b))\,,\ n \to \infty.\end{aligned}$$

Формула (3.272) называется формулой Троттера.

Формула Дюамеля.

Лемма 3.10.18. *Пусть функция*

$$\mathbb{R}^1_+ \ni t \mapsto a(t) \in \mathcal{L}(B \mapsto B)$$

непрерывна. Пусть $U(t\,,\,\tau)$ -решение уравнения:

$$\frac{dU(t\,,\,\tau)}{dt} = a(t)U(t\,,\,\tau)\ ,\ 0 < \tau < t < \infty\ ,\ U(\tau\,,\,\tau) = \mathsf{id}. \tag{3.273}$$

Тогда решение задачи

$$\frac{dy(t)}{dt} = a(t)y(t) + f(t)\ ,\ y(0) = y_0 \tag{3.274}$$

дается формулой

$$y(t) = U(t\,,\,0)y_0 + \int_0^t U(t\,,\,\tau)f(\tau)d\tau. \tag{3.275}$$

Доказательство. Дифференцируя правую часть равенства (3.275) по t и используя равенство (3.273), мы получаем:

$$\frac{dU(t\,,\,0)y_0}{dt} + \frac{d}{dt}\int_0^t U(t\,,\,\tau)f(\tau)d\tau =$$
$$a(t)U(t\,,\,0)y_0 + \int_0^t a(t)U(t\,,\,\tau)f(\tau)d\tau + U(t\,,\,t)f(t) =$$
$$a(t)y(t) + f(t).$$

Лемма доказана.

Формула (3.275) называется формулой Дюамеля.

Если оператор $a(t)$ не зависит от t:

$$a(t) \equiv a,$$

то

$$U(t\,,\,\tau) = \exp((t-\tau)a),$$

и формула Дюамеля принимает вид

$$y(t) = \exp(ta)y_0 + \int_0^t \exp((t-\tau)a)f(\tau)d\tau. \tag{3.276}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + by(t)\ ,\ y(0) = y_0. \tag{3.277}$$

где операторы a и b не зависят от t. Полагая

$$f(t) = by(t)$$

и применяя формулу (3.277), мы получаем:

$$\exp(t(a+b))y_0 = \exp(ta)y_0 + \int_0^t \exp((t-\tau)a)b\exp(\tau(a+b))y_0 d\tau.$$

Заменяя в этом уравнении

$$b \mapsto b - a$$

и используя произвольность y_0, мы получаем формулу

$$\exp(tb) - \exp(ta) = \int_0^t \exp((t-\tau)a)(b-a)\exp(\tau b)d\tau. \tag{3.278}$$

Формулы дифференцирования экспоненты. Положим в формуле (3.278)

$$a = a(\beta)\ ,\ b = a(\beta) + \frac{da(\beta)}{d\beta}\Delta\beta + O((\Delta\beta)^2)$$

и перейдем к пределу $\Delta\beta \to 0$. Получим

$$\frac{d}{d\beta}\exp(ta(\beta)) = \int_0^t \exp((t-\tau)a(\beta))\frac{da(\beta)}{d\beta}\exp(\tau a(\beta))d\tau. \qquad (3.279)$$

В частности, если

$$a(\beta) = a + \beta b,$$

то

$$\frac{d}{d\beta}\exp((a+\beta b))|_{\beta=0} = \int_0^1 \exp((1-\tau)a)b\exp(\tau a)d\tau. \qquad (3.280)$$

Формулы (3.279)-(3.280) иногда называют формулами Фейнмана.

Положим в формуле (3.279)

$$a(\beta) = -t\exp(\beta a)h\exp(-\beta a),$$

воспользуемся формулой (3.150) (см. стр. 202) и потом положим $\beta = 0$. Мы получим:

$$[a\ ,\ \exp(-th)] = -\int_0^t \exp(-(t-\tau)h)[a\ ,\ h]\exp(-\tau h)d\tau \qquad (3.281)$$

где

$$[a\ ,\ b] = ab - ba.$$

Формула (3.281) называется формулой Кубо (правда, она выписана в непривычных для глаза физика обозначениях).

Формулы Бейкера-Кембелла-Хаусдорфа. Физики назывют формулами Бейкера-Кембелла-Хаусдорфа (или формулами Бейкера-Хаусдорфа) ряд формул, которые получаются как следствие известной в теории групп Ли формулы Кембелла-Хаусдорфа для оператора $\ln(\exp A \cdot \exp B)$. Получим некоторые из этих формул. Мы будем считать, что все операторы оганичены, хотя на практике формулы чаще всего применяются к неограниченным операторам.

Положим

$$[A\,,\,B] := AB - BA.$$

Лемма 3.10.19. *Если*

$$[A\,[A\,,\,B]] = 0,$$

то

$$\exp(A)B\exp(-A) = B + [A\,,\,B],$$
$$\exp(A)\phi(B) = \phi(B + [A\,,\,B])\exp(A).$$

Доказательство. Положим

$$f(t) = \exp(tA)B\exp(-tA).$$

Диффиренцируя по t, получаем:

$$\frac{df}{dt} = \exp(tA)(AB - BA)\exp(-tA) = [A\,,\,B]\exp(tA)\exp(-tA) = [A\,,\,B].$$

$$f(t) = B + t[A\,,\,B].$$

Отсюда следует первая из доказываемых формул, из которой вытекает (см. формулу (3.150) на стр. 202), что

$$\exp(tA)\phi(B)\exp(-tA) = \phi(\exp(tA)B\exp(-tA)) = \phi(B + t[A\,,\,B]),$$

что эквивалентно второй формуле.

Лемма 3.10.20. *Если*

$$[A\,,\,B] = C\;,\;[A\,,\,C] = [B\,,\,C] = 0,$$

то

$$\exp(A)\cdot\exp(B) = \exp(\frac{1}{2}C + A + B).$$

Доказательство. Положим

$$f(t) = \exp(tA)\cdot\exp(tB)\cdot\exp(-t(A+B)).$$

Тогда

$$\frac{df}{dt} = \exp(tA)A\exp(tB)\cdot\exp(-t(A+B)) + \exp(tA)\cdot\exp(tB)B\exp(-t(A+B)) -$$
$$\exp(tA)\cdot\exp(tB)(A+B)\exp(-t(A+B)) =$$
$$\exp(tA)(A\exp(tB) - \exp(tB)A)\exp(-t(A+B)) = tCf(t).$$

Отсюда следует, что

$$f(t) = \exp(\frac{1}{2}t^2C).$$

Лемма доказана.

Замечание 3.10.3. Не существует элементов банаховой алгебры, которые удовлетворяют равенству

$$ab - ba = \mathsf{id}$$

Докажем это утверждение от противного. Пусть такие элементы существуют. Тогда должны выполняться равенства

$$a^2b - aba = a\ ,\ aba - ba^2 = a,$$

поэтому

$$a^2b - ba^2 = 2a,$$

и по индукции

$$\forall n : a^n b - ba^n = na^{n-1},$$

следовательно

$$\forall n : n\|a^{n-1}\| \leq 2\|a\|\|b\|\|a^{n-1}\|,$$

что возможно только в том случае, если $\|a^{n-1}\| = 0$, а отсюда следует, что $a^{n-1} = a^{n-2} = \ldots = a = 0 = \mathsf{id}$.

3.11 Коментарии и литературные указания.

3.11.1 Определение линейнного пространства.

Напомним определение линейного (векторного) пространства. Линейное пространство -это коммутативная (абелева) группа, на которой определено подчиняющееся ряду аксиом действие поля скаляров. В качестве поля скаляров мы будем рассматривать только два поля: поле действительных чисел и поле комплексных чисел. Алгебраические свойства действительных и комплексных чисел мы считаем известными, поэтому общего определения поля мы давать не будем. Общеринятый список аксиом линейного пространства мы приводим ниже.

Линейное пространство L -это множество, в котором определены операция сложения, ставящая каждым двум элементам $a \in L$, $b \in L$ в соответствие третий элемент, обозначаемый символом $a+b$, и опрерация умножения на (комплексное) число, ставящая каждому числу $\lambda \in \mathbb{C}^1$ и элементу $a \in L$ в соответствие обозначаемый символом λa элемент пространства L. Предполагается, что операции сложения и умножения на число удовлетворяют следующим аксиомам.

1. Сложение ассоциативно:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

2. Существует такой элемент $0 \in L$, что

$$\forall (a \in L) : a+0 = 0+a = a.$$

3. Для каждого элемента $a \in L$ существует такой элемент $(-a) \in L$, что

$$a + (-a) = 0.$$

4. Сложение коммутативно:

$$\forall (a \in L\,,\, b \in L) : a+b = b+a.$$

Операция умножения на число удовлетворяет следующим аксиомам.

5. $\forall (\alpha \in \mathbb{C}^1\,,\, \beta \in \mathbb{C}^1\,,\, a \in L) : \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a.$
6. $\forall (\alpha \in \mathbb{C}^1\,,\, a\,,\, b \in L) : \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b.$
7. $\forall (\alpha \in \mathbb{C}^1\,,\, \beta \in \mathbb{C}^1\,,\, a \in L) : (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a.$
8. $\forall (a \in L) : 1 \cdot a = a.$

Аксиомы 1-3 задают в L структуру группы, аксиома 4 уточняет, что эта группа коммутативна (абелева), аксиомы 5-7 задают в L стуктуру модуля над полем, аксиома 8 уточняет, что этот модуль -унитарный.

Не все аксиомы 1-8 независимы: некоторые из них можно вывести из других, некоторые можно сформулировать в более слабой форме, однако список 1-8 удобен и является общепринятым.

Примеры линейных пространств общеизвестны и мы не будем на них останавливаться.

3.11.2 Определение фактор-пространства.

Напомним определение фактор-пространства линейного пространства.

Пусть L -линейное пространство и $L \supset L_0$ -линейное подпространство пространства L. Введем в пространстве L соотношене эквивалентности, положив

$$a \sim a' \text{ , если } a - a' \in L_0. \tag{3.282}$$

Пусть L/L_0 -фактор множество множества L по соотношению эквивалентности (3.282) и пусть $[a] \in L/L_0$ -тот класс эквивалентности, который содержит элемент $a \in L$. Превратим множество L/L_0 в линейное пространство, положив по определению

$$\alpha[a] + \beta[b] := [\alpha a + \beta b]. \tag{3.283}$$

Корректность этого определения следует из того факта, что L_0 -линейное пространство и поэтому правая часть (3.283) не зависит от выбора представителей в классах эквивалентности.

Множество классов эквивалентности по соотношению (3.282) с определенными соотношением (3.283) операциями линейного пространства называется фактор-пространством пространства L по подпространству L_0.

3.11.3 Определение прямой суммы пространств.

Пусть I -произвольное множество индексов и пусть каждому $\tau \in I$ поставлено в соответствие линейное пространство L_τ над одним и тем же полем скаляров. Рассмотрим множество функций

$$I \ni \tau \mapsto a(\tau) \in L_\tau$$

и превратим это множество в линейное пространство, положив по определению

$$(\alpha a + \beta b)(\tau) := \alpha a(\tau) + \beta b(\tau) \in L_\tau.$$

Это линейное пространство называется прямой суммой линейных пространств L_τ и обозначается символом

$$\oplus \sum_{\tau \in I} L_\tau.$$

В качестве примера подобной конструкции можно рассмотреть пространство $\mathbb{R}^d$. В этом случае множество индексов I -это отрезок натурального ряда $\{1 \leq \tau \leq d\}$, $L_\tau \equiv \mathbb{R}^1$ и

$$\mathbb{R}^d = \oplus \sum_{1 \leq \tau \leq d} \mathbb{R}^1.$$

Другой подход к понятию прямой суммы линейных пространств дает следующая конструкция.

Пусть L -линейное пространство и пусть $L \supset L_j$, $1 \leq j \leq n$ - линейныйе подпространства пространства L, которые удовлетворяют следующему условию: каждый элемент a пространства L *единственным образом* представим в виде

$$a = \sum_j a_j \ , \ a_j \in L_j.$$

В этом случае говорят, что линейное пространство L разложено в прямую сумму пространств L_j:

$$L = \oplus \sum_j L_j.$$

Изложенные в этой главе факты теории банаховых пространств, по существу, являются простейшим "бесконечномерным" обобщением известной читателю теории матриц и операторов в конечномерном линейном пространстве и есть практически в каждом учебнике функционального анализа. Классическими учебниками являются книги [21, 27, 18]. Простое изложение начал теории банаховых пространств есть в учебнике [33]. Краткое и рассчитанное на подготовленного читателя изложение основ теории банаховых пространств есть в [32]. Обстоятельное изложение основных принципов читатель найдет в [40]. Много интересных фактов теории банаховых пространств читатель узнает из книг [19, 20].

Глава 4

Гильбертовы пространства.

4.1 Основные определения.

Мы рассматриваем линейные пространства над полем комплексных чисел (если явно не оговорено другое) и если $z \in \mathbb{C}^1$, то символ z^* обозначает число, комплексно сопряженное числу z:

$$\forall\,(a \in \mathbb{R}^1\,,\, b \in \mathbb{R}^1) : z = a + ib\;,\; z^* = a - ib.$$

4.1.1 Скалярное произведение и норма.

Скалярное произведение на линейном пространстве L -это функция

$$< \quad , \quad > : L \times L \to \mathbb{C}^1,$$

которая удовлетворяет следующим аксиомам.

1. Скалярное произведение линейно по второму аргументу:

$$\forall\,(a \in L\,,\, b \in L\,,\, c \in L\;,\; \alpha \in \mathbb{C}^1\;,\; \beta \in \mathbb{C}^1),:$$
$$< c\,,\, \alpha a + \beta b >= \alpha < c\,,\, a > + \beta < c\,,\, b > .$$

2. Скалярное проиизведение кососимметрично:

$$\forall\,(a \in L\,,\, b \in L) :\; < a\,,\, b >=< b\,,\, a >^*\, .$$

3. Скалярное произведение не вырождено:

$$\forall (a \in L) :\; < a\,,\, a > \geq 0\;,\; (< a\,,\, a >= 0) \iff (a = 0).$$

Определение 4.1.1. Линейное пространство вместе с определенным на нем скалярным произведеним называется унитарным пространством.

Вместо условия линейности скалярного произведения по второму аргументу часто принимают условие линейности скалярного произведения по первому аргументу. Мы будем следовать сложившейся в математической физике традиции.

В прямой сумме унитарных пространств

$$H = \oplus \sum_j H_j$$

скалярное произведение вводится по формуле

$$\forall (a \in H\,,\, b \in H) :\ < a\,,\, b >= \sum_j < a_j\,,\, b_j >_j\ ,\ a_j \in H_j\,,\, b_j \in H_j,$$

где $<\,,\,>_j$ -скалярное произведение в пространстве H_j.

Теорема 4.1.1. *Скалярное произведение на унитарном пространтсве удовлетворяет неравенству*

$$\forall (a \in L\,,\, b \in L) : |< a\,,\, b >| \leq < a\,,\, a >^{1/2} < b\,,\, b >^{1/2}\ . \tag{4.1}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай

$$< a\,,\, b > \neq 0.$$

В неравенстве

$$\forall (z \in \mathbb{C}^1) :\ < za - z^{-1}b\,,\, za - z^{-1}b >=$$
$$|z|^2 < a\,,\, a > + |z|^{-2} < b\,,\, b > -2Re\,(\exp(-2i\arg(z)) < a\,,\, b >) \geq 0$$

положим

$$z = \left(\frac{< b\,,\, b >}{< a\,,\, a >} \right)^{1/4} \exp(i\theta)\ ,\ \theta = (1/2)\arg(< a\,,\, b >)$$

Получим (4.1).

Неравенство (4.1) в математической литературе на русском языке назывют неравенством Коши-Буняковского. В математической литературе на английском языке это неравенство называют неравенством Коши или неравенством Шварца.

Теорема 4.1.2. *На унитарном пространстве функция*

$$L \ni a \mapsto < a\,,\, a >^{1/2} \in \mathbb{R}^1_+ \tag{4.2}$$

удовлетворяет условиям нормы.

Доказательство. Невырожденность и однородность функции (4.2) очевидны. Докажем неравенство треугольника. Имеем:

$$! < a+b\,,\,a+b >=< a\,,\,a > + < b\,,\,b > +2Re < a\,,\,b > \leq$$
$$< a\,,\,a > + < b\,,\,b > +2(< a\,,\,a >< b\,,\,b >)^{1/2} =$$
$$((< a\,,\,a >)^{1/2} + (< b\,,\,b >)^{1/2})^2.$$

Следовательно,

$$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

Утверждение доказано.

Определение 4.1.2. Унитарное пространство вместе с определенной на нем нормой

$$\|a\| =< a\,,\,a >^{1/2} \tag{4.3}$$

называется предгильбертовым пространством.

Вычислением проверяется, что определенная равенством (4.3) норма удовлетворяет равенству параллелогамма:

$$\forall (x \in H\,,\,y \in H): \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{4.4}$$

В предгильбертовом пространстве неравенство (4.1) может быть записано в виде

$$| < a\,,\,b > | \leq \|a\| \cdot \|b\|. \tag{4.5}$$

В действительном евклидовом пространстве это неравенство означает, что модуль косинуса угла меньше или равен единице.

Скалярное произведение в прямой сумме унитарных пространств порождает норму

$$\| \oplus \sum_j a_j\|^2 = \sum_j \|a_j\|^2.$$

Из определения нормы в унитарном пространстве и неравенства Коши-Буняковского вытекает очевидная

Лемма 4.1.1. *Справедливо равенство*

$$\|x\| = \sup\{| < y\,,\,x > | \mid \|y\| \leq 1\}. \tag{4.6}$$

Определение 4.1.3. Гильбертово пространство -это предгильбертово пространство, которое есть банахово пространство (т. е. полное нормированное простанство) относительно нормы (4.3).

Пусть L_0 -предгильбертово пространство и пусть L -пополнение пространства L_0 как банахова пространства. Оператор вложения

$$J : L_0 \mapsto L$$

линеен, и это позволяет задать скалярное произведение на линейном многообразии $J(L_0) \subset L$, положив по определению

$$\forall (a \in L_0 \, , \, b \in L_0) : \; < J(a) \, , \, J(b) > := < a \, , \, b > .$$

По непрерывности это скалярное произведение можно распространить на все пространство L и превратить L в гильбертово пространство. Полученное гильбертово пространство называется пополнением предгильбертова пространства L_0. Гильбертово пространство обычно обозначают символом H.

Скалярное произведение в гильбертовом пространстве H_α мы будем обозначать символом $< \, , \, >_\alpha$.

Рассмотрим примеры.

Пример 4.1.1. **Пространство** $L^2(D \, , \, \mu(dx))$**.** Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ и $L^2(D \, , \, \mu(dx))$ определено как в 1.1.14 (см. стр. 44). Превратим пространство $L^2(D \, , \, \mu(dx))$ в гильбертово пространство, положив по определению

$$\begin{aligned} &\forall (f \in L^2(D \, , \, \mu(dx)) \, , \, g \in L^2(D \, , \, \mu(dx))) : \\ &< f \, , \, g > = \int\limits_D f^*(x) g(x) \mu(dx). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Интеграл в (4.7) существует в силу неравенства

$$|f^\star(x) g(x)| \leq |f(x)|^2 + |g(x)|^2.$$

Полнота пространства $L^2(D \, , \, \mu(dx))$ есть следствие теоремы Рисса-Фишера 1.1.6 (см. стр. 43).

Пример 4.1.2. **Пространство** l^2**.** Элементами пространства l^2 являются такие числовые последовательности

$$a = \{ a_j \mid a_j \in \mathbb{C}^1 \, , \, 1 \leq j < \infty \}$$

что

$$\sum_{1 \leq j < \infty} |a_j|^2 < \infty.$$

Пространство l^2 можно рассматривать как частный случай пространства $L^2(D \, , \, \mu(dx))$ при $D = \mathbb{R}^1$, если считать, что носитель меры $\mu(dx)$ есть множество целых чисел $\mathbb{Z}$.

Структура линейного пространства на l^2 задается формулой

$$\alpha a + \beta b = \{\alpha a_j + \beta b_j\}.$$

Скалярное произведение на пространстве l^2 задается формулой

$$< a\,,\, b >= \sum_{1\leq j<\infty} a_j^* b_j.$$

Полнота пространства l^2 есть следствие теоремы Рисса-Фишера 1.1.6 (см. стр. 43), так как сумму можно рассматривать как интеграл по мере, носитель которой есть множество целых чисел.

4.1.2 Ортонормированные системы.

Определение 4.1.4. Элементы f , g гильбертова пространства H ортогональны (обозначение: $f \perp g$), если

$$< f\,,\, g >= 0.$$

Определение 4.1.5. Система элементов $\{e_j \mid j \in I\} \subset H$ гильбертова пространства H называется ортонормированной, если

$$< e_i\,,\, e_j >= \delta^i_j\ ,\ \forall (i \neq j) : \delta^i_j = 0\,,\, \forall i : \delta^i_i = 1.$$

Приведем примеры ортонормированных систем.

В пространстве l^2 ортонормированную систему элементов e_j $, j = 1 \ldots$ составляют векторы, у которых координата с номером j равна единице, а все остальные координаты равны нулю:

$$e_j = \{0\,,\, 0 \ldots 0\,, 1\,,\, 0\, \ldots\}.$$

В пространстве $L^2([0\,,\, 1]\,,\, dx)$ ортонормированную систему элементов составляют векторы

$$e_0(x) = 1\ ,\ e_{2j}(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi jx)\ ,\ e_{2j+1}(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi jx)\ ,\ j = 1\, \ldots$$

Ортонормированная система не обязательно счетна.

Определение 4.1.6. Если $\{e_j \mid j \in I\} \subset H$ -ортонормированная система элементов, то числа

$$< e_j\,,\, f >$$

называются коэффициентами Фурье элемента $f \in H$ по ортонормированной системе $\{e_j\}$.

Лемма 4.1.2. *Пусть* $\{f_j \mid 1 \le j < \infty\} \subset H$ *-произвольная счетная система элементов гильбертова пространства* H *и*

$$L_n = span\{f_1\,, \dots f_n\}.$$

Тогда существует такая счетная ортонормированная система функций $\{e_j \mid 1 \le j < \infty\}$*, что*

$$L_n \subset span\{e_1\,, \dots e_n\}$$

Доказательство. Доказательство проводим индукцией по n. Достаточно рассмотреть случай, когда при каждом n система функций $\{f_1 \ \dots\ , f_n\}$ линейно независима. Для $n = 1$ положим

$$e_1 = f_1 / \|f_1\|.$$

Если

$$f_{(n+1)} \notin \mathrm{span}\{e_1\,, \dots e_n\},$$

то положим

$$e_{(n+1)} = \mu(f_{(n+1)} - \sum_{1 \le j \le n} < e_j\,,\, f_{(n+1)} > e_j).$$

Очевидно, что

$$\forall (j \le n): \ \ < e_{(n+1)}\,,\, e_j >= 0\ ;\ e_{(n+1)} \ne 0.$$

Параметр μ выберем из условия

$$\|e_{(n+1)}\| = 1.$$

Имеем:

$$f_{(n+1)} = \frac{1}{\mu} e_{(n+1)} + \sum_{1 \le j \le n} < e_j\,,\, f_{(n+1)} > e_j \in \mathrm{span}\{e_1\,, \dots e_{(n+1)}\}.$$

Лемма доказана.

Прямым вычислением доказывается

Лемма 4.1.3. *Если* $\{e_j \mid 1 \le j < \infty\}$ *-ортонормированная система элементов, то справедливо равенство*

$$\forall \alpha_j : \|f - \sum_{1 \le j \le n} \alpha_j e_j\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{1 \le j \le n} | < e_j\,,\, f > |^2 + \sum_{1 \le j \le n} |\alpha_j - < e_j\,,\, f > |^2. \tag{4.8}$$

Из этого равенства вытекает

Следствие 4.1.1. *Если* $\{e_j \mid 1 \le j < \infty\}$ *-ортонормированная система элементов, то справедливы неравенства:*

$$\forall \alpha_j : \|f - \sum_{1 \le j \le n} < e_j\,, f > e_j\| \le \|f - \sum_{1 \le j \le n} \alpha_j e_j\|. \tag{4.9}$$

$$\sum_{1 \le j < \infty} | < e_j\,, f > |^2 \le \|f\|^2. \tag{4.10}$$

Неравенство (4.10) называется неравенством Бесселя.

Из неравенства Бесселя следует, что для любой ортонормированной системы и любого $f \in H$ ряд

$$\sum_j < e_j\,, f > e_j$$

сходится по норме пространства H.

Определение 4.1.7. Ортонормированная система элементов $\{e_j \mid \in I\}$ называется полной, если не существует отличного от нуля вектора, который ортогонален всем векторам системы $\{e_j \mid \in I\}$:

$$(\forall e_j : \ < e_j\,, f >= 0) \Rightarrow (f = 0).$$

Лемма 4.1.4. *Если ортонормированная система счетна, то она полна в том и только том случае, если*

$$\forall (f \in H) : \|f\|^2 = \sum_{1 \le j < \infty} | < e_j\,, f > |^2. \tag{4.11}$$

Доказательство. Если элемент $f \in H$ ортогонален всем элементам системы $\{e_j \mid 1 \le j < \infty\}$, то из условия (4.11) следует, что $f = 0$, поэтому из (4.11) следует полнота системы $\{e_j \mid 1 \le j < \infty\}$. Для любого $f \in H$ элемент

$$g = f - \sum_{1 \le j < \infty} < e_j\,, f > e_j$$

ортогонален всем элементам системы $\{e_j \mid 1 \le j < \infty\}$. Если система $\{e_j \mid 1 \le j < \infty\}$ полна, то $g = 0$. Умножая равенство $g = 0$ скалярно на f, получим равенство

$$0 = \|f\|^2 - \sum_{1 \le j < \infty} | < e_j\,, f > |^2.$$

Лемма доказана.

Если ортонормированная система счетна, то положив в равенстве (4.11)

$$f \to f + \lambda g$$

и приравняв слагаемые при одинаковых степенях λ, мы получим

Лемма 4.1.5. *Счетная ортонормированная система* $\{e_j \mid 1 \le j < \infty\}$ *полна в том и только том случае, если*

$$\forall (f \in H\,,\, g \in H):\ < f\,,\, g >= \sum_{1 \le j < \infty} < f\,,\, e_j >< e_j\,,\, g >\,. \tag{4.12}$$

Равенство (4.12) называется равенством Парсеваля.

Определение 4.1.8. Гильбертово пространство H сепарабельно, если в нем существует счетное всюду плотное множество, т. е. такое множество $\{f_j \mid 1 \le j < \infty\}$, что

$$H = \mathbf{Cl}(\{f_j \mid 1 \le j < \infty\}). \tag{4.13}$$

Теорема 4.1.3. *Гильбертово пространство сепарабельно в том и только том случае, если в нем существует счетная полная ортонормированная система элементов.*

Доказательство. Пусть гильбертово пространство H сепарабельно, множество $\{f_j \mid 1 \le j < \infty\}$ удовлетворяет условию (4.13) и ортонормированная система $\{e_j \mid 1 \le j < \infty\}$ удовлетворяет условию

$$\forall n : \mathrm{span}\{f_j \mid 1 \le j \le n\} \subset \mathrm{span}\{e_j \mid 1 \le j \le n\}. \tag{4.14}$$

Для каждого элемента $f \in H$ существует такая последовательность $f_{n(j)}\,,\ 1 \le j < \infty$, что

$$\|f - f_{n(j)}\| \to 0\,,\ j \to \infty.$$

Пусть

$$f_{n(j)} = \sum_{1 \le i \le n(j)} \alpha_{(n(j)\,,\,i)} e_i.$$

Из неравенства (4.9) следует, что

$$\forall (n > n(j)) : \|f - \sum_{1 \le i \le n} < e_i\,,\, f > e_i\|^2 \le$$

$$\|f - \sum_{1 \le i \le n(j)} \alpha_{(n(j)\,,\,i)} e_i\|^2 = \|f - f_{n(j)}\|^2 \to 0\,,\ j \to \infty.$$

Следовательно, удовлетворяющая условию (4.14) ортонормированная система полна. Теперь предположим, что в гильбертовом простанстве H существует счетная полная ортонормированная система элементов $\{e_j \mid 1 \leq j < \infty\}$. Рассмотрим множество функций вида

$$\sum_{1 \leq j \leq n} (a_j + ib_j)e_j \,,\, a_j \,,\, b_j \ - \text{рациональны}, n = 1 \ldots$$

Это множество счетно и всюду плотно. Следовательно, гильбертово пространство H сепарабельно. Теорема доказана.

Определение 4.1.9. Оператор

$$U \in \mathcal{L}(H_1 \mapsto H_2)$$

называется изометрическим, если

$$\forall (f \in H_1 \,,\, g \in H_1) \,:\, < Uf \,,\, Ug >_2 = < f \,,\, g >_1 \,.$$

Лемма 4.1.6. *Оператор U есть изометрический оператор в том и только том случае, если*

$$\forall (f \in H_1) : \|Uf \mid H_2\|^2 = \|f \mid H_1\|^2.$$

Доказательство. Достаточно в равенстве

$$\|U(f + \lambda g) \mid H_2\|^2 = \|(f + \lambda g) \mid H_1\|^2$$

приравнять слагаемые с линейной и сопряженно-линейной по λ частью.

Определение 4.1.10. Изометрический оператор U называется унитарным, если он обратим:

$$\exists U^{-1} : UU^{-1} = U^{-1}U = \mathsf{id}.$$

Теорема 4.1.4. *Если в гильбертовом пространстве H существует счетная полная отртонормированная система элементов $\{e_j \mid 1 \leq j < \infty\}$, то существует унитарное отображение этого пространства на пространство l^2.*

Доказательство. Отображение U строится по формуле

$$\forall (f \in H) : Uf = \{< e_j \,,\, f > \mid 1 \leq j < \infty\}.$$

Обратное отображение вычисляется по формуле

$$U^{-1}(\{\alpha_j\}) = f = \sum_{1\le j<\infty} \alpha_j e_j .$$

Из доказанной теоремы следует, что все сепарабельные гильбертовы пространства, по-существу, одинаковы: как гильбертовы пространства они унитарно изоморфны пространству l^2.

Пусть H_0 , H_1 , H_2 -сепарабельные гильбертовы пространства, $U_{\underset{\sim}{i}}$ - унитарные отображения пространств H_i в H_0, $A \in \mathcal{L}(H_1 \mapsto H_2)$, $\widetilde{A}$ - оператор, который делает коммутативной диаграмму:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, "U_1"'] & H_2 \arrow[d, "U_2"] \\ H_0 \arrow[r, "\widetilde{A}"] & H_0 \end{tikzcd}$$

Ясно, что изучение оператора A можно свести к изучению оператора $\widetilde{A}$, поэтому в случае сепарабельных гильбертовых пространств можно ограничиться изучением пространства $\mathcal{L}(H \mapsto H)$.

Приведем пример несепарабельного гильбертова пространства и несчетной ортонормированной системы.

Пусть L_0 -линейное пространство функций вида

$$f \in L_0 : f(x) = \sum_{1\le j\le n} a_j \exp(i\lambda_j x) \, , \, \lambda_j \in \mathbb{R}^1 \, , \, -\infty < x < \infty, n = 1 \ldots$$

Определим на L_0 скалярное произведение

$$\forall (f \in L_0 \, , \, g \in L_0) : \, < f \, , \, g >:= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} f^*(x) g(x) dx.$$

Пусть H -пополнение L_0 относительно нормы, индуцированной этим скалярным произведением. В полученном гильбертовом пространстве система элементов

$$e_\lambda(x) = \exp(i\lambda x) \, , \, \lambda \in \mathbb{R}^1$$

ортонормирована и несчетна, а само пространство H несепарабельно.

4.2 Теорема Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Напомним, что множество M в линейном пространстве называется выпуклым, если

$$\forall(a \in M\,,\, b \in M\,,\, \alpha \in (0\,,\,1)) : \alpha a + (1-\alpha)b \in M.$$

Следующая теорема часто называется теоремой Леви.

Теорема 4.2.1. *В замкнутом выпуклом множестве гильбертова пространства существует элемент с наименьшей нормой и этот элемент единственен.*

Доказательство. Пусть M -замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве H. Множество $\{\|x\| \mid x \in M\}$ ограничено снизу, поэтому у этого множества существует точная нижняя грань d и существует такая последовательность $\{x_n\} \subset M$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = d = \inf\{\|x\| \mid x \in M\}. \tag{4.15}$$

В силу равенства паралеллограма

$$\forall(m>0) : \left\|\frac{1}{2}(x_n + x_{(n+m)})\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}(x_n - x_{(n+m)})\right\|^2 =$$
$$\frac{1}{2}\Big(\|x_n\|^2 + \|x_{(n+m)}\|^2\Big) \to d^2\,,\, n \to \infty. \tag{4.16}$$

Но в силу выпуклости множества M:

$$\frac{1}{2}(x_n + x_{(n+m)}) \in M,$$

поэтому

$$\forall(n\,,\,m) : \left\|\frac{1}{2}(x_n + x_{(n+m)})\right\|^2 \geq d^2,$$

и из (4.16) следует, что

$$\sup\{\|x_n - x_{(n+m)}\| \mid 1 \leq m < \infty\} \to 0\,,\, n \to \infty.$$

Мы доказали, что удовлетворяющая условию (4.15) последовательность фундаментальна. Пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию (4.15). Так как множество M замкнуто, то

$$\exists(x_0 \in M) : x_n \to x_0\ ,\ \|x_0\| = d.$$

Пусть x_0' -произвольный элемент, который удовлетворяет условию

$$(x_0' \in M)\ ,\ \|x_0'\| = d.$$

Тогда должна существовать такая последовательность $\{x_n'\} \subset M$, что

$$x_n' \to x_0'\,,\ n \to \infty.$$

Последовательность

$$x_1\,,\ x_1'\,,\ x_2\,,\ x_2'\,,\ \ldots$$

удовлетворяет условию (4.15) и поэтому фундаментальна. Следовательно, $x_0 = x_0'$. Теорема доказана.

Пусть M -произвольное множество в гильбертовом пространстве H.

Определение 4.2.1. Множество

$$M^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid \forall (y \in M):\ < y\,,\, x >= 0\} \tag{4.17}$$

называется ортогональным дополнением множества M.

Лемма 4.2.1. *Для любого множества M его ортогональное дополнение $M^{\perp}$ есть замкнутое линейное подпространство в H и* $(\mathbf{Cl}(M))^{\perp} = M^{\perp}$

Доказательство. Функция

$$x \mapsto < y\,,\, x >$$

непрерывна, поэтому множество

$$\{x \mid < y\,,\, x >= 0\}$$

замкнуто при любом $y \in H$. Множество

$$M^{\perp} = \bigcap_{y \in M} \{x \mid < y\,,\, x >= 0\}$$

замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

Если $x_1 \in M^{\perp}$, $x_2 \in M^{\perp}$, то

$$\forall (y \in M):\ < \alpha x_1 + \beta x_2\,,\, y >= \alpha^* < x_1\,,\, y > + \beta^* < x_2\,,\, y >= 0,$$

поэтому

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in M^{\perp}.$$

Следовательно, $M^{\perp}$ -линейное подпространство.

Из включения
$$M \subset \mathbf{Cl}(M)$$
следует включение
$$(\mathbf{Cl}(M))^{\perp} \subset M^{\perp}.$$
Пусть
$$x \in M^{\perp}\ ,\ y_n \in M\ ,\ y_n \to y_0 \in \mathbf{Cl}(M).$$
Тогда
$$< x\, ,\, y_0 >= \lim_{n\to\infty} < x\, ,\, y_n >= 0,$$
поэтому
$$x \in (\mathbf{Cl}(M))^{\perp}\ ,\ M^{\perp} \subset (\mathbf{Cl}(M))^{\perp}.$$
Лемма доказана.

Следующая теорема называется теоремой Леви о проекции.

Теорема 4.2.2. *Если H_0 -замкнутое линейное подпространство в гильбертовом пространстве H, то все пространство есть прямая сумма*
$$H = H_0 \oplus H_0^{\perp}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Пусть $x \in H$. Множество
$$M = \{x - y \mid y \in H_0\}$$
есть замкнутое выпуклое множество. Пусть $(x - y_0)$ -элемент с наименьшей нормой в множестве M. Согласно теореме 4.2.1 такой элемент существует и он единственен. Так как элемент $(x - y_0)$ имеет наименьшую норму среди всех элементов множества M, то
$$\forall (w \in H_0): \qquad \frac{d}{dz}\|x - y_0 + zw\|^2\Big|_{z=0} = 0,$$
$$\forall (w \in H_0): \qquad \frac{d}{dz}\|x - y_0 + izw\|^2\Big|_{z=0} = 0.$$
Вычисляя производные, мы получаем:
$$\forall (w \in H_0):\ < x - y_0\, ,\, w > + < x - y_0\, ,\, w >^* = 0,$$
$$\forall (w \in H_0):\ < x - y_0\, ,\, w > - < x - y_0\, ,\, w >^* = 0.$$
Следовательно,
$$(x - y_0) \in H_0^{\perp}.$$
Теперь осталось заметить, что
$$x = y_0 + x - y_0.$$

Единственность разложения (4.18) следует из того факта, что

$$\forall H_0 : H_0 \bigcap H_0^{\perp} = 0.$$

Теорема доказана.

Заметим, что пространство $H_0^{\perp}$ может быть отождествлено с фактор-пространством пространства H по пространству H_0.

Следующая теорема следует из теоремы Леви и называется теоремой Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема 4.2.3. *Если H -гильбертово пространство, то для любого линейного непрерывного функционала $l \in H^{\star}$ существует такой вектор $y(l) \in H$, что*

$$\forall (x \in H) : l(x) =< y(l)\,,\, x > . \tag{4.19}$$

Удовлетворяющий условию (4.19) *вектор $y(l)$ единственен.*

Доказательство. Единственность представления (4.19) следует из невырожденности скалярного произведения:

$$\text{если}\, \forall x : l(x) =< y(l)\,,\, x >=< y_1(l)\,,\, x >,\, \text{то}\, y(l) = y_1(l).$$

Докажем существование представления (4.19). Множество $\mathbf{Ker}(l)$ есть замкнутое линейное подпространство в гильбертовом пространстве H. Если $\mathbf{Ker}(l) = H$, то теорема доказана: можно положить $y(l) = 0$. Если $\mathbf{Ker}(l) \neq H$, то

$$\exists z : z \in \mathbf{Ker}(l)^{\perp}\,,\, z \neq 0.$$

Так как

$$\forall (x \in H) : l(l(x)z - l(z)x) = l(x)l(z) - l(z)l(x) = 0,$$

то

$$\forall (x \in H) : (l(x)z - l(z)x) \in \mathbf{Ker}(l),$$

следовательно

$$\forall (x \in H) : \ < z\,,\, l(x)z - l(z)x >= 0,$$

поэтому

$$< z\,,\, z > l(x) = l(z) < z\,,\, x >,$$

и

$$\forall x : l(x) =< y(l)\,,\, x >\,,\, y(l) = l^{*}(z)\|z\|^{-2}z. \tag{4.20}$$

Теорема доказана.

Лемма 4.2.2. *Определяемое формулой* (4.20) *отображение*

$$I : H^{\star} \mapsto H \, , \; H^{\star} \ni l \mapsto I(l) = y(l) \in H$$

антилинейно:

$$I(\alpha l_1 + \beta l_2) = \alpha^* I(l_1) + \beta^* I(l_2),$$

обратимо:

$$I^{-1}(y)(x) = < y \, , \, x > .$$

и сохраняет норму

$$\|I(l) \mid H\| = \|l \mid H^{\star}\|. \tag{4.21}$$

Последнее утверждение вытекает из (4.6).

Определение 4.2.2. Функция

$$B : H \times H \mapsto \mathbb{C}^1$$

называется полулинейной (или косо линейной, или полуторалинейной, или сопряженно-линейной, или иногда просто билинейной, если ясно, о чем идет речь) формой, если

$$\forall (x \in H \, , \, y \in H \, , \, z \in H) : B(x \, , \, \beta y + \gamma z) = \beta B(x \, , \, y) + \gamma B(x \, , \, z),$$
$$B(\alpha x + \beta y \, , \, z) = \alpha^* B(x \, , \, z) + \beta^* B(y \, , \, z).$$

Определение 4.2.3. Билинейная форма $B(x \, , \, y)$ называется кососимметричной (или эрмитовой) если

$$\forall (x \in H \, , \, y \in H) : B(x \, , \, y) = B(y \, , \, x)^*. \tag{4.22}$$

Прямым вычислением проверяется, что для кососиметричной билинейной формы справедливо поляризационное тождество:

$$B(x \, , \, y) = \frac{1}{4}(B(x+y \, , \, x+y) - B(x-y \, , \, x-y) +$$
$$iB(x-iy \, , \, x-iy) - iB(x+iy \, , \, x+iy)). \tag{4.23}$$

Следовательно, кососимметричная билинейная форма однозначно определяется своими значениями на диагонали: квадратичной формой $B(x \, , \, x)$.

Лемма 4.2.3. *Если в комплексном гильбертовом пространстве билинейная форма на диагонали принимает действительные значения:*

$$\forall (x \in H) : B(x \, , \, x) \in \mathbb{R}^1,$$

то она кососимметрична:

$$B(x \, , \, y) = B(y \, , \, x)^*.$$

Доказательство. Равенство

$$Im\, B(x+y\,,\, x+y) = 0$$

дает:

$$Im\, B(x\,,\, y) = -Im\, B(y\,,\, x).$$

Сделав в последнем равенстве замену

$$y \to iy,$$

мы получаем:

$$Re\, B(x\,,\, y) = Re\, B(y\,,\, x).$$

Лемма доказана.

Следствием теоремы Рисса является теорема Лакса-Мильграма-Вишика (или теорема Лакса-Мильграма, или теорема Лакса):

Теорема 4.2.4. *1. Если билинейная форма B удовлетворяет неравенству*

$$\exists (C<\infty)\,,\, \forall (x\in H\,,\, y\in H) : |B(x\,,\, y)| < C\|x\|\cdot\|y\|, \tag{4.24}$$

то существует такой оператор $A \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$, что

$$\forall (x\in H\,,\, y\in H) : B(x\,,\, y) =< x\,,\, Ay > . \tag{4.25}$$

2. Если билинейная форма B удовлетворяет условию (4.24) *и условию коэрцитивности:*

$$\exists (m>0)\,,\, \forall (x\in H) : B(x\,,\, x) > m\|x\|^2, \tag{4.26}$$

то входящий в представление (4.25) *оператор A обратим и удовлетворяет неравенству:*

$$\|A^{-1}\| \le 1/m. \tag{4.27}$$

Доказательство. Из условия (4.24) следует, что при каждом фиксированном $x \in H$ линейный функционал

$$y \mapsto B(y\,,\, x)^*$$

непрерывен. Поэтому существует такой вектор $A(x) \in H$, что

$$\forall (y\in H) : B(y\,,\, x) =< y\,,\, A(x) > .$$

Из линейности формы B по первому аргументу следует, что оператор A линеен и
$$\|A(x)\| \leq \sup\{|B(y\,,\,x)| \mid \|y\| \leq 1\} \leq C\|x\|.$$
Поэтому оператор A непрерывен и
$$B(x\,,\,y) =< x\,,\,Ay > .$$
Первое утверждение теоремы доказано.

Из (4.26) следует, что
$$\mathbf{Ker}(A) = 0.$$
Докажем, что из условия коэрцитивности следует равенство
$$\mathbf{Im}(A) = H.$$
Во-первых, заметим, что из условия коэрцитивности следует, что билинейная форма $B(x\,,\,y)$ на диагонали принимает действительные значения и поэтому кососимметрична. Следовательно, билинейная форма $B(x\,,\,y)$ задает на пространстве H скалярное произведение, причем индуцированная этим скалярным произведением норма эквивалентна исходной норме. Применяя теорему Рисса к гильбертовому пространству H со скалярным произведением $B(x\,,\,y)$, мы получаем, что существует такой оператор $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$, что
$$\forall (x \in H\,,\,y \in H):\ < x\,,\,y >= B(x\,,\,\widetilde{A}y) =< x\,,\,A\widetilde{A}y > .$$
Следовательно,
$$\mathbf{Im}(A) = H.$$
Так как
$$\mathbf{Ker}(A) = 0\ ,\ \mathbf{Im}(A) = H,$$
то из теоремы Банаха о существовании обратного оператора отсюда следует, что существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$.

Далее имеем:
$$|B(A^{-1}x\,,\,A^{-1}x)| = |< A^{-1}x\,,\,x >| \geq m\|A^{-1}x\|^2.$$
Поэтому в силу неравенства Коши-Буняковского
$$\forall (\|x\| = 1) : \|A^{-1}x\| \geq m\|A^{-1}x\|^2.$$
Отсюда и вытекает неравенство (4.27).

Теорема доказана.

Ясно, что устанавливаемое формулой (4.25) соответствие между удовлетворяющими условию (4.24) билинейными формами и операторами $A \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$ взаимно однозначно. В дальнейшем нам часто будет удобно задавать операторы их билинейными формами (подобно тому, как в линейной алгебре операторы задаются матрицами).

Если билинейная форма кососимметрична, то входящий в представление (4.25) оператор A удовлетворяет тождеству

$$\forall(x \in H\,,\, y \in H): \ < x\,,\, Ay >=< Ax\,,\, y > .$$

4.3 Понятие гильбертова сопряжения и ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.

Пусть $i = 1\,,\, 2$, H_i -гильбертовы пространства со скалярным произведением $< \,,\, >_i$, $A \in \mathcal{L}(H_1 \mapsto H_2)$.

Определение 4.3.1. Оператор

$$A^* \in \mathcal{L}(H_2 \mapsto H_1)$$

называется гильбертово сопряженным к оператору A, если

$$\forall(x \in H_1\,,\, y \in H_2): \ < A^*y\,,\, x >_1=< y\,,\, Ax >_2 . \tag{4.28}$$

Гильбертово сопряженный оператор (обозначение: A^*) и ранее веденный сопряженный оператор (обозначение: $A^\star$) действуют в разных пространствах: гильбертово сопряженный оператор действует в пространстве H_2, а сопряженный оператор в пространстве $H_2^\star$. Гильбертово сопряженный оператор и сопряженнй оператор связаны равенством

$$A^* = I_1 A^\star I_2^{-1}, \tag{4.29}$$

где

$$I_i : H_i^\star \mapsto H_i$$

-определенные ранее операторы вложения.

Лемма 4.3.1. *Операция гильбертова сопряжения в пространстве $\mathcal{L}(H_1 \mapsto H_2)$ удовлетворяет равенствам*

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \alpha^* A_1^* + \beta^* A_2^*.$$

$$(A^*)^* = A. \tag{4.30}$$

$$\|A^*\| = \|A\|. \tag{4.31}$$

Доказательство. Первое свойство очевидно. Для доказательства второго заметим, что

$$\forall (x \in H_1\,,\, y \in H_2): \;< y\,, Ax >_2 = < A^* y\,,\, x >_1 =$$
$$< x\,,\, A^* y >_1^* = < (A^*)^* x\,,\, y >_2^* = < y\,,\, (A^*)^* x >_2 .$$

Равенство (4.30) доказано. Из (4.29) следует, что

$$\|A^*\| \leq \|A^\star\| = \|A\|.$$

Делая в этом неравенстве замену $A \to A^*$, мы получаем равенство (4.31). Лемма доказана.

Определение 4.3.2. Оператор $A \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$ называется самосопряженным, если

$$\forall (x \in H\,,\, y \in H): \;< x\,,\, Ay > = < Ax\,,\, y > . \tag{4.32}$$

Определение 4.3.3. Ограниченный самосопряженный оператор A называется неотрицательным, если

$$\forall (x \in H): \;< x\,,\, Ax > \geq 0. \tag{4.33}$$

Определение 4.3.4. Если A и B -ограниченные самосопряженные операторы, то

$$A \geq B,$$

если

$$A - B \geq 0.$$

Очевидно, что если A и B -неотрицательные ограниченные самосопряженные операторы, то при $\alpha > 0$ операторы αA , $A{+}B$ -неотрицательны.

Лемма 4.3.2. *Если A -ограниченный неотрицательный самосопряженный оператор, то*

$$\forall (x \in H\,,\, y \in H): | < x\,,\, Ay > | \leq < x\,,\, Ax >^{1/2} < y\,,\, Ay >^{1/2} . \tag{4.34}$$

Доказательство. Рассмотрим неравенство

$$< (zx - z^{-1}y)\,,\, A(zx - z^{-1}y) > =$$
$$|z|^2 < x\,,\, Ax > + |z|^{-2} < y\,,\, Ay > - 2Re\,(\exp(-2i\arg(z)) < x\,,\, Ay >) \geq 0.$$

Если $< x\,,\, Ax > = 0$, то мы должны иметь:

$$< x\,,\, Ay > = 0,$$

иначе это неравенство станет противоречивым при замене $x \to tx$ и соответствующем выборе параметра t. Если $< x\, ,\, Ax > \neq 0$, то мы можем положить

$$z = \left(\frac{< y\, ,\, Ay >}{< x\, ,\, Ax >}\right)^{1/4} \exp(i \arg(< x\, ,\, Ay > /2))$$

и получим нужное неравенство.

Лемма доказана.

Положим

$$\begin{aligned} m_- &= \inf\{< x\, ,\, Ax >|\ \|x\| = 1\}, \\ m_+ &= \sup\{< x\, ,\, Ax >|\ \|x\| = 1\}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Теорема 4.3.1. *Если оператор A самосопряжен, то $\sigma(A) \subset [m_-\, ,\, m_+]$, $m_\pm \in \sigma(A)$.*

Доказательство. Если оператор A самосопряжен, то квадратичная форма

$$x \mapsto < x\, ,\, Ax >$$

принимает действительные значения и

$$\forall (x \in H\, ,\, \beta \in \mathbb{R}^1) : \|(A + i\beta\mathbf{id})x\|^2 = \|Ax\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2. \tag{4.36}$$

Докажем, что отсюда вытекает

Лемма 4.3.3. *Спектр самосопряженного ограниченного оператора лежит на действительной оси.*

Замечание 4.3.1. Позже мы докажем, что спектр *любого* самосопряженного оператора лежит на деЙсвительной оси.

Доказательство. Сдвиг

$$A \to A + ia\mathsf{id}\, ,\, a \in \mathbb{R}^1$$

переводит любой самосопряженный оператор в самомопряженный, поэтому достаточно доказать, что при $\beta \in \mathbb{R}^1$, $\beta \neq 0$ оператор $(A + i\beta\mathsf{id})$ обратим.

Пусть

$$\beta \neq 0\ ,\ H_0 = \mathbf{Im}(A + i\beta\mathsf{id}).$$

Докажем, что множество H_0 замкнуто. Пусть

$$y_n \in H_0\ ,\ y_n \to y_0\, ,\, n \to \infty.$$

Тогда

$$y_n = (A + i\beta\mathsf{id})x_n\,,\ \|y_{(n+m)} - y_n\|^2 \geq \beta^2\|x_{(n+m)} - x_n\|^2.$$

Отсюда вытекает, что последовательность x_n сходится:

$$x_n \to x_0 \quad \text{и} \quad y_0 = (A + i\beta\mathsf{id})x_0 \in H_0.$$

Замкнутость множества H_0 доказана.

Теперь докажем, что $H_0 = H$. Пусть $H_0 \neq H$. Тогда

$$\exists z:\ z \in H_0^{\perp}\,,\ \|z\| = 1.$$

Следовательно,

$$< z\,,\, (A + i\beta\mathsf{id})z >=< z\,,\, Az > +i\beta\|z\|^2 = 0,$$

поэтому

$$Im < z\,,\, (A + i\beta\mathsf{id})z > = \beta\|z\|^2 = 0.$$

Получили противоречие.

Итак, мы имеем:

$$\forall(\beta \neq 0):\ (A + i\beta\mathsf{id}) \in \mathcal{L}(H \to H)\,,\ \mathbf{Im}(A + i\beta\mathsf{id}) = H\,,\ \mathbf{Ker}(A + i\beta\mathsf{id}) = 0.$$

По теореме Банаха о существовании обратного оператора отсюда следует, что

$$\forall(\beta \neq 0):\ (A + i\beta\mathsf{id})^{-1} \in \mathcal{L}(H \to H).$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть

$$\lambda \in \mathbf{R}^1\,,\ \lambda > m_+.$$

Тогда

$$< x\,,\, (\lambda\mathsf{id} - A)x >\geq (\lambda - m_+)\|x\|^2,$$

поэтому билинейная форма

$$B(x\,,\, y) =< x\,,\, (\lambda\mathsf{id} - A)y >$$

коэрцитивна и оператор $(\lambda\mathsf{id} - A)$ имеет обратный. Аналогично доказывается, что при $\lambda < m_-$ оператор $(\lambda\mathsf{id} - A)$ имеет обратный. Нам осталось доказать, что $m_\pm \in \sigma(A)$.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию

$$\|x_n\| = 1\,,\ < x_n\,,\, Ax_n >\to m_-.$$

Оператор
$$B = A - m_-\mathsf{id}$$
неотрицателен.

Применим неравенство (4.34) к
$$x = x_n\,,\ y = (A - m_-\mathsf{id})x_n\,,\ A = B.$$
Получим неравенство
$$\|(A - m_-\mathsf{id})x_n\|^4 \le |< x_n\,,\, (A - m_-\mathsf{id})x_n >| \|(A - m_-\mathsf{id})\|^3 \to 0\,,\ n \to \infty.$$
Отсюда вытекает, что последовательность $\{x_n\}$ есть последовательность Вейля (см. стр. 238) для оператора A и числа $\lambda = m_-$ и поэтому $m_- \in \sigma(A)$.

Затем мы рассматриваем последовательность
$$\{x_n\} : \|x_n\| = 1\,,\ < x_n\,,\, Ax_n > \to m_+$$
и оператор
$$B = m_+\mathsf{id} - A,$$
а далее рассуждаем аналогично.

Теорема доказана.

Следующая теорема называется теоремой Релея.

Лемма 4.3.4. *Если оператор A самосопряжен, то справедливо равенство*
$$\|A\| = \sup\{|< x\,,\, Ax >|\ |\ \|x\| = 1\}. \tag{4.37}$$

Доказательство. Пусть
$$M = \sup\{|< x\,,\, Ax >|\ |\ \|x\| = 1\}.$$
Из неравенства Коши-Буняковского следует, что
$$\forall(\|x\| \le 1) : |< x\,,\, Ax >| \le \|x\| \cdot \|Ax\| \le \|A\|,$$
поэтому
$$M \le \|A\|.$$
Далее имеем:
$$|Re < x\,,\, Ay >| = \frac{1}{4}\left(< (x+y)\,,\, A(x+y) > - < (x-y)\,,\, A(x-y) >\right) \le$$
$$\frac{M}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \frac{M}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Положим в этом неравенстве

$$x = \frac{Ay}{\|Ay\|}.$$

Получим:

$$\forall(\|y\| = 1) : \|Ay\| \leq M.$$

Лемма доказана.

Из леммы 4.3.4 вытекают два важных следствия.

Следствие 4.3.1. *Если A -самосопряженный оператор, то*

$$\|A^2\| = \|A\|^2. \tag{4.38}$$

Это вытекает из равенства

$$\|A^2\| = \sup\{< x\,,\, A^2x >|\ \|x\| = 1\} = \sup\{< Ax\,,\, Ax >|\ \|x\| = 1\} = \|A\|^2.$$

Следствие 4.3.2. *Если $r(A)$ -спектральный радиус самосопряженного оператора A, то*

$$r(A) = \|A\|. \tag{4.39}$$

Доказательство. Из (4.38) следует, что

$$\forall n : \|A^{q(n)}\| = \|A\|^{q(n)}\ ,\ q(n) = 2^n.$$

В силу теоремы 3.5.12 справедливо равенство

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^{q(n)}\|^{1/q(n)} = \|A\|.$$

4.4 Компактные самосопряженные операторы, операторы Гильберта-Шмидта и ядерные операторы.

4.4.1 Компактные самосопряженные операторы.

Эти операторы часто встречаются в классических задачах математической физики. Свойства компактных самосопряженных операторов описываются теоремой Гильберта-Шмидта.

Теорема 4.4.1. *Если $A \neq 0$ -самосопряженный компактный оператор в гильбертовом пространстве,то существует такая не более чем счетная ортонормированная система $\{e_j\}$ и такая последовательность $\{\lambda_j\}$, $\lambda_j \to 0$, $j \to \infty$, что*

$$\forall (f \in H) : Af = \sum_{1 \leq j < \infty} \lambda_j < e_j \, , \, f > e_j. \tag{4.40}$$

Если ряд (4.40) *бесконечен, то он сходится по норме.*

Доказательство. В силу леммы 4.3.1 хотя бы одно из чисел $\pm\|A\| \neq 0$ принадлежит спектру оператора A. Пусть $\lambda_1 \in \sigma(A)$, $|\lambda_1| = \|A\|$. Все не равные нулю точки спектра компактного оператора -изолированные собственные значения (см. теорему 3.8.5, стр. 235). Следовательно, λ_1 -собственное значение оператора A. Пусть e_1 -собственная функция:

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1. \tag{4.41}$$

Рассмотрим оператор

$$A_1 : A_1 f = Af - \lambda_1 < e_1 \, , \, f > e_1.$$

Оператор A_1 самосопряжен и компактен. Либо $A_1 = 0$, либо у оператора A_1 есть собстенное значение λ_2, которому соответствует собственная функция e_2, причем $\|A_1\| = |\lambda_2|$. Имеем:

$$Ae_2 - \lambda_1 < e_1 \, , \, e_2 > e_1 = \lambda_2 e_2.$$

Умножив скалярно обе части этого равенства на e_1, мы получим:

$$\begin{aligned} &< e_1 \, , \, Ae_2 > -\lambda_1 < e_1 \, , \, e_2 >= \\ &< Ae_1 \, , \, e_2 > -\lambda_1 < e_1 \, , \, e_2 >= 0 = \lambda_2 < e_1 \, , \, e_2 > . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{либо } \lambda_2 = 0 \text{ , либо } < e_2 \, , \, e_1 >= 0$$

и

$$Ae_2 = \lambda_2 e_2.$$

Далее положим

$$A_2 : A_2 f = A_1 f - \lambda_1 < e_1 \, , f > e_1 - \lambda_2 < e_2 \, , \, f > e_2$$

и продолжим этот процесс. Тогда либо на некотором шаге мы получим, что

$$Af = \sum_{1 \le j \le n} \lambda_j < e_j \, , \, f > e_j,$$

либо получим бесконечную последовательность λ_j, причем в силу теоремы 3.8.5

$$|\lambda_j| = \|A_j\| \to 0 \, , \, j \to \infty.$$

Теорема доказана.

Приведем пример компактного самосопряженного оператора.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ -ограниченная квадрируемая область, $k(x \, , \, y)$ -непрерывная функция от $x \, , \, y \in D$, которая принимает действительные значения и симметрична по $x \, , \, y$:

$$\forall (x \in D \, , \, y \in D) : k(x \, , \, y) = k(y \, , \, x).$$

Оператор

$$Af(x) = \int_D k(x \, , \, y) f(y) dy$$

компактен в пространстве $L^2(D)$ (см. стр. 224) и самосопряжен.

Пусть $\{\lambda_j^+\}$ -положительные собственные значения компактного самосопряженного оператора A, расположенные в порядке невозрастания модуля:

$$\lambda_{j+1}^+ \le \lambda_j^+.$$

Пусть $\{\lambda_j^-\}$ -отрицательные собственные значения компактного самосопряженного оператора A, расположенные в порядке невозрастания модуля:

$$|\lambda_{(j+1)}^-| \le |\lambda_j^-|.$$

Пусть $L_{(j-1)}$ -подпространства в H:

$$L_{(j-1)} \subset H \; , \; \dim(L_{(j-1)}) = j - 1,$$
$$\nu^+(L_{(j-1)}) = \sup\{< f \, , \, Af >| \, \|f\| = 1 \; , \; f \in L_{(j-1)}^\perp\},$$
$$\nu^-(L_{(j-1)}) = \inf\{< f \, , \, Af >| \, \|f\| = 1 \; , \; f \in L_{(j-1)}^\perp\}.$$

Следующий результат называется теоремой Е. Фишера или принципом минимакса.

Теорема 4.4.2. *1. Если*

$$\sigma(A) \bigcap [0 \, , \, \infty) \ne \emptyset,$$

то справедливы равенства

$$\lambda_1^+ = \sup\{< f\,,\, Af >|\ \|f\| = 1\}, \tag{4.42}$$

$$\forall j > 1 : \lambda_j^+ = \inf\{\nu^+(L_{(j-1)}) \mid L_{(j-1)} \subset H\}. \tag{4.43}$$

2. Если

$$\sigma(A)\bigcap(-\infty\,,\,0] \neq \emptyset,$$

то справедливы равенства

$$\lambda_1^- = \inf\{< f\,,\, Af >|\ \|f\| = 1\}, \tag{4.44}$$

$$\forall j > 1 : \lambda_j^- = \sup\{\nu^-(L_{(j-1)}) \mid L_{(j-1)} \subset H\}. \tag{4.45}$$

Доказательство. Пусть

$$Ae_j^\pm = \lambda_j^\pm e_j^\pm$$

-собственные функции, соответствующие собственным значениям $\lambda_j^\pm$. Справедливо равенство

$$\forall (f \in H) :\ < f\,,\, Af >= \sum_j \lambda_j^+ | < e_j^+\,,\, f > |^2 + \sum_j \lambda_j^- | < e_j^-\,,\, f > |^2. \tag{4.46}$$

Из (4.46) следует, что при вычислении точных граней в (4.42)-(4.44) достаточно рассмотреть случай

$$\|f\|^2 = \sum_{\pm,j} | < e_j^\pm\,,\, f > |^2. \tag{4.47}$$

Если справедливо равенство (4.47), то

$$\forall (\|f\| = 1) : \lambda_1^+ - < f\,,\, Af >=$$
$$\sum_j (\lambda_1^+ - \lambda_j^+) | < e_j^+\,,\, f > |^2 + \sum_j (\lambda_1^+ - \lambda_j^-) | < e_j^-\,,\, f > |^2 \geq 0,$$

причем

$$\lambda_1^+ =< e_1^+\,,\, Ae_1^+ > .$$

Равенство (4.42) доказано.

Равенство (4.44)получается из (4.42) заменой $A \mapsto -A$.

Фиксируем произвольно линейно независимые векторы

$$\{h_i\,,\, 1 \leq i \leq j-1\} \subset H,$$

пусть

$$L_{(j-1)} = \mathrm{span}\{h_i\,,\, 1 \le i \le j-1\}$$

и определим числа $\{\alpha_i\,,\, 1 \le i \le j\}$ из условий

$$\forall (k \le j-1):\ \sum_{1 \le i \le j} \alpha_i < e_i^+\,,\, h_k >= 0\,,\ \sum_{1 \le i \le j} |\alpha_i|^2 = 1.$$

Пусть

$$\phi = \sum_{1 \le i \le j} \alpha_i e_i^+.$$

Тогда

$$\|\phi\| = 1\ ,\ \phi \in (L_{(j-1)})^{\perp}\ ,\ <\phi\,,\, A\phi>= \sum_{1 \le i \le j} \lambda_i^+ |\alpha_i|^2 \ge \lambda_j^+,$$

поэтому

$$\nu^+(L_{(j-1)}) \ge <\phi\,,\, A\phi> \ge \lambda_j^+.$$

Но

$$\nu^+(e_1^+\,,\, \dots e_{(j-1)}^+) = \lambda_j^+,$$

что и доказывает (4.43).

Равенство (4.45) получается из (4.43) заменой $A \mapsto -A$. Теорема доказана.

Следствие 4.4.1. *Если $\lambda_j(A)$ и $\lambda_j(B)$ -занумерованные в порядке убывания собственные числа самосопряженных операторов A и B и*

$$A \ge B,$$

то

$$\forall j : \lambda_j(A) \ge \lambda_j(B).$$

Формула (4.40) в некотором смысле задает общий вид компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

Лемма 4.4.1. *Если $\{e_j\}$ -ортонормированная система в гильбертовом пространстве и $\alpha_j \to 0\,,\, j \to \infty$ -последовательность действительных чисел, то оператор*

$$Af = \sum_j \alpha_j < e_j\,,\, f > e_j$$

компактен.

Доказательство. Оператор

$$A_n f = \sum_{1 \le j \le n} \alpha_j < e_j \, , \, f > e_j$$

компактен. Дале имеем:

$$\|Af - A_n f\|^2 = \sum_{j>n} \alpha_j^2 | < e_j \, , \, f > |^2 \le \|f\|^2 \sup\{\alpha_j^2 \mid j > n\},$$

поэтому

$$\|A - A_n\| \le \sup\{|\alpha_j| \mid j > n\} \to 0 \, , \, n \to \infty.$$

Следовательно, оператор A есть предел по норме компактных операторов и поэтому компактен.

4.4.2 Полярное разложение оператора и характеристические числа.

Пусть $A \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$. Оператор $A^* A \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$ самосопряжен и его спектр лежит на неотрицательной действительной оси, где определена функция

$$\mathbb{R}_+^1 \ni \lambda \mapsto \sqrt{\lambda} \in \mathbb{R}_+^1.$$

В силу теоремы 4.5.1 корректно определен неотрицательный самосопряженный оператор

$$|A| := (A^* A)^{1/2}. \tag{4.48}$$

Следующая теорема называется теоремой о полярном разложении оператора.

Теорема 4.4.3. *Оператор $A \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$ представим в ввиде:*

$$A = U|A|, \tag{4.49}$$

где самосопряженный неотрицательный оператор $|A|$ дается формулой (4.48)*, а оператор U удовлетворяет условиям:*

1. $\mathbf{Dom}(U) = \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(|A|))$, $\mathbf{Im}(U) = \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A))$, $\mathbf{Ker}(U) = 0.$ (4.50)
2. $\forall f \in \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(|A|)) : \ \|Uf\|^2 = \|f\|^2.$ (4.51)
3. $\exists U^{-1} \, : \ U^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)) \mapsto \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(|A|)).$ (4.52)

Доказательство. Из определения (4.48) следует, что

$$\forall f \in H: \ < |A|f\,,\,|A|f >=< f\,,\,A^*Af >= \|Af\|^2.$$

Следовательно,

$$\forall f \in H: \ \||A|f\| = \|Af\|\ ,\ \mathbf{Ker}(|A|) = \mathbf{Ker}(A). \tag{4.53}$$

Оператор U мы оперделим, задав его график. Положим по определению

$$\mathbf{Gr}(U) := \{|A|f \oplus Af \mid f \in H\}. \tag{4.54}$$

Так как $Af = 0$ в том и только том случае, если $|A|f = 0$, равенство (4.54) корректно задает график оператора, который удовлетворяет условию

$$A = U|A|$$

и в силу (4.53) на образе оператора $|A|$ удовлетворяет остальным условиям теоремы. Так как последовательность $\{|A|f_n\}$ сходится в том и только том случае, если сходится последовательность $\{Af_n\}$, оператор U можно по непрерывности продолжить на замыкание множества $\mathbf{Im}(|A|)$, причем продолженный оператор удовлетворяет условию:

$$U(\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(|A|))) = \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)). \tag{4.55}$$

В силу теоремы Банаха об обратном операторе отсюда следует третье утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание 4.4.1. Опрератор U^{-1} не определен в пространстве H. Пусть

$$P_A = \text{ортогональный проектор на пространство } \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)). \tag{4.56}$$

Оператор $U^{-1}P_A$ определен во всем пространстве и удовлетворяет условиям:

$$U^{-1}P_AA = |A|\ ,\ \|U^{-1}P_A\| = 1. \tag{4.57}$$

Теорема 4.4.4. *Если оператор A компактен, то оператор $|A|$ -компактный оператор.*

Доказательство. Если оператор A компактен, то оператор A^*A есть произведение двух компактных операторов и поэтому есть неотрицательный компактный самосопряженный оператор. Пусть

$$s_j(A)^2:\ A^*Ae_j = s_j(A)^2e_j\,,\, s_{(j+1)}(A)^2 \leq s_j(A)^2 \tag{4.58}$$

-система собственных значений и собственных функций оператора A^*A. Из теоремы Гильберта-Шмидта 4.4.1 (см. стр. 290)следует, что

$$s_j(A) \to 0\,,\; j \to \infty.$$

Из определения 4.48 следует равенство

$$|A|f = \sum_j s_j(A) < e_j\,,\; f > e_j. \tag{4.59}$$

Из этого равенства и леммы 4.4.1 (см. стр. 293) следует, что оператор $|A|$ -компактный оператор. Теорема доказана.

Определение 4.4.1. Расположенные в порядке убывания собственные значения оператора $|A|$ называются характеристическими числами (или s-числами) компактного оператора A.

Обычно характеристические числа оператора обозначаются символом $s_j(A)$.

Из формул (4.49), (4.59) и теоремы 4.4.3 следует

Теорема 4.4.5. *Компактный оператор A в гильбертовом пространстве представим в виде*

$$Af = \sum_j s_j(A) < e_j\,,\; f > g_j, \tag{4.60}$$

где $\{e_j\}$ и $\{g_j\}$ -ортонормированные системы.

Доказательство. Справедливы равенства

$$Af = U|A|f = \sum_j s_j(A) < e_j\,,\; f > Ue_j, \tag{4.61}$$

где $\{e_j\}$ -ортонормированная система. Так как оператор U унитарен на области значений оператора $|A|$, система $g_j = Ue_j$ -ортонормирована.

Представление компактного оператора A в виде (4.60) называется разложением Шмидта. Заметим, что у компактного оператора в гильбертовом пространстве может не быть ни одного собственного вектора. Пример такого оператора -оператор

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt$$

в пространстве $L^2([0\,,\,1]\,,\,dx)$. Однако характеристические числа есть у любого компактного оператора.

Мы будем считать, что рассматриваемые гильбертовы пространства сепарабельны и входящие в разложение Шмидта ортонормированные системы полны (ясно, что при необходимости ортонормированные системы $\{e_j\}$ и $\{g_j\}$ можно произвольно дополнить до полных ортонормированных систем и считать, что соответствующие дополненным элементам слагаемые входят в разложение с нулевыми коэффициентами).

Фундаментальное свойство характеристических чисел компактного оператора описывается доказываемой ниже теоремой Д.Э.Аллахвердиева. Перед формулировкой этой теоремы мы напомним некоторые свойство конечномерных операторов.

Определение 4.4.2. Оператор $K \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$ называется конечномерным, если

$$Kf = \sum_{1 \le j \le n} < e_j \, , \, f > g_j \tag{4.62}$$

где $\{e_j\}$ и $\{g_j\}$ -линено независимые системы элементов гильбертова пространства.

Представление оператора в виде (4.62) не единственно. Если

$$\forall\, f \in H: \ \sum_{1 \le j \le n} < e_j \, , \, f > g_j = \sum_{1 \le j \le m} < e'_j \, , \, f > g'_j, \tag{4.63}$$

то выбрав в (4.63) вектор f_i так, чтобы выполнялись равенства

$$< e_j \, , \, f_i >= \delta^i_j,$$

мы получим:

$$\forall\, i: \ g_i = \sum_{1 \le j \le m} < e'_j \, , \, f_i > g'_j.$$

Следовательно, в представлении (4.63) $n \le m$. Аналогично мы получаем неравенство $m \le n$. Следовательно, для конечномерного оператора число

$$\dim(K) := \dim(\mathbf{Im}(K)) \tag{4.64}$$

зависит только от оператора K и не зависит от его представления в виде (4.63). Определеное равенством (4.64) число мы будем называть размерностью оператора. Если оператор K задан формулой (4.62), то

$$\mathbf{Im}(K) = \mathrm{span}\{g_1 \, , \, \ldots \, g_n\}.$$

Также очевидно равенство

$$\dim(K^*) = \dim(K).$$

Пусть

$$M_j := \{K \mid K \in \mathcal{L}(H \mapsto H)\ ,\ \dim(K) = j\}. \qquad (4.65)$$

Следующая теорема назывется теоремой Д.Э.Аллахвердиева.

Теорема 4.4.6. *Справедливы равенства*

$$s_1(A) = \|A\|\ ,\ \forall j \geq 1 :\ s_{j+1}(A) = dist(A\,,\ M_j). \qquad (4.66)$$

Доказательство. Из теоремы Фишера (теорема 4.4.2, стр. 291) следует, что

$$
\begin{aligned}
&s^2_{(j+1)}(A) = \\
&\inf\{\sup\{< f\,,\ A^*Af >|\ \|f\| = 1\,,\ f \in (\mathbf{Im}(K^*))^\perp \mid K^* \in M_j\}\} = \qquad (4.67)\\
&\inf\{\sup\{\|Af\|^2 \mid \|f\| = 1\,,\ f \in \mathbf{Ker}(K)\} \mid K \in M_j\} \leq \qquad (4.68)\\
&\inf\{\sup\{\|(A-K)f\|^2 \mid \|f\| = 1\} \mid K \in M_j\} = \qquad (4.69)\\
&\inf\{\|(A-K)\|^2 \mid K \in M_j\} = \mathrm{dist}(A\,,\ M_j)^2. \qquad (4.70)
\end{aligned}
$$

Равенство (4.67) -это формулировка утверждения теоремы Фишера. Равенство (4.68) -это следствие равенства

$$\mathbf{Ker}(K) = (\mathbf{Im}(K^*))^\perp$$

которое есть следствие равенства (3.76) (см стр. 181). Впрочем, выписанное выше равенство легко можно проверить непосредственно. Последние два равенства есть формулировка соответствующих определений.

Следовательно,

$$s_{(j+1)}(A) \leq \mathrm{dist}(A\,,\ M_j).$$

Пусть (4.60) -разложение Шмидта оператора A. Положим

$$K^0 = \sum_{1 \leq i \leq j} s_i(A) < e_i\,,\ f > g_i.$$

Очевидно, что

$$K^0 \in M_j$$

и

$$\|(A - K^0)f\|^2 = \sum_{i \geq j+1} s_i^2(A)| < e_i\,,\ f > |^2 \leq s_{(j+1)}(A)^2\|f\|^2. \qquad (4.71)$$

Следовательно,

$$\|A - K^0\| \leq s_{(j+1)}(A) \text{ и } s_{(j+1)}(A) \geq \mathrm{dist}(A\,,\ M_j).$$

Теорема доказана.

Теорема 4.4.7. *Характеристические числа компактного оператора A удовлетворяют условиям:*

Если B -компактный оператор, то

$$1. \ |s_j(A) - s_j(B)| \leq \|A - B\|. \tag{4.72}$$

$$2. \ s_j(A^*) = s_j(A). \tag{4.73}$$

$$3. \ s_j(\alpha A) = |\alpha| s_j(A). \tag{4.74}$$

$$4. \ \forall B \in \mathcal{L}(H \mapsto H) : s_j(BA) \leq \|B\| s_j(A) \ , \ s_j(AB) \leq \|B\| s_j(A). \tag{4.75}$$

Доказательство. Первое утверждение теормы следует из теоремы Д.Э.Аллахвердиева и обобщенного неравенства треугольника (см. формулу (2.11) на стр. 101)

Второе утверждение также следует из теоремы Д.Э.Аллахвердиева, так как

$$\forall j : \ \mathrm{dist}(A \, , \, M_j) = \mathrm{dist}(A^* \, , \, M_j),$$

что следует из равенства

$$\|A - K\| = \|A^* - K^*\|.$$

Третье утверждение очевидно.

Для доказательства четвертого утверждения заметим, что

$$\forall (f \in H) : \ < f \, , \, (BA)^* BAf > \leq \|B\|^2 \|Af\|^2 \leq \|B\|^2 < f \, , \, A^* Af >$$

Следовательно,

$$\forall (f \in H) : \ < f \, , \, (\|B\|^2 A^* A - (BA)^* BA) f > \geq 0,$$

и поэтому

$$\|B\|^2 A^* A \geq (BA)^* BA. \tag{4.76}$$

Из этого неравенства и следствия 4.4.1 (см. стр. 293) вытекает неравенство

$$\|B\|^2 s_j(A)^2 \geq s_j(BA)^2.$$

Далее заметим, что

$$s_j(AB) = s_j(B^* A^*) \leq \|B^*\| s_j(A^*) = \|B\| s_j(A).$$

Теорема доказана.

4.4.3 Операторы Гильберта-Шмидта.

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство.

Определение 4.4.3. Оператор $A \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$ называется оператором Гильберта-Шмидта, если для каких-нибудь двух полных ортонормированных систем в пространстве H : $\{e_j \,,\, 1 \le j < \infty\}$, $\{g_j \,,\, 1 \le j < \infty\}$ сходится ряд

$$\|A \mid HS\|^2 := \sum_{\substack{1\le i<\infty \\ 1\le j<\infty}} | < e_j \,,\, Ag_j > |^2. \tag{4.77}$$

Ниже мы докажем, что определенная равенством (4.77) функция

$$A \mapsto \|A \mid HS\| \tag{4.78}$$

действительно задает некоторую норму и введенное равенством (4.77) обозначение будет оправдано.

Множество всех операторов Гильберта-Шмидта мы одозначим символом HS.

Теорема 4.4.8. *Если ряд* (4.77) *сходится для каких-нибудь двух полных ортонормированных систем, то он сходится для любых полных ортонормированных систем и его сумма не зависит от выбора этих систем.*

Доказательство. Пусть $\{e'_j \mid 1 \le j < \infty\}$ -произвольная полная ортонормированная система в пространстве H. В силу равенства Парсеваля справедливы равенства

$$\|A \mid HS\|^2 = \sum_{1\le j<\infty} \left(\sum_{1\le i<\infty} | < e_i \,,\, Ag_j > |^2 \right) = \sum_{1\le j<\infty} \|Ag_j\|^2. \tag{4.79}$$

$$\|A \mid HS\|^2 = \sum_{1\le i<\infty} \left(\sum_{1\le j<\infty} | < A^* e_i \,,\, g_j > |^2 \right) = \sum_{1\le i<\infty} \|A^* e_i\|^2. \tag{4.80}$$

$$\sum_{1\le j<\infty} \|Ag_j\|^2 = \sum_{1\le j<\infty} \left(\sum_{1\le i<\infty} | < e'_i \,,\, Ag_j > |^2 \right) \tag{4.81}$$

Из первых двух равенств следует независимость суммы (4.77) от выбора ортонормированных систем, из третьего равенства следует, что если ряд (4.77) сходится для каких-нибудь двух полных ортонормированных систем, то он сходится для любых полных ортонормированных систем.

Теорема 4.4.9. *Если оператор A есть оператор Гильберта-Шмидта, то он компактен и справедливо равенство*

$$\|A \mid HS\|^2 = \sum_{1\leq j<\infty} s_j(A)^2, \tag{4.82}$$

где $s_j(A)$ -характеристические числа оператора A.

Доказательство. Пусть оператор A есть оператор Гильберта-Шмидта, $\{e_j\,,\, 1 \leq j < \infty\}$ -полная ортонормированная система. Определим оператор

$$P_n : P_n f = \sum_{1\leq j\leq n} < e_j\,,\, f > e_j,$$

Справедливы оценки:

$$\|(A - P_nA)f\|^2 = \sum_{j>n} | < e_j\,,\, Af > |^2 \leq \left(\sum_{j>n} \|A^* e_j\|^2\right) \|f\|^2. \tag{4.83}$$

Из (4.83) и (4.80)следует, что если оператор A есть оператор Гильберта-Шмидта, то

$$\|A - P_nA\| \to 0\,,\, n \to \infty.$$

и оператор A компактен как предел по норме компактных конечномерных операторов.

Для доказательства равенства (4.82) достаточно в (4.81) взять ортонормированную систему $\{g_j\,,\, 1 \leq j < \infty\}$ так, чтобы она включала в себя ортонормированную систему собственных функций оператора $|A|$.

Теорема 4.4.10. *Множество операторов Гильберта-Шмидта есть линейное подпространство в $\mathcal{L}(H \mapsto H)$ и функция* (4.78) *задает на этом подпространстве норму.*

Доказательство. Включение

$$\forall (A \in HS\,,\, z \in \mathbb{C}^1) : zA \in HS$$

и однородность функции (4.78) очевидны.

Пусть $A \in HS\,,\, B \in HS$ и $\{e_j\,,\, 1 \leq j < \infty\}$ -полная ортонормированная система в пространстве H. Тогда

$$\|(A+B) \mid HS\| = \left(\sum_{1\leq j<\infty} \|(A+B)e_j\|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{1\leq j<\infty} (\|Ae_j\| + \|Be_j\|)^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\left(\sum_{1\leq j<\infty} \|Ae_j\|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{1\leq j<\infty} \|Be_j\|^2\right)^{1/2} = \|A \mid HS\| + \|B \mid HS\|.$$

Мы доказали, что множество операторов Гильберта-Шмидта есть линейное пространство и функция (4.78) удвлетворяет неравенству треугольника. Выполнение остальных аксиом нормы очевидно. Теорема доказана.

Теорема 4.4.11. *Норма* (4.78) *удовлетворяет следующим условиям.*

$$\forall(A \in HS) : \|A\| \leq \|A \mid HS\|. \tag{4.84}$$

$$\forall(A \in HS) : A^* \in HS \text{ и } \|A^* \mid HS\| = \|A \mid HS\| \tag{4.85}$$

$$\forall(A \in HS\,,\, B \in \mathcal{L}(H \mapsto H)) : AB \in HS\,,\, BA \in HS \text{ и}$$

$$\|BA \mid HS\| \leq \|B\|\|A \mid HS\|\ \|AB \mid HS\| \leq \|B\|\|A \mid HS\|. \tag{4.86}$$

Доказательство. Из равенства (4.79) следует:

$$\|Ag_1\| \leq \|A \mid HS\|$$

Так как в качестве вектора g_1 может быть взят любой ортонормированный вектор, то из этого неравенства вытекает (4.84). Равенство (4.85) следует из сравнения равенств (4.79) и (4.80).

Для доказательства неравенств (4.85) заметим, что если $\{e_j\,,\, 1 \leq j < \infty\}$ -полная ортонормированная система в пространстве H, то

$$\|BA \mid HS\|^2 = \sum_{1\leq j<\infty} \|BAe_j\|^2 \leq \|B\|^2 \sum_{1\leq j<\infty} \|Ae_j\|^2 = \|B\|^2\|A \mid HS\|^2,$$

и

$$\|AB \mid HS\| = \|B^*A^* \mid HS\| \leq \|B\| \cdot \|A \mid HS\|.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.4.12. *1. Пространство HS есть полное нормированное пространство относительно нормы* (4.78).

2. На пространстве HS корректно определена билинейная форма

$$HS(A\,,\, B) := \sum_{1\leq j<\infty} < Ae_j\,,\, Be_j >, \tag{4.87}$$

которая не зависит от выбора полной ортонормированной системы $\{e_j\,,\, 1 \leq j < \infty\}$ и ряд в (4.87) *сходится абсолютно.*

3. Билинейная форма (4.87) *задает на пространстве HS скалярное произведение, которое порождает норму* (4.78) *и относительно скалярного произведения* (4.87) *пространство HS есть гильбертово пространство.*

Доказательство. Если последовательность $\{A_n\} \subset HS$ фундаментальна по норме пространства HS, то в силу неравенства (4.84) она фундаментальна в $\mathcal{L}(H \mapsto H)$ и поэтому

$$\exists A : \|A - A_n\| \to 0 \, , \, n \to \infty. \tag{4.88}$$

Переходя к пределу $n \to \infty$ в неравенстве

$$\|A_n \mid HS\|^2 = \sum_{1 \le j < \infty} \|A_n e_j\|^2 \le const.$$

мы получаем, что определенный равенством (4.88) оператор $A \in HS$. Полнота пространства HS доказана.

Абсолютная сходимость ряда (4.87) следует из оценки

$$| < Ae_j \, , \, Be_j > | \le \|Ae_j\|^2 + \|Be_l\|^2.$$

Равенство

$$\|A \mid HS\|^2 = HS(A \, , \, A)$$

следует из (4.79). Теорема доказана.

Теорема 4.4.13. *Если $A \in HS$, то существует такое унитарное отображение*

$$U : H \mapsto L^2(D \, , \, \mu(dx)),$$

что оператор $\widetilde{A}$, который делает коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{A} & H \\ {\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U} \\ L^2(D \, , \, \mu(dx)) & \xrightarrow{\widetilde{A}} & L^2(D \, , \, \mu(dx)) \end{array} \tag{4.89}$$

есть интегральный оператор

$$\forall (f \in H) : \widetilde{A} U f(x) = \int_D a(x \, , \, y) U f(y) \mu(dy) \tag{4.90}$$

с квадратично интегрируемым ядром

$$\iint_{D \times D} |a(x \, , \, y)|^2 \mu(dx) \mu(dy) < \infty,$$

которое вычисляется по формуле

$$a(x\,,\,y) := \sum_{1\le i<\infty\,,\,1\le j<\infty} < g_i\,,\,Ag_j > e_i(x)e_j(y), \tag{4.91}$$

причем справедливо равенство

$$\iint\limits_{D\times D} |a(x\,,\,y)|^2\mu(dx)\mu(dy) = \|A\mid HS\|^2. \tag{4.92}$$

Доказательство. Пусть H -произвольное гильбертово пространство и $\{g_j\,,\,1\le j<\infty\}$ -полная ортонормированная система в пространстве H. Пусть $D\subset\mathbb{R}^d$ и $\{e_j(x)\,,\,1\le j<\infty\}$ -полная ортнормированная система в пространстве $L^2(D\,,\,\mu(dx))$. Мы будем считать, что функции $e_j(x)$ действительны:

$$e_j(x) = e_j(x)^*.$$

Определим унитарное отображение

$$U : H \mapsto L^2(D\,,\,\mu(dx)),$$

равенством

$$Ug_j = e_j$$

Далее вычисляем, двигаясь по верхней и правой стрелке вниз на диаграмме (4.89). Имеем:

$$f = \sum_{1\le j<\infty} < g_j\,,\,f > g_j\;,\; Af = \sum_{1\le j<\infty} < g_j\,,\,f > Ag_j =$$

$$\sum_{1\le j<\infty\,,\,1\le i<\infty} < g_j\,,\,f >< g_i\,,\,Ag_j > g_i;$$

$$UAf = \sum_{1\le j<\infty\,,\,1\le i<\infty} < g_j\,,\,f >< g_i\,,\,Ag_j > e_i.$$

Так как

$$< g_j\,,\,f >=< e_j\,,\,Uf >,$$

то

$$UAf = \sum_{1\le j<\infty\,,\,1\le i<\infty} < e_j\,,\,Uf >< g_i\,,\,Ag_j > e_i(x);$$

$$\widetilde{A}Uf = \sum_{1\le j<\infty\,,\,1\le i<\infty} < e_j\,,\,Uf >< g_i\,,\,Ag_j > e_i =$$

$$\sum_{1\le j<\infty\,,\,1\le i<\infty} < g_i\,,\,Ag_j > \left(\int\limits_D e_i(x)e_j(y)Uf(y)\mu(dy)\right). \tag{4.93}$$

Нам предстоит обосновать перемену порядка интегрирования и суммирования в (4.93). Мы сделаем это с помощью приема, который часто оказывается полезен в аналогичных случаях. Заметим, что так как $A \in HS$, то ряд в (4.91) сходится в метрике пространства $L^2(D \times D\,,\, \mu(dx) \times \mu(dy))$, поэтому

$$\forall(\psi \in H):\ < \widetilde{A}Uf\,,\, U\psi >= \iint\limits_{D\times D} (a(x\,,\, y)Uf(y))^* \, U\psi(x)\mu(dx) \times \mu(dy) \tag{4.94}$$

Воспользовавшись теоремой Фубини 1.2.6 (см. стр. 70) запишем интеграл в (4.94) как повторный:

$$\iint\limits_{D\times D} (a(x\,,\, y)Uf(y))^* \, U\psi(x)\mu(dx) \times \mu(dy) =$$

$$\int\limits_{D} \left(\int\limits_{D} (a(x\,,\, y)Uf(y)\mu(dy) \right)^* U\psi(x)\mu(dx)$$

Заданный правой частью равенства (4.95) функционал

$$U\psi(x) \mapsto \int\limits_{D} \left(\int\limits_{D} (a(x\,,\, y)Uf(y)\mu(dy) \right)^* U\psi(x)\mu(dx) \tag{4.95}$$

линеен и непрерывен. Следовательно, существует такой вектор $b(x) \in L^2(D\,,\, \mu(dx))$, что

$$\forall(\psi \in H):\ < b\,,\, U\psi >= \int\limits_{D} \left(\int\limits_{D} ((a(x\,,\, y)Uf(y)\mu(dy) \right)^* U\psi(x)\mu(dx) \tag{4.96}$$

По определению, интеграл в правой части равенства (4.90) мы будем считать равным этом вектору $b(x)$ (это есть частный случай так называемого интеграла Петтиса: интеграл понимается как задаваемый подинтегральным выражением линейный непрерывный фукционал). Равенство (4.92) следует из равенства Пасеваля. Теорема доказана.

4.4.4 Ядерные операторы.

Определение 4.4.4. Компактный оператор $A \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$ называется ядерным, если сходится ряд из его характеристических чисел:

$$\|A \mid Ncl\| := \sum_{1 \le j < \infty} s_j(A). \tag{4.97}$$

Позже мы докажем, что правая часть (4.97) удовлетворяет условиям нормы. Определенная равенством (4.97) норма называется ядерной (или следовой) нормой.

Множество всех ядерных операторов мы обозначим символом Ncl.

Лемма 4.4.2. *Оператор A ядерный в том и только том случае, если для какой-либо полной ортонормированной системы $\{e_j \mid 1 \leq j < \infty\}$ сходится ряд*

$$\sum_{1 \leq j < \infty} < e_j \, , |A| e_j > \tag{4.98}$$

Если ряд (4.98) *сходится для какой-либо полной ортонормированной системы, то он сходится для любой полной ортонормированной системы, его сумма не зависит от выбора полной ортонормированной системы, оператор $|A|^{1/2}$ есть оператор Гильберта-Шмидта и выполнено равенство*

$$\|A \mid Ncl\| = \||A|^{1/2}\|^2 \tag{4.99}$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\sum_{1 \leq j < \infty} < e_j \, , |A| e_j >= \sum_{1 \leq j < \infty} < |A|^{1/2} e_j \, , |A|^{1/2} e_j >= \||A|^{1/2} \mid HS\|^2.$$

Отсюда следует независимость суммы ряда (4.177) от выбора полной ортонормированной системы. Для доказательства равенства (4.99) достаточно выбрать полную ортонормированную систему так, чтобы она включала в себя систему собственных функций оператора $|A|$.

Замечание 4.4.2. Мы видим, что из сходимости ряда (4.98) следует, что оператор A есть оператор Гильберта-Шмидта и поэтому компактный оператор. Отметим, что

$$Ncl \subset HS.$$

Теорема 4.4.14. *Оператор A ядерный в том и только том случае, если он есть произведение двух операторов Гильберта-Шмидта.*

Доказательство. Пусть оператор A ядерный. Используя полярное разложение оператора A (см. (4.49), стр. 294), мы получаем:

$$A = U|A| = U|A|^{1/2} \cdot |A|^{1/2},$$

где операторы $U|A|^{1/2}$ и $|A|^{1/2}$ есть операторы Гильберта-Шмидта.

Пусть $A \in HS$, $B \in HS$. Докажем, что $AB \in$ Ncl. Пусть $\{e_j \, , 1 \leq j < \infty\}$ -полная ортонормированная система в пространстве H. Из формулы (4.57) следует, что

$$|AB| = U_{AB}^{-1} P_{AB} AB,$$

где U_{AB} - унитарный оператор, входящий в полярное разложение оператора AB. Поэтому

$$< e_j \, , \, |AB| e_j >=< e_j \, , \, U^{-1} P_{AB} AB e_j >=< A^*(U^{-1}P_{AB})^* e_j \, , \, B e_j > .$$

Вспоминая определение билинейной формы HS (см. (4.87), стр. 302), мы видим, что

$$\sum_{1 \le j < \infty} < e_j \, , \, |AB| e_j >= HS(A^*(U^{-1}P_{AB})^* \, , \, B) < \infty. \tag{4.100}$$

Теорема доказана.

Теорема 4.4.15. *Множество ядерных операторов Ncl есть линейное подпространство в $\mathcal{L}(H \mapsto H)$ и определенная равенством* (4.97) *функция $A \mapsto \|A \mid Ncl\|$ удовлетворяет условиям нормы:*

$$\forall (A \, , \, B \in Ncl) : \|zA \mid Ncl\| = |z| \|A \mid Ncl\|,$$
$$\|A + B \mid Ncl\| \le \|A \mid Ncl\| + \|B \mid Ncl\|.$$

Относительно нормы (4.97) *пространство ядерных операторов есть банахово пространство.*

Доказательство. Однородность определенной правой частью равенства (4.97) функции очевидна. Докажем, что

$$(A \in \mathrm{Ncl} \, , \, B \in \mathrm{Ncl}) \Rightarrow ((A + B) \in \mathrm{Ncl}).$$

Пусть $\{e_j \, , \, 1 \le j < \infty\}$ -полная ортонормированная система в пространстве H. Из формулы (4.57) следует, что

$$|A + B| = U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} (A + B),$$

поэтому

$$< e_j \, , \, |A + B| e_j >=< e_j \, , \, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} (A + B) e_j >=$$
$$< e_j \, , \, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} A e_j > + < e_j \, , \, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} B e_j > . \tag{4.101}$$

Далее имеем:

$$< e_j \, , \, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} A e_j >=< e_j \, , \, U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} U_A |A|^{1/2} |A|^{1/2} e_j >=$$
$$< (U^{-1}_{(A+B)} P_{(A+B)} U_A |A|^{1/2})^* e_j \, , \, |A|^{1/2} e_j >,$$

следовательно,

$$\left|\sum_{1\le j<\infty} < e_j\,,\, U^{-1}_{(A+B)}P_{(A+B)}Ae_j >\right| =$$

$$\left|\sum_{1\le j<\infty} < (U^{-1}_{(A+B)}P_{(A+B)}U_A|A|^{1/2})^* e_j\,,\, |A|^{1/2}e_j >\right| =$$

$$\left|HS((U^{-1}_{(A+B)}P_{(A+B)}U_A|A|^{1/2})^*\,,\, |A|^{1/2})\right| \le$$

$$\|(U^{-1}_{(A+B)}P_{(A+B)}U_A|A|^{1/2})^* \mid HS\| \cdot \||A|^{1/2} \mid HS\| \le$$

$$\||A|^{1/2} \mid HS\|^2 = \|A \mid Ncl\|.$$

Аналогично оценивается второе слагаемое в (4.101). Из (4.99) следует, что

$$\|A + B \mid Ncl\| \le \|A \mid Ncl\| + \|B \mid Ncl\|.$$

Полнота пространства ядерных операторов относительно ядерной нормы доказывается дословным повторением доказательства полноты пространства операторов Гильберта-Шмидта. Теорема доказана.

Теорема 4.4.16. *На пространстве ядерных операторов корректно определен функционал*

$$\forall (A \in Ncl) : tr(A) := \sum_{1\le j<\infty} < e_j\,,\, Ae_j > \tag{4.102}$$

Правая часть (4.102) *не зависит от выбора полной ортонормированной системы* $\{e_j\,,\, 1 \le j < \infty\}$ *и опеределенный равенством* (4.102) *функционал удовлетворяет условиям:*

$$1\ \forall (A\,,\, B \in HS) : tr(AB) = tr(BA). \tag{4.103}$$

$$2.\ |tr(A)| \le \|A \mid Ncl\|. \tag{4.104}$$

Доказательство. Используя полярное разложение оператора A, мы получаем:

$$\sum_{1\le j<\infty} < e_j\,,\, Ae_j >= \sum_{1\le j<\infty} < e_j\,,\, U|A|e_j >=$$

$$\sum_{1\le j<\infty} < (U|A|^{1/2})^* e_j\,,\, |A|^{1/2}e_j >= HS((U|A|^{1/2})^*\,,\, |A|^{1/2}).$$

Отсюда следует абсолютная сходимость ряда (4.102) и независимость его суммы от выбора ортонормированной системы.

Далее имеем:

$$tr(AB) = \sum_{1\le j<\infty} < e_j\,,\,ABe_j >= \sum_{1\le j<\infty} < A^*e_j\,,\,Be_j >=$$
$$\sum_{1\le j<\infty\,,\,1\le i<\infty} < e_j\,,\,Ae_i >< e_i\,,\,Be_j > .$$

Выписанное равенство доказывает равенство (4.103).

Для доказательства неравенства (4.104) выберем полную ортонормированную систему так, чтобы она включала в себя систему собственных функций оператора $|A|$. Тогда получим:

$$\left|\sum_{1\le j<\infty} < e_j\,,\,Ae_j >\right| = \left|\sum_{1\le j<\infty} < e_j\,,\,U|A|e_j >\right| \le$$
$$\sum_{1\le j<\infty} s_j(A)| < e_j\,,\,Ue_j > | \le \|A \mid HS\|.$$

Теорема доказана.

Определенный равенством (4.102) функционал называется *следом оператора.*

4.5 Спектральное разложение ограниченных самосопряженных операторов.

Наша цель состоит в доказательстве теоремы 4.5.2. Эта теорема, во-первых, описывает общий вид самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве и является обобщением ранее доказанной теоремы Гильберта-Шмидта 4.4.1. Во-вторых, она позволяет для любой заданной на спектре оператора A борелевской функции f определить оператор $f(A)$. Поясним содержание теоремы 4.5.2 на примере.

Пусть A компактный самосопряженный оператор. Тогда

$$\forall(\phi\in H\,,\,n\in\mathbb{Z}_+) : A^n\phi = \sum_{\lambda_j} \lambda_j^n < e_j\,,\,\phi > e_j,$$

где $\{\lambda_j\} = \sigma(A)$ -спектр оператора A, e_j -его собственные функции. Следовательно, для любого полинома справедливо равенство

$$\forall(\phi\in H)\ : p(A)\phi = \sum_{\lambda_j} p(\lambda_j) < e_j\,,\,\phi > e_j,$$

Откуда следует, что

$$\forall(\phi \in H) : \|p(A)\phi\|^2 = \sum_{\lambda_j} |p(\lambda_j)|^2| < e_j \, , \, \phi > |^2.$$

Поэтому

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(A)\}. \tag{4.105}$$

Мы видим, что алгебра всех полиномов от оператора A, рассматриваемая как подалгебра алгебры $\mathcal{L}(H \mapsto H)$, алгебраически и топологически изоморфна алгебре полиномов на спектре оператора A. Теорема (4.5.2) утверждает, что это справедливо и в более общей ситуации.

Приводимое ниже доказательство теоремы (4.5.2) принадлежит Эберлейну и основано на следующей элементарной лемме.

Лемма 4.5.1. *Пусть A -самосопряженный оператор: $A^* = A$. Пусть*

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \, , \, a_j \in \mathbb{R}^1.$$

Тогда

$$\|p(A)\| \leq \sup\{|p(\lambda)| \mid |\lambda| \leq \|A\|\}. \tag{4.106}$$

Доказательство. Фиксируем вектор $x \in H$, $\|x\| = 1$. Пусть

$$H_x = span\{x \, , \, Ax \, , \, \ldots \, , \, A^n x\}.$$

По построению размерность пространства H_x конечна:

$$\mathbf{dim} H_x \leq n + 1$$

Мы будем рассматривать пространство H_x как подпространство пространства H. Ясно, что

$$H = H_x \oplus H_x^{\perp}.$$

Пусть P -оператор ортогонального проектирования на пространство H_x:

$$P^2 = P \, , \, \forall(x \in H) : \; Px \in H_x \, , \, \forall(x \in H_x) : \; x = Px.$$

По определению оператора проектирования, справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
&(x \in H_x) \Rightarrow (x = Px), \\
&(Ax \in H_x) \Rightarrow (Ax = PAx = PAPx) \\
&(A^2x \in H_x) \Rightarrow (A^2x = PA^2x = PAAx = PAPPAPx = (PAP)^2x) \\
&\ldots \\
&(A^n x \in H_x) \Rightarrow (A^n x = (PaP)^n x).
\end{aligned}$$

Следовательно,
$$p(A)x = p(PAP)x.$$
Оператор PAP действует в конечномерном гильбертовом пространстве H_x, и согласно (4.105)
$$| < x\,,\, p(A)x > | = | < x\,,\, p(PAP)x > | \le \|p(PAP)\|$$
$$\le \sup\{|p(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(PAP)\} \le \sup\{|p(\lambda)| \mid |\lambda| \le \|A \mid H\|\}. \qquad (4.107)$$
Правая часть неравенства (4.107) не зависит от x, следовательно,
$$\sup\{| < x\,,\, p(A)x > | \mid \|x\| \le 1\} = \|p(A)\| \le \sup\{|p(\lambda)| \mid |\lambda| \le \|A \mid H\|\}.$$
Лемма доказана.

Заметим, что доказательство этой леммы опирается только на свойства эрмитовых операторов в конечномерном унитарном пространстве.

Замечание 4.5.1. Из доказываемой ниже теоремы (4.5.2) следует, что для произвольного самомопряженного оператора A справедливо равенство (4.105).

В дальнейшем мы будем опираться только на неравенство (4.106), поэтому читатель может сразу перейти к следствию 4.5.1 на стр. 314.

Ниже мы докажем несколько утверждений, которые по смыслу близки лемме 4.5.1 и которые полезно знать.

Лемма 4.5.2. *Если A -ограниченный самосопряженный оператор и $p(\lambda)$ -полином с действительными коэффициентами, то*
$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(p(A))\} = \sup\{|p(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(A)\}. \qquad (4.108)$$

Доказательство. Если коэффициенты полинома $p(\lambda)$ действительны, то оператор $p(A)$ самосопряжен, поэтому в силу следствия 4.3.2 (см. стр. 289) справедливо равенство
$$\|p(A)\| = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(p(A))\} = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in p(\sigma(A))\} =$$
$$\sup\{|p(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$
Лемма доказана.

Заметим, что при доказательстве этой леммы мы существенно использовали теорему об отображении спектра и свойства спектрального радиуса. Если читатель усвоил эти понятия, то в последующих рассуждениях он может использовать лемму (4.5.2) вместо леммы (4.5.1) и тогда можно последующие расуждения сделать более точными: во всех оценках отрезки $[-\|A\|\,,\,\|A\|]$ можно заменить на компакт $\sigma(A)$.

Ниже дается доказательство леммы, которая полезна и в многих других приложениях.

Лемма 4.5.3. *Если A и B -ограниченные коммутирующие:*

$$AB = BA$$

неотрицательные самосопряженные операторы, то оператор AB самосопряжен и неотрицателен.

Доказательство. Самосопряженность оператора AB вытекает из равенства

$$(AB)^* = B^* A^* = BA = AB.$$

Докажем неотрицательность оператора AB. Не ограничивая общности, в дальнешем мы будем считать, что

$$0 \leq A \leq \mathsf{id}.$$

Построим последовательность операторов

$$A_0 = A\,,\ A_{(n+1)} = A_n - A_n^2.$$

Очевидно, что

$$\forall n : A_n B = B A_n.$$

Докажем, что

$$\forall n : 0 \leq A_n \leq \mathsf{id}. \tag{4.109}$$

Доказываем по индукции. Если

$$0 \leq A_n \leq \mathsf{id},$$

то

$$A_n^2(\mathsf{id} - A_n) \geq 0\ ,\ A_n(\mathsf{id} - A_n)^2 \geq 0,$$

так как

$$< f\,,\, A_n^2(\mathsf{id} - A_n) f >=< A_n f\,,\, (\mathsf{id} - A_n) A_n f >\geq 0,$$
$$< f\,,\, A_n(\mathsf{id} - A_n)^2 f >=< (\mathsf{id} - A_n) f\,,\, A_n(\mathsf{id} - A_n) f >\geq 0.$$

Вычисление показывает, что

$$A_{(n+1)} = A_n^2(\mathsf{id} - A_n) + A_n(\mathsf{id} - A_n)^2.$$

Следовательно,

$$A_{(n+1)} \geq 0.$$

Если

$$\mathsf{id} - A_n \geq 0,$$

то

$$\mathsf{id} - A_{(n+1)} = \mathsf{id} - A_n + A_n^2 \geq 0.$$

Неравенство (4.109) доказано.

Так как

$$A_n^2 = A_n - A_{(n+1)},$$

то

$$\sum_{0 \leq m \leq n} A_m^2 = A - A_{(n+1)} \leq A. \tag{4.110}$$

Следовательно,

$$\forall f : \ < f \, , \, A_n^2 f > \to 0 \, , \, n \to \infty.$$

Из этого утверждения и поляризационного тождества следует, что

$$\forall (f \in H \, , \, g \in H) : \ < f \, , \, A_n g > \to 0 \, , \, n \to \infty.$$

Но тогда из (4.110) следует, что

$$\forall n : \ < f \, , \, ABf >= \sum_{0 \leq m \leq n} < f \, , \, A_m^2 Bf > + < f \, , \, A_{(n+1)} Bf >=$$

$$\sum_{0 \leq m \leq n} < A_m f \, , \, BA_m f > + < f \, , \, A_{(n+1)} Bf > \to$$

$$\sum_{0 \leq m < \infty} < A_m f \, , \, BA_m f > \geq 0, \, n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Из этой леммы лего следует утверждение.

Пусть A -ограниченный самосопряженный оператор. Положим

$$a = \inf\{< f \, , \, Af >| \, \|f\| = 1\} \, , \, b = \sup\{< f \, , \, Af >| \, \|f\| = 1\}. \tag{4.111}$$

Лемма 4.5.4. *Если* $p(\lambda)$ *-такой многочлен с действительными коэффициентами, что*

$$\forall (\lambda \in [a \, , \, b]) : p(\lambda) \geq 0,$$

то

$$p(A) \geq 0.$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$p(\lambda) = \prod_{j,k,l,s} (\lambda - \alpha_j)(\beta_k - \lambda)(\lambda - \omega_l)^2((\lambda - \sigma_s)^2 + \gamma_s^2),$$

где

$$\alpha_j \le a\,,\ \beta_k \ge b\,,\ \omega_l \in [a\,,b]\,,\ \gamma_s \in \mathbb{R}^1, \sigma_s \in \mathbb{R}^1.$$

Отсюда следует, что

$$p(A) = \prod_{j,k,l,s} (A - \alpha_j \mathsf{id})(\beta_k \mathsf{id} - A)(A - \omega_l \mathsf{id})^2((A - \sigma_s \mathsf{id})^2 + \gamma_s^2 \mathsf{id}). \quad (4.112)$$

Каждый сомножитель в (4.112) -неотрицательный оператор. В силу леммы 4.5.3 их произведение есть неотрицательный оператор. Лемма доказана.

Теперь докажем утверждение, которое уточняет лемму (4.5.1).

Лемма 4.5.5. *Справедливо неравенство*

$$\|p(A)\| \le \sup\{|p(\lambda)| \mid \lambda \in [a\,,\,b]\}. \quad (4.113)$$

Доказательство. Пусть

$$c = \sup\{|p(\lambda)| \mid \lambda \in [a\,,\,b]\}.$$

Справедливо неравенство

$$\forall(\lambda \in [a\,,\,b]) : c \pm p(\lambda) \ge 0.$$

В силу леммы 4.5.4 отсюда следует неравенство

$$\forall(\phi \in H) :\ <\phi\,,\,(c \pm p(A))\phi> \ge 0,$$

которое эквивалентно неравенству (4.5.5).

На полиномах $p(\lambda)$ с действительными коэффициентами определим отображение

$$\mathcal{O}pb_A :\ p(\lambda) \mapsto \mathcal{O}pb_A(p(\lambda)) = p(A). \quad (4.114)$$

Из леммы 4.5.1 вытекает

Следствие 4.5.1. *Отображение $\mathcal{O}pb_A$ переводит фундаментальные в метрике $C([-\|A\|\,,\,\|A\|])$ поледовательности полиномов в фундаментальные в метрике $\mathcal{L}(H \mapsto H)$ последовательности операторов и поэтому расширяется до непрерывного отображения пространства $C([-\|A\|\,,\,\|A\|])$ в пространство $\mathcal{L}(H \mapsto H)$: если $f \in C([-\|A\|\,,\,\|A\|])$ и в метрике пространства $C([-\|A\|\,,\,\|A\|])$:*

$$f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} p_n(\lambda),$$

то

$$\mathcal{O}pb_A(f) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{O}pb_A(p_n(\lambda)). \quad (4.115)$$

Фиксируем вектор $\phi \in H$ и на пространстве $C([-\|A\|\,,\,\|A\|])$ рассмотрим линейный функционал:

$$C([-\|A\|\,,\,\|A\|]) \ni f(\lambda) \mapsto I_0(\phi \mid f) \stackrel{\text{def}}{=} <\phi\,,\,\mathcal{O}pb_A(f)\phi> . \tag{4.116}$$

Лемма 4.5.6. *Отображение* (4.116) *на пространстве* $C([-\|A\|\,,\,\|A\|])$ *удовлетворяет условиям элементарного интеграла в схеме Даниэля и неравенствам:*

$$\forall(\phi \in H\,,\; f \in C([-\|A\|\,,\,\|A\|]))\,:$$

$$|I_0(\phi \mid f)| \leq \|\phi\|^2 \sup\{|f(\lambda)| \mid \lambda \in [-\|A\|\,,\,\|A\|]\}, \tag{4.117}$$

$$(\forall(\lambda \in [-\|A\|\,,\,\|A\|])\,:\; f(\lambda) \geq 0) \Rightarrow (<\phi\,,\,f(A)\phi> \geq 0). \tag{4.118}$$

Доказательство. Линейность функционала (4.116) по f очевидна. Если

$$\forall(\lambda \in [-\|A\|\,,\,\|A\|])\,:\; f_n(\lambda) \geq 0\;,\; f_n(\lambda) \searrow 0\,,\, n \to \infty,$$

то в силу теоремы Дини

$$\sup\{f_n(\lambda) \mid \lambda \in [-\|A\|\,,\,\|A\|]\} \to 0\,,\, n \to \infty,$$

поэтому в силу оценки (4.117)

$$I_0(\phi \mid f_n) \to 0\,,\, n \to \infty.$$

Докажем неотрицательность функционала (4.116).

Если функция f непрерывна и неотрицательна, то функция

$$\lambda \mapsto (f(\lambda))^{1/2}$$

непрерывна и неотрицательна. Поэтому существует такая последовательность полиномов $Q_n(\lambda)$, что

$$Q_n(\lambda) \rightrightarrows (f(\lambda)^{1/2}\,,\, Q_n^2(\lambda) \rightrightarrows (f(\lambda)\,,\; n \to \infty.$$

Следовательно,

$$<\phi\,,\,f(A)\phi> = \lim_{n\to\infty} <\phi\,,\,Q_n(A)^2\phi> =$$
$$<Q_n(A)\phi\,,\,Q_n(A)\phi> \geq 0.$$

Рассмотрим пространство $C([-\|A\|\,,\,\|A\|])$ как пространство элементарных функций при построении интеграла Даниэля.

Определение 4.5.1. Функционал $f \mapsto I(\phi \mid f)$ -это построенное по схеме Даниэля расширение элементарного интеграла $I_0(\phi \mid f)$ и $\mu(\phi \mid dx)$ -мера на отрезке $[-\|A\|\,,\,\|A\|]$, которая порождена интегралом $I(\phi \mid f)$:

$$\forall (m \in \mathcal{B}([-\|A\|\,,\,\|A\|])) :\ \mu(\phi \mid m) := I(\phi \mid \mathbb{I}(m \mid \cdot)).$$

Из теоремы 1.2.2 (см. стр. 55) следует, что любое борелевское подмножество отрезка $[-\|A\|\,,\,\|A\|]$ при любом $\phi \in H$ измеримо относительно меры $\mu(\phi \mid dx)$ и пространство интегрируемых по мере $\mu(\phi \mid dx)$ функций содержит множество $\mathcal{B}or([-\|A\|\,,\,\|A\|])$ всех ограниченных измеримых по Борелю функций на отрезке $[-\|A\|\,,\,\|A\|]$.

Можно доказать, что множество $[-\|A\|\,,\,\|A\|] \setminus \sigma(A)$ есть множество меры нуль относительно меры $\mu(\phi \mid dx)$.

Множество $\mathcal{B}or([-\|A\|\,,\,\|A\|])$ есть алгебра относительно операций поточечного сложения и умножения функций. С помощью интеграла $f \mapsto I(\phi \mid f)$ мы построим зависящий от оператора A гомоморфизм

$$\mathcal{O}pb_A : \mathcal{B}or([-\|A\|\,,\,\|A\|]) \mapsto \mathcal{L}(H \mapsto H) \tag{4.119}$$

алгебры $\mathcal{B}or([-\|A\|\,,\,\|A\|])$ в некоторую коммутативную подалгебру алгебры $\mathcal{L}(H \mapsto H)$. Гомоморфизм $\mathcal{O}pb_A$ мы будем строить так. Фиксируем функцию $f \in \mathcal{B}or([-\|A\|\,,\,\|A\|])$, которая принимает действительные значения. Используя поляризационное тождество, на простанстве H построим билинейную форму

$$B(\phi\,,\,\psi \mid f) := \frac{1}{4}\sum_{0 \le k \le 3} i^k [I(i^k\phi + \psi \mid f). \tag{4.120}$$

Из оценки (4.117) следует, что для любой действительной ограниченной функции $f \in \mathcal{B}or([a\,,\,b])$ билинейная форма (4.120) удовлетворяет неравенству

$$|B(\phi\,,\,\psi \mid f)| \le \|\phi\|\|\psi\| \sup\{|f(\lambda)| \mid \lambda \in [a\,,\,b]\}. \tag{4.121}$$

Из этого неравенства и теоремы Лакса-Мильграма-Вишика (см. стр. 282) следует, что билинейная форма (4.120) задается линейным непрерывным оператором.

Расширим область определения отображения $\mathcal{O}pb_A$.

Определение 4.5.2. Отображение $\mathcal{O}pb_A$ каждой действительной функции $f \in \mathcal{B}or([-\|A\|\,,\,\|A\|])$ ставит в соответствие оператор $\mathcal{O}pb_A(f) = f(A)$, который удовлетворяет равенству

$$B(\phi\,,\,\psi \mid f) =< \phi\,,\, f(A)\psi >, \tag{4.122}$$

где билинейная форма $B(\phi\,,\,\psi\mid f)$ определена равенством (4.120).

На комплексные функции отображение $\mathcal{O}pb_A$ распространяется по линейности.

Теорема 4.5.1. *Отображение $\mathcal{O}pb_A$ удовлетворяет следующим условиям.*

1. Отображение $\mathcal{O}pb_A$ линейно:

$$\mathcal{O}pb_A : \mathcal{B}or([-\|A\|\,,\,\|A\|]) \ni (\alpha f + \beta g) \mapsto (\alpha f(A) + \beta g(A)) \in \mathcal{L}(H \mapsto H).$$

2. Отображение $\mathcal{O}pb_A$ произведение функций переводит в композицию операторов:

$$\mathcal{O}pb_A : \mathcal{B}or([-\|A\|\,,\,\|A\|]) \ni f(x) \cdot g(x) \mapsto f(A)g(A)) \in \mathcal{L}(H \mapsto H).$$

3.Отображение $\mathcal{O}pb_A$ переводит функцию, тождественно равную единице, в единичный оператор:

$$\mathcal{O}pb_A : 1 \mapsto \mathsf{id}.$$

4. Отображение $\mathcal{O}pb_A$ действительные функции переводит в самосопряженные операторы, неотрицательные действительные функции переводит в неотрицательные операторы и удовлетворяет условию

$$\mathcal{O}pb_A(\phi^*) = \mathcal{O}pb_A(\phi)^*, \tag{4.123}$$

где ϕ^* -функция, комплексно сопряженная функции ϕ , $\mathcal{O}pb_A(\phi)^*$ -оператор, гильбертово сопряженный оператору $\mathcal{O}pb_A(\phi)$.

5. Если функция f принимает действительные значения, то справедлива оценка

$$\|f(A)\| \leq \sup\{|f(\lambda)| \mid \lambda \in [-\|A\|\,,\,\|A\|]\}. \tag{4.124}$$

6. Если

$$\forall (x \in [-\|A\|\,,\,\|A\|]) : f_n(x) \to 0\ ,\ \forall n : |f_n(x)| \leq const.,$$

то

$$\forall (\phi\,,\,\psi \in H) :\ <\phi\,,\,f_n(A)\psi> \to 0\,,\,n \to \infty.$$

Доказательство. Утверждения теоремы очевидны для полиномов, а для остальных функций получаются предельным переходом.

Отображение $\mathcal{O}pb_A$ иногда называется борелевским операторным исчислением. Особую роль в этом исчислении играет рассматриваемый как функция параметра λ оператор, являющися образом при отображении $\mathcal{O}pb_A$ характеристической функции отрезка $[-\|A\|\,,\,\lambda]\,,\ \lambda\in[-\|A\|\,,\,\|A\|]$. Напомним, что харктеристическая функция отрезка $[-\|A\|\,,\,\lambda]$ задается равенством

$$\mathbb{I}([-\|A\|\,,\,\lambda]\mid x)=\begin{cases}1\,,\ -\|A\|\leq x\leq\lambda<\|A\|,\\ 0\,,\ \lambda<x\leq\|A\|,\\ 1\,,\ \lambda=\|A\|.\end{cases}\tag{4.125}$$

По соображениям технического порядка (так как мы используем лемму 4.5.1вместо точной оценки (4.105)) мы определим спектральную фунцию так.

Определение 4.5.3. Спектральная функция $E(\lambda\,,\,A)$ ограниченного ($a\mathsf{id}\leq A\leq b\mathsf{id}$) самосопряженного оператора A -это образ функции $x\mapsto\mathbb{I}([-\|A\|\,,\,\lambda]\mid x))$ при отображении $\mathcal{O}pb_A$:

$$E(\lambda\,,\,A)=\mathcal{O}pb_A(\mathbb{I}([-\|A\|\,,\,\lambda]\mid\cdot))$$

Можно показать (это будет следовать из дальнешего),что можно быо бы определить спектральную функцию как образ функции $x\mapsto\mathbb{I}([-\|A\|\,,\,\lambda]\bigcap\sigma(A)\mid x))$

Таким образом,

$$\forall(\phi\in H):\ <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\phi>=\int\limits_{[-\|A\|\leq x\leq\|A\|}\mathbb{I}(-\|A\|\,,\,\lambda])\mid x)\mu(\phi\mid dx),\tag{4.126}$$

где мера $\mu(\phi\mid dx)$ задана согласно определению 4.5.1.

Обычно спектральная функция доопределяется на всю числовую ось равенствами

$$\begin{aligned}&E(\lambda\,,\,A)=0\,,\ \lambda<a=\inf\{<f\,,\,Af>\mid\ \|f\|=1\},\\&E(\lambda\,,\,A)=\mathsf{id}\ ,\ \lambda\geq b=\sup\{<f\,,\,Af>\mid\ \|f\|f=1\}.\end{aligned}\tag{4.127}$$

Теорема 4.5.2. *Каждому самосопряженному оператору $A\in\mathcal{L}(H\mapsto H)$ согласно определению 4.5.3 соответствует спектральная функция $E(\lambda\,,\,A)$, которая обладает следующими свойствами.*

1. Для любого $\lambda\in\mathbb{R}^1$ оператор $E(\lambda\,,\,A)$ -самосопряженный проектор:

$$\forall(\lambda\in\mathbb{R}^1):E(\lambda\,,\,A)^2=E(\lambda\,,\,A).\tag{4.128}$$

2. Операторная функция $\lambda \mapsto E(\lambda\,,\,A)$ *неубывает:*

$$(\lambda_2 \geq \lambda_1) \Rightarrow (E(\lambda_2\,,\,A) \geq E(\lambda_1\,,\,A))$$

и в каждой точке λ *функция* $\lambda \mapsto E(\lambda\,,\,A)$ *непрерывна справа в том смысле, что*

$$\forall(\phi \in H\,,\,\lambda \in \mathbb{R}^1):\ \lim_{\epsilon \to +0} \|(E(\lambda+\epsilon\,,\,A) - E(\lambda\,,\,A))\phi\| = 0.$$

3. Справедливо равенство

$$\forall(\lambda_1 \in \mathbb{R}^1\,,\,\lambda_2 \in \mathbb{R}^1): E(\lambda_1\,,\,A)E(\lambda_2\,,\,A) = E(\min(\lambda_1\,,\,\lambda_2)\,,\,A). \quad (4.129)$$

4. Если

$$(\lambda_1\,,\,\lambda_2]\bigcap(\lambda_3\,,\,\lambda_4] = \emptyset$$

то

$$(E(\lambda_2\,,\,A) - E(\lambda_1\,,\,A)) \cdot (E(\lambda_4\,,\,A) - E(\lambda_3\,,\,A)) = 0.$$

5. Если функция f *непрерывна справа на отрезке* $[a\,,\,b]$*, то справедливо равенство*

$$\forall(\phi \in H):\ <\phi\,,\,f(A)\phi> = \int_a^b f(\lambda) d_\lambda <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\phi>, \qquad (4.130)$$

где для непрерывной функции f *интеграл можно понимать как интеграл Римана-Стильтьеса по неубывающей функции*

$$\lambda \to <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\phi>.$$

В общем случае интеграл в (4.130) *понимается как интеграл Лебега-Стильтьеса.*

6. Если

$$<\phi\,,\,E(\lambda-0\,,\,A)\phi> = <\phi\,,\,E(\lambda+0\,,\,A)\phi>, \qquad (4.131)$$

то справедливо равенство

$$<\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\phi> = \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda} <\phi\,,\,(R(\sigma - i\epsilon\,,\,A) - R(\sigma + i\epsilon\,,\,A))\phi> d\sigma. \qquad (4.132)$$

Доказательство. Утверждение 1 следует из того, что характеристическая функция удовлетворяет равенству

$$\forall(x \in [a\,,\,b]) : \mathbb{I}([a\,,\,\lambda]) \mid x)^2 = \mathbb{I}([a\,,\,\lambda]) \mid x)$$

и того факта, что отображение $\mathcal{O}pb_A$ есть алгебраический гомоморфизм.

Докажем утверждение 2. Так как

$$\forall(\lambda \in [a\,,\,b]\,,\,\epsilon_n \to 0) :\ [a\,,\,\lambda] = \bigcap_n [a\,,\,\lambda + \epsilon_n],$$

то

$$\forall(\lambda\,,\,\xi \in [a\,,\,b]) : \mathbb{I}([a\,,\,\lambda + 0] \mid \xi) = \mathbb{I}([a\,,\,\lambda] \mid \xi).$$

В силу теоремы 4.5.1 отсюда следует, что

$$\forall(\phi\,,\,\psi \in H) :\ < \phi\,,\,E(\lambda + 0\,,\,A)\psi > = < \phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi > .$$

Но

$$\forall(\phi \in H) : \|(E(\lambda\,,\,A) - E(\lambda + \epsilon\,,\,A))\phi\|^2 =$$
$$< \phi\,,\,(E(\lambda\,,\,A) - E(\lambda + \epsilon\,,\,A))\phi > \to 0\,,\,\epsilon \to 0.$$

Утверждение 3 следует из того, что характеристическая функция удовлетворяет равенству

$$\mathbb{I}([a\,,\,\lambda_1]) \mid x) \cdot \mathbb{I}([a\,,\,\lambda_2]) \mid x) = \mathbb{I}([a\,,\,\min(\lambda_1\,,\,\lambda_2)]) \mid x).$$

Утверждение 4 следует из утверждения 3. Утверждение 5 следует из теоремы 1.2.3 (см. стр. 55).

Докажем утверждение 6. Справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\lambda} < \phi\,,\,(R(\sigma - i\epsilon\,,\,A) - R(\sigma + i\epsilon\,,\,A))\phi > d\sigma =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a\le x\le b}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\big((\sigma - i\epsilon - x)^{-1} - (\sigma + i\epsilon - x)^{-1}\big)\,d\sigma\Big)\mu(\phi \mid dx) =$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{a\le x\le b}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{(\lambda - x)}{\epsilon}\right) + \frac{\pi}{2}\right)\mu(\phi \mid dx) \tag{4.133}$$

Если выполнено условие (4.131), то $\mu(\phi \mid dx)$-мера точки $x = \lambda$ равна нулю, поэтому

$$\mu(\phi \mid dx)\,\text{п.в.}: \lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{(\lambda - x)}{\epsilon}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = \mathbb{I}([a\,,\,\lambda]) \mid x).$$

Переходя на основе теоремы Лебега к пределу в (4.133), мы получаем равенство (4.132).

Теорема доказана.

Заметим, что из утверждения 6 следует, что спектральная функция $E(\lambda\,,\,A)$ однозначно определяется оператором A и что резольвентное множество есть множество меры ноль относительно меры $\mu(\phi \mid dx)$.

Функция

$$\lambda \mapsto <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)g>$$

может принимать комплексные значения и при принятом нами определении интеграла Римана-Стильтьеса мы не можем взять ее как интегрирующую функцию. Мы примем следующее

Определение 4.5.4. Положим

$$\int f(\lambda)d_\lambda <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi> \stackrel{\text{def}}{=} B(\phi\,,\,\psi \mid f), \tag{4.134}$$

где стоящая в правой части билинейная форма задана равенством (4.120).

Если $\phi = \psi$, то интеграл (4.134) можно понимать как интеграл Лебега-Стильтьеса.

Непосредственно из определения (см. определение 4.5.2 на стр. 316) следуют равенства

$$\begin{aligned}
&\int f(\lambda)d_\lambda <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi> = \\
&\int d_\lambda <f(A)\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi> = \int d_\lambda <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)f(A)\psi>, \\
&\int d_\lambda <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi> = <\phi\,,\,\psi>.
\end{aligned}$$

При фиксированны f и ψ функционал

$$\phi \mapsto \int f(\lambda)d_\lambda <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi>$$

сопряженно-линеен и непрерывен, поэтому на основе теоремы Рисса

$$\exists(g\in H)\,,\,\forall(\phi\in H):\ <\phi\,,\,g> = \int f(\lambda)d_\lambda <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi>. \tag{4.135}$$

Если выполнено равенство (4.135), то мы положим по определению

$$\int f(\lambda)d_\lambda E(\lambda\,,\,A)\psi \stackrel{\text{def}}{=} g, \tag{4.136}$$

$$\int f(\lambda)d_\lambda E(\lambda\,,\,A) : \psi \mapsto \int f(\lambda)d_\lambda E(\lambda\,,\,A)\psi. \tag{4.137}$$

Рассмотрим примеры.

1. Пусть A -компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Из (4.40) следует, что

$$E(\lambda\,,\,A)\phi = \sum_{\lambda_j \le \lambda} < e_j\,,\,\phi > e_j. \tag{4.138}$$

Если пространство H есть $L^2(D\,,\,dx)$, то спектральная фукция есть интегральный оператор с ядром

$$\theta(x\,,\,y\,,\,\lambda) = \sum_{\lambda_j \le \lambda} e_j(x)e_j(y).$$

2. Пусть оператор A -оператор умножения на независимую переменную x в гильбертовом пространстве $L^2([0\,,\,1]\,,\,dx)$:

$$A\phi(x) = x\phi(x).$$

Тогда полином от оператора A -это оператор умножения на полином от независимой переменной x, и спектральная функция оператора A -это оператор умножения на характеристическую функцию отрезка $[a\,,\,\lambda]$:

$$E(\lambda\,,\,A)\phi(x) = \mathbb{I}([a\,,\,\lambda]) \mid x)\phi(x).$$

3. Следующий пример называется моделью Фридерихса и часто исползуется при рассмотрении задач квантовой механики. Мы рассмотрим этот пример в упрощенной формулировке и выделим его в отдельный параграф.

Модель Фридерихса. В пространстве $L^2([0\,,\,1]\,,\,dx)$ рассмотрим оператор

$$B\,:\,B\phi(x) = x\phi(x) + \mu\left(\int_0^1 \alpha(x)\phi(x)dx\right)\alpha(x)\,,\,\alpha \in C_0^\infty([0\,,\,1]). \tag{4.139}$$

Обратим внимание на то, что мы предполагаем функцию $\alpha(x)$ действительной, гладкой и равной нулю в окрестности точек $x = 0\,,\ x = 1$.

Воспользуемся изложенной в лемме 3.10.3 (см. стр. 246) конструкцией. В нашем случае

$$a = A\,,\; A\phi(x) = x\phi(x)\;,\; b = B\;,\; (b-a)\phi(x) = \mu < \alpha\,,\, \phi > \alpha(x).$$

Сначала будем предполагать, что $Im\,\lambda \neq 0$. Так как операторы A и B самосопряжены, то в рассматриваемом случае $\lambda \in res(A)\bigcap res(B)$ и оператор $T(\lambda\,,\,A\,,\,B)$ определен. Так как в рассматриваемом случае область значений оператора $(b-a)$ одномерна и натянута на вектор $\alpha(x)$, область значений оператора $T(\lambda\,,\,A\,,\,B)$ также будет натянута на вектор $\alpha(x)$. Следовательно,

$$T(\lambda\,,\,A\,,\,B)\phi(x) = c(\lambda\,,\,\phi)\alpha(x). \tag{4.140}$$

Подставив это выражение в уравнение (3.114), мы получим уравнение для определения $c(\lambda\,,\,\phi)$:

$$c(\lambda\,,\,\phi) = \mu < \alpha\,,\,\phi > +\mu < \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,A)\alpha > c(\lambda\,,\,\phi). \tag{4.141}$$

Положим

$$g(\lambda) := < \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,A)\alpha > = \int_0^1 (\lambda - x)^{-1}\alpha(x)^2 dx\,,\; Im\,\lambda \neq 0. \tag{4.142}$$

Если выполнены наши предположения о функции $\alpha(x)$, то функция $g(\lambda)$ аналитична в области $\lambda \notin [0\,,\,1]$, стремится к нулю при $\lambda \to \infty$ и при $\lambda \in (0\,,\,1)$ существует предел

$$g(\lambda - i0) - g(\lambda + i0) = 2\pi i\alpha(\lambda)^2.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что

$$|1 - \mu g(\lambda \pm i0)| > 0\;.\;\lambda \in \mathbb{R}^1 \tag{4.143}$$

Очевидно, что это неравенство будет выполнено и в некоторой окрестности действительной оси. Если выполнено условие (4.143), то

$$c(\lambda\,,\,\phi) = \frac{\mu < \alpha\,,\,\phi >}{1 - \mu g(\lambda)}, \tag{4.144}$$

и левая часть (4.144) аналитична в окрестности интервала $(0\,,\,1)$.

Из (4.140) следует, что в нашем случае опеределенный в лемме 3.10.3 оператор Q вычисляется по формуле

$$Q(\lambda\,,\,A\,,\,B)\phi(x) =$$
$$\phi(x) + \mu(1 - \mu g(\lambda))^{-1}\left(\int_0^1 (\lambda - x)^{-1}\alpha(x)\phi(x)dx\right)\alpha(x)\,,\; \lambda \notin [0\,,\,1]. \tag{4.145}$$

Из равенства (3.113) (см. 191) следует, что

$$R(\lambda\,,\,B)=R(\lambda\,,\,A)Q(\lambda\,,\,A\,,\,B). \tag{4.146}$$

Так как правая часть равенства (4.146) аналитична при $\lambda\notin[0\,,\,1]$, то спектр оператора B лежит на отрезке $[0\,,\,1]\ :\sigma(B)\subset[0\,,\,1]$. Заметим, что если $\phi\in C_0^\infty([0\,,\,1])$, то существуют пределы $Q(\lambda\pm i0\,,\,A\,,\,B\,,\,\phi)\,,\,\lambda\in(0\,,\,1)$.

Справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&<\phi\,,\,(R(\sigma-i\epsilon\,,\,B)-R(\sigma+i\epsilon\,,\,B))\phi>=\\
&2i\epsilon<\phi\,,\,R(\sigma-i\epsilon\,,\,B)R(\sigma+i\epsilon\,,\,B)\phi>=\\
&2i\epsilon<R(\sigma+i\epsilon\,,\,B)\phi\,,\,R(\sigma+i\epsilon\,,\,B)\phi>=\\
&2i\epsilon<R(\sigma+i\epsilon\,,\,A)Q(\sigma+i\epsilon\,,\,A\,,\,B)\phi\,,\,R(\sigma+i\epsilon\,,\,A)Q(\sigma+i\epsilon\,,\,A\,,\,B)\phi>.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\forall(\phi\in C_0^\infty([0\,,\,1])\,,\ \lambda\in(0\,,\,1)):\ <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,B)\phi>=\\
&\lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\lambda}<\phi\,,\,(R(\sigma-i\epsilon\,,\,B)-R(\sigma+i\epsilon\,,\,B))\phi>d\sigma=\\
&\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}<R(\sigma+i\epsilon\,,\,A)Q(\sigma+i\epsilon\,,\,A\,,\,B)\phi,\\
&R(\sigma+i\epsilon\,,\,A)Q(\sigma+i\epsilon\,,\,A\,,\,B)\phi>d\sigma=\\
&\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\left(\int_0^1((x-\sigma)^2+\epsilon^2)^{-1}|Q(\sigma+i\epsilon\,,\,A\,,\,B)\phi(x)|^2dx\right)d\sigma=\\
&\int_0^\lambda|Z_+(\phi)(\sigma)|^2d\sigma,
\end{aligned} \tag{4.147}$$

где

$$Z_\pm(\phi)(\sigma)=Q(\sigma\pm i0\,,\,A\,,\,B)\phi(\sigma). \tag{4.148}$$

Таким образом, в рассматриваемой нами модели спектральная функция задается квадратичной формой

$$\forall(\phi\,,\,\psi\in C_0^\infty([0\,,\,1])):\ <\phi\,,\,E(\lambda\,,\,B)\psi>=\int_0^\lambda Z_+(\phi)(\sigma)^*Z_+(\psi)(\sigma)d\sigma, \tag{4.149}$$

Вычисляя правую часть (4.148), мы получаем:

$$\begin{aligned}
&\forall(\phi\in C_0^\infty([0\,,\,1]))\ :Z_+(\phi)(\lambda)=\\
&\phi(\lambda)+\mu(1-\mu g(\lambda+i0))^{-1}\left(\int_0^1(\lambda+i0-x)^{-1}\alpha(x)\phi(x)dx\right)\alpha(\lambda).
\end{aligned} \tag{4.150}$$

Из (4.149) следует равенство

$$\forall(\phi \in C_0^\infty([0\,,\,1])) :\ \int_0^1 |\phi(x)|^2 dx = \int_0^1 |Z_+(\phi)(\lambda)|^2 d\lambda. \qquad (4.151)$$

Следовательно, первоначально определенное на $C_0^\infty([0\,,\,1])$ преобразование

$$Z_+ : \phi(x) \mapsto Z_+(\phi)(\lambda) \qquad (4.152)$$

расширяется до унитарного преобразования пространства $L^2([0\,,\,1])$ в себя. Это преобразование диагонализует оператор B, а обратное преобразование дается формулой

$$Z_+^{-1} : \phi(x) = Z_+\phi(\lambda)|_{\lambda=x} +$$
$$\mu\left(\int_0^1 (1-\mu g(\lambda - i0))^{-1}(\lambda - i0 - x)^{-1}\alpha(\lambda) Z_+(\phi)(\lambda) d\lambda\right)\alpha(x). \qquad (4.153)$$

Эта формула получается так. В правой части равенства

$$\int_0^1 \psi(x)^*\phi(x)dx = \int_0^1 Z(\psi)(\lambda)^* Z(\phi)(\lambda)d\lambda \qquad (4.154)$$

в формуле для $Z(\psi)(\lambda)^*$ интегрирование функции $\psi(x)^*$ по dx ставим последним и приравниваем множитель перед $\psi(x)^*$ в левой и правой части равенства (4.154).

Приведем вывод формулы для $R(\lambda\,,\,B)$, который не использует формализм T-матрицы.

Из второго резольвентного уравнения имеем:

$$\forall(\psi \in L^2([0\,,\,1])) :\ R(\lambda\,,\,B)\psi - R(\lambda\,,\,A)\psi = R(\lambda\,,\,A)(B-A)R(\lambda\,,\,B)\psi,$$
$$(B-A)R(\lambda\,,\,B)\psi = \mu < \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,B)\psi > \alpha,$$
$$< \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,B)\psi > - < \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,A)\psi >= \mu < \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,B)\psi >< \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,A)\alpha >,$$
$$< \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,B)\psi >= (1-\mu < \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,A)\alpha >)^{-1} < \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,A)\psi >, \qquad (4.155)$$
$$R(\lambda\,,\,B)\psi = R(\lambda\,,\,A)\psi + (1-\mu < \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,A)\alpha >)^{-1} < \alpha\,,\,R(\lambda\,,\,A)\psi > \alpha\,.$$

Формула (4.155) при $\psi = \alpha$ аназывается фомулой Крейна-Ароншайна.

К модели Фридерихса сводятся многие задачи квантовой механики. В качестве примера рассмотрим простейший случай модели сильной связи. В этой модели гильбертово пространство состояний есть пространство последовательностей

$$l^2 \in \{f(j)\} :\ \sum_{-\infty<j<\infty} |f(j)|^2 < \infty.$$

Операторы A и B задаются формулами

$$Af(j) = 2f(j) - f(j+1) - f(j-1) \ , \ Vf(j) = \mu\delta_j^0 f(0) \ , \ B = A + V.$$

Преобразование

$$U \, : \, l^2 \mapsto L^2([0\,,\,1]) \ , \ U(f)(x) = \sum_j f(j)\exp(2\pi i j)$$

унитарно и образ оператора A при этом преобразовании есть оператор умножения на функцию:

$$U(Af)(x) = 2(1 - \cos(2\pi x))U(f)(x),$$

а образ оператора V есть интегральный оператор с вырожденным ядром:

$$U(Vf)(x) = \mu \int_0^1 U(f)(x)dx.$$

Ясно, что заменой переменной x задача о вычислении спектральной функции оператора B сводится к предыдущей задаче.

4.6 Спектральное разложение унитарных операторов.

Очевидна

Лемма 4.6.1. *Оператор $U \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$ -унитарный оператор, если*

$$U^*U = UU^* = \mathsf{id}.$$

Пример унитарного оператора в пространстве $L^2([0\,,\,1])$ - оператор умножения на функцию $\exp(i\omega(x))$, где $\omega(x)$ -действительная измеримая функция. Ниже мы увидим, что в некотором смысле все унитарные операторы похожи на этот оператор. Основной результат этого параграфа -теорема 4.6.2. Доказательству теоремы мы предпошлем несколько лемм. Обратим внимание на то, что наши построения во многом аналогичны предыдущим.

Ниже символом $C([0\,,\,2\pi])$ мы будем обозначать множество всех непрерывных на отрезке $[0\,,\,2\pi]$ *периодических* функций:

$$\forall (f \in C([0\,,\,2\pi])) \, : \, f(0) = f(2\pi).$$

Пусть $\mathcal{A}$ -множество функций вида

$$f(\exp(i\theta)) \in \mathcal{A} : f(\exp(i\theta)) = \sum_{0\le k\le m} (\alpha_k \exp(ik\theta) + \beta_k \exp(-ik\theta)) \ , \ \alpha_k \, , \, \beta_k \in \mathbb{C}^1.$$

Множество функций $\mathcal{A}$ есть подалгебра алгебры $C([0\,,\,2\pi])$ относительно операций поточечного сложения и умножения функций. Заметим, что алгебра $\mathcal{A}$ замкнута относительно операции комплексного сорпряжения:

$$(f \in \mathcal{A}) \Rightarrow (f^* \in \mathcal{A}).$$

Алгебра $\mathcal{A}$ содержит подалгебру $\{P_m\}$ тригонометрических полиномов:

$$P_m(\exp(i\theta)) = a_0/2 + \sum_{1\le k\le m} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)) \ , \ a_k \, , \, b_k \in \mathbb{R}^1.$$

Следующая лемма называется леммой Фейера.

Лемма 4.6.2. *Если тригонометрический полином неотрицателен:*

$$\forall(\theta \in [0\,,\,2\pi]) : P_m(\exp(i\theta)) \ge 0, \tag{4.156}$$

то он представим в виде

$$P_m(\exp(i\theta)) = Q(\exp(i\theta))^* \cdot Q(\exp(i\theta)) \ , \ Q \in \mathcal{A}. \tag{4.157}$$

Доказательство. Пусть функция $F(z)\,,\, z \in \mathbb{C}^1$ определена из условия:

$$F(z) = P_m(\exp(i\theta)) \ , \ z = \exp(i\theta)\,,\, 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Функция $F(z)$ пердставима в виде

$$\forall(0 < |z| < \infty) : F(z) = z^{-m} p_{2m}(z),$$

где $p_{2m}(z)$ -алгебраический полином степени $2m$. Функция

$$\widetilde{F}(z) = F((1/z)^*)^*$$

аналитична в области $0 < |z| < \infty$.

Так как тригонометрический полином принимает действительные значения на единичном круге, то справедливо равенство

$$\forall(\theta \in [0\,,\,2\pi)) : F(\exp(i\theta) = \widetilde{F}(\exp(i\theta)). \tag{4.158}$$

Отсюда следует, что
$$F(z) \equiv \widetilde{F}(z).$$
Следовательно, если точка
$$z = a_j$$
есть ноль полинома $p_{2m}(z)$, то точка
$$z = (1/a_j)^*$$
также ноль полинома $p_{2m}(z)$. Если неравенство в (4.154) строгое, то отсюда следует что нули полинома $p_{2m}(z)$ не лежат на окружности $|z| = 1$ и
$$F(z) = z^{-m} c \prod_{1 \le j \le m} ((z - a_j)(z - (1/a_j)^*)) = \widetilde{c} \prod_{1 \le j \le m} ((z - a_j)(z^{-1} - a_j^*)) \tag{4.159}$$
Ясно, что константа $\widetilde{c}$ дожна быть неотрицательной. Представление (4.159) доказывает лемму в случае строго неравенства в (4.154). Общий случай получается очевидным предельным переходом.

Фиксируем унитарный оператор U. По унитарному оператору U построим отображение
$$\mathcal{O}p_U : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{L}(H \mapsto H)$$
согласно формуле
$$\mathcal{O}p_U\left(\sum_{0 \le k \le m} (\alpha_k \exp(ik\theta) + \beta_k \exp(-ik\theta))\right) = \left(\sum_{0 \le k \le m} (\alpha_k U^k + \beta_k U^{-k})\right). \tag{4.160}$$

Лемма 4.6.3. *Отображение $\mathcal{O}p_U$ есть гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{L}(H \mapsto H)$, который удовлетворяет условию:*
$$\mathcal{O}p_U(f^*) = \mathcal{O}p_U(f)^*, \tag{4.161}$$
где f^* -функция, комплексно сопряженная функции f, $\mathcal{O}p_U(f)^*$ -оператор, гильбертово сопряженный оператору $\mathcal{O}p_U(f)$.

Доказательство. Утверждение о том, что отображение $\mathcal{O}p_U$ есть гомоморфизм означает, что
$$\mathcal{O}p_U(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{O}p_U(f_1) + \beta \mathcal{O}p_U(f_2),$$
$$\mathcal{O}p_U(f_1 \cdot f_2) = \mathcal{O}p_U(f_1) \cdot \mathcal{O}p_U(f_2)$$
и проверяется прямым вычислением. Формула (4.161) есть следствие равенства
$$U^{-1} = U^*.$$

Лемма 4.6.4. *1. Если P_m -тригонометричекий полином, то $\mathcal{O}p_U(P_m)$ -самосопряженный оператор.*

2. Если P_m -неотрицательный тригонометрический полином:

$$\forall \theta \, : \, P_m(\exp(i\theta) \geq 0,$$

то $\mathcal{O}p_U(P_m)$ -неотрицательный оператор:

$$\forall (\phi \in H) \, : \, < \phi \, , \, \mathcal{O}p_U(P_m)\phi > \geq 0. \tag{4.162}$$

3. Для любого тригонометрического полинома справедлива оценка

$$| < \phi \, , \, \mathcal{O}p_U(P_m)\phi > \leq \sup\{|P_m(\exp(i\theta))| \mid \theta \in [0 \, , \, 2\pi]\}\|\phi\|^2. \tag{4.163}$$

Доказательство. Если P_m -тригонометрический полином, то по определению он принимает действительные значения и первое утверждение леммы следует из (4.161). Если тригонометрический полином P_m неотрицателен, то в силу леммы Фейера справедливо представление

$$P_m(\exp(i\theta)) = Q(\exp(i\theta))^* \cdot Q(\exp(i\theta)) \, , \, Q \in \mathcal{A},$$

и используя равенство (4.161) мы получаем:

$$\begin{aligned}
&< \phi \, , \, \mathcal{O}p_U(P_m)\phi > = < \phi \, , \, \mathcal{O}p_U(Q^*Q)\phi > = \\
&< \phi \, , \, \mathcal{O}p_U(Q^*)\mathcal{O}p_U(Q)\phi > = < \phi \, , \, \mathcal{O}p_U(Q)^*\mathcal{O}p_U(Q)\phi > = \\
&< \mathcal{O}p_U(Q)\phi \, , \, \mathcal{O}p_U(Q)\phi > \geq 0.
\end{aligned}$$

Третье утверждение леммы есть очевидное следствие второго.

Лемма доказана.

Определение 4.6.1. Для каждого $\phi \in H$ на алгебре тригонометрических полиномов $\{P_m\}$ линейный функционал $I_0(\phi \mid \cdot)$ определяется равенством

$$I_0(\phi \mid \cdot) \, : \, P_m(\exp(i\theta)) \mapsto I_0(\phi \mid P_m) = < \phi \, , \, \mathcal{O}p_U(P_m)\phi > . \tag{4.164}$$

Лемма 4.6.5. *Определенный формулой* (4.164) *линейный функционал $I_0(\phi \mid \cdot)$ по непрерывности продолжается на пространство $C([0 \, , \, 2\pi])$ и продолжение (мы обозначаем его тем же символом) функционала $I_0(\phi \mid \cdot)$ удовлетворяет оценкам:*

$$1.(f(\theta) \in C([0 \, , \, 2\pi]) \, , \, f(\theta) \geq 0) \Rightarrow (I_0(\phi \mid f) \geq 0). \tag{4.165}$$

$$2. \, \forall (f(\theta) \in C([0 \, , \, 2\pi])) \, :$$

$$|I_0(|\phi \mid f)| \leq \sup\{|f(\theta)| \mid \theta \in [0 \, , \, 2\pi]\}\|\phi\|^2. \tag{4.166}$$

Доказательство. Если $f \in C([0\,,\,2\pi])$, то по теореме Вейрштрасса существует такая последовательность тригонометрических многочленов $\{P_{m(n)}\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f(\theta) - P_{m(n)}(\exp(i\theta))| \mid \theta \in [0\,,\,2\pi\} = 0. \tag{4.167}$$

Определение 4.6.2. На пространстве $C([0\,,\,2\pi])$ функционал $I_0(\phi \mid \cdot)$ определяется равенством

$$I_0(\phi \mid f) := \lim_{n\to\infty} < \phi\,,\,\mathcal{O}p(P_{m(n)})\phi >, \tag{4.168}$$

если последовательность $P_{m(n)}$ удовлетворяет условию (4.167).

В силу оценки (4.163) это определение корректно и определенный равенством (4.168) функционал $I_0(\phi \mid \cdot)$ есть продолжение по непрерывности функционала (4.164). Если

$$\forall(\theta \in [0\,,\,2\pi]) : f(\theta) \geq 0,$$

то мы можем выбрать последовательность многочленов в (4.167) так, что будет выполнено неравенство

$$\forall(n > 0\,,\,\theta \in [0\,,\,2\pi]) : P_{m(n)}(\exp(i\theta)) \geq 0,$$

а отсюда следует неравенство (4.165). Второе утверждение леммы есть очевидное следствие первого. Лемма доказана.

Наши дальнейшие расуждения полностью совпадают с теми, которые были проведены для случая самосопряженных операторов. Рассмотрим пространство $C([0\,,\,2\pi])$ как пространство элементарных функций при построении интеграла Даниэля, а функционал $I_0(\phi \mid \cdot)$ как элементарный интеграл.

Определение 4.6.3. Пусть $I(\phi \mid \cdot)$ -расширение по Даниэлю элементарного интеграла $I_0(\phi \mid \cdot)$, а $\mu(\phi \mid d\theta)$ -мера на отрезке $[0\,,\,2\pi]$, порожденная интегралом $I(\phi \mid \cdot)$.

Пространство интегрируемых по мере $\mu(\phi \mid d\theta)$ функций содержит алгебру $\mathcal{B}or([0\,,\,2\pi])$ всех ограниченных измеримых по Борелю функций на отрезке $[0\,,\,2\pi]$. Фиксируем действительную функцию $f \in \mathcal{B}or([0\,,\,2\pi])$ и пусть $B(\phi\,,\,\psi \mid f)$ -билинейная форма, которая в силу поляризационного тождества соответствует квадратичной форме $\phi \mapsto I(\phi \mid f)$.

Ниже мы построим отображение

$$\mathcal{O}p_U : \mathcal{B}or([0\,,\,2\pi]) \mapsto \mathcal{L}(H \mapsto H), \tag{4.169}$$

которое служит продолжением отображения (4.160).

Определение 4.6.4. Если $f \in \mathcal{B}or([0\,,\,2\pi])$, то оператор $\mathcal{O}p_U(f)$ -это оператор, который определяется билинейной формой $B(\phi\,,\,\psi \mid f)$:

$$\forall(\phi \in H\,,\,\psi \in H):\ <\phi\,,\,\mathcal{O}p_U(f)\psi> \stackrel{\text{def}}{=} B(\phi\,,\,\psi \mid f). \tag{4.170}$$

На комплекснозначные функции $f \in \mathcal{B}or([0\,,\,2\pi])$ определение 4.6.4 распространяется по линейности. Очевидна

Теорема 4.6.1. *1. Отображение $\mathcal{O}p_U$ есть гомоморфизм алгебры $\mathcal{B}or([0\,,\,2\pi])$ в алгебру $\mathcal{L}(H \mapsto H)$, который удовлетворяет условию:*

$$\mathcal{O}p_U(f^*) = \mathcal{O}p_U(f)^*, \tag{4.171}$$

где f^* -функция, комплексно сопряженная функции f, $\mathcal{O}p(f)^*$ -оператор, гильбертово сопряженный оператору $\mathcal{O}p(f)$.

2. Отображение $\mathcal{O}p_U$ переводит неотрицательные функции в неотрицательные операторы.

Определение 4.6.5. Пусть $E_{un}(\theta\,,\,U)$ -образ характеристической функции отрезка $[0\,,\,\theta]$ при отображении $\mathcal{O}p_U$:

$$E_{un}(\theta\,,\,U) = \mathcal{O}p_U(\mathbb{I}([0\,,\,\theta] \mid \cdot)), \tag{4.172}$$

что эквивалентно равенству

$$\forall\phi \in H\ :\ <\phi\,,\,E_{un}(\theta\,,\,U)\phi> = \int_0^{2\pi} \mathbb{I}([0\,,\,\theta] \mid x)\mu(\phi \mid dx). \tag{4.173}$$

Справедлива

Теорема 4.6.2. *Каждому унитарному оператору $U \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$ согласно определению 4.6.4 соответствует функция $E_{un}(\theta\,,\,U)$, которая обладает следующими свойствами.*

1. Для любого $\theta \in [0\,,\,2\pi]$ оператор $E_{un}(\theta\,,\,U)$ -самосопряженный проектор:

$$\forall(\theta \in [0\,,\,2\pi]) : E_{un}(\theta\,,\,U)^2 = E_{un}(\theta\,,\,U). \tag{4.174}$$

2. Операторная функция $\theta \mapsto E_{un}(\theta\,,\,U)$ монотонно неубывает:

$$(\theta_2 \geq \theta_1) \Rightarrow (E(U\,,\,\theta_2) \geq E(U\,,\,\theta))$$

и в каждой точке θ непрерывна справа в том смысле, что

$$\forall(\phi \in H\,,\,\theta \in [0\ 2\pi)) :$$
$$<\phi\,,\,E_{un}(\theta + 0\,,\,U)\phi> = <\phi\,,\,E_{un}(\theta\,,\,U)\phi>\ ,\ E_{un}(2\pi\,,\,U) = \mathsf{id}.$$

3. Справедливо равенство

$$\forall(\theta_1\,,\,\theta_2\in[0\,,\,2\pi]):E_{un}(\theta\,,\,U)E_{un}(\theta\,,\,U)=E_{un}(\min(\theta_1\,,\,\theta_2)\,,\,U). \quad (4.175)$$

4. Если

$$(\theta_1\,,\,\theta_2]\bigcap(\theta_3\,,\,\theta_4]=\emptyset$$

то

$$(E_{un}(\theta_2\,,\,U)-E_{un}(\theta_1\,,\,U))\cdot(E_{un}(\theta_4\,,\,U)-E_{un}(\theta_3\,,\,U))=0.$$

5. Если $f(\exp(i\theta))\in C([0\,,\,2\pi])$, то справедливо равенство

$$\forall(\phi\in H):\ <\phi\,,\,f(U)\phi>=\int_0^{2\pi}f(\exp(i\theta))d_\theta<\phi\,,\,E_{un}(\theta\,,\,U)\phi>, \quad (4.176)$$

где интеграл понимается как интеграл Лебега-Стильтьеса по мере $\mu(\phi\mid d\theta)$.

Доказательство теоремы 4.6.2 дословно повторяет доказательство теоремы 4.5.2.

4.7 Гильбертово сопряжение неограниченных операторов.

Мы будем рассматривать только такие линейные операторы, которые имеют плотную в H область определения. Пусть $\mathbf{Dom}(A)$ плотное в гильбертовом пространстве H линейное многообразие:

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Dom}(A))=H, \quad (4.177)$$

и пусть

$$A:\mathbf{Dom}(A)\mapsto H$$

-линейное отображение многообразия $\mathbf{Dom}(A)$ в гильбертово пространство H.

Типичный пример: пусть $H=L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)$, $\mathcal{P}(x)$ -полином с действительными коэффициентами и

$$\forall(f\in C_0(\mathbb{R}^1)\subset H):Af(x)=\mathcal{P}(x)f(x).$$

Определение 4.7.1. Элемент $y\in\mathbf{Dom}(A^*)$, если заданный на плотном в H линейном многообразии $\mathbf{Dom}(A)$ линейный функционал

$$\mathbf{Dom}(A)\ni x\mapsto<y\,,\,Ax> \quad (4.178)$$

продолжается по непрерывности на все пространство H, и в этом случае мы полагаем

$$A^*y = z,$$

где z -тот элемент, который по теореме Рисса (см. 280) задает функционал (4.178):

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : \ < z \, , \, x > = < A^*y \, , \, x > = < y \, , \, Ax > . \tag{4.179}$$

Описанный этим определением оператор A^* называется оператором, гильбертово сопряженным оператору A.

Если оператор A ограничен, то это определение совпадает с ранее данным определением гильбертово сопряженного оператора.

Если оператор ограничен, то область определения сопряженного оператора есть все пространство. Если оператор неограничен, то может случиться так, что область определения сопряженного оператора состоит лишь из нуля. Приведем соответствующий пример. Пусть $H = L^2(\mathbb{R}^1 \, , \, dx)$, $\{e_n(x)\}$ -полная ортонормированная система в $L^2(\mathbb{R}^1 \, , \, dx)$,

$$\mathbf{Dom}(A) = C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \ , \ \forall (f \in \mathbf{Dom}(A)) : Af(x) = \sum_{1 \le n < \infty} f(n) e_n(x). \tag{4.180}$$

Функционал

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \ni f \mapsto < g \, , \, Af > = \sum_{1 \le n < \infty} f(n) < g \, , \, e_n >$$

продолжается до линейного непрерывного функционала на $L^2(\mathbb{R}^1 \, , \, dx)$ только в том случае, если

$$\forall n : \ < g \, , \, e_n > = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{Dom}(A^*) = 0$.

Отмтим, что оператор (4.180) есть пример оператора, не имеющего замыкания: замыкание графика оператора (4.180) есть пространство $L^2(\mathbb{R}^1 \, , \, dx) \oplus L^2(\mathbb{R}^1 \, , \, dx)$, которое не есть график оператора.

Можно дать эквивалентное определение гильбертово сопряженного оператора.

В прямой сумме гильбертовых пространств $H \oplus H$ определим оператор

$$V : H \oplus H \mapsto H \oplus H \ , \ V(f \oplus g) = (-g) \oplus f. \tag{4.181}$$

Оператор V унитарен и удовлетворяет равенству

$$V^2 = -\mathsf{id}.$$

Теорема 4.7.1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{Gr}(A^*) = (V\mathbf{Gr}(A))^{\perp}. \qquad (4.182)$$

Доказательство. Мы имеем:

$$\mathbf{Gr}(A) = \{x \oplus Ax \mid x \in \mathbf{Dom}(A)\},$$
$$V(\mathbf{Gr}(A)) = \{(-Ax) \oplus x \mid x \in \mathbf{Dom}(A)\},$$
$$(V(\mathbf{Gr}(A)))^{\perp} = \{y \oplus z \mid (y\,,\,Ax) = (z\,,\,x)\,,\,x \in \mathbf{Dom}(A)\}, \qquad (4.183)$$
$$(V(\mathbf{Gr}(A)))^{\perp} \bigcap (0 \oplus H) = \{0 \oplus z \mid (z\,,\,x) = 0\,,\,x \in \mathbf{Dom}(A)\} \qquad (4.184)$$

Так как множество $\mathbf{Dom}(A)$ плотно в H, то из (4.184) следует, что

$$(V(\mathbf{Gr}(A)))^{\perp} \bigcap (0 \oplus H) = 0,$$

поэтому множество $(V(\mathbf{Gr}(A)))^{\perp}$ есть график оператора, из (4.183) следует, что это график оператора A^*.

Равенство (4.182) может служить определением гильбертово сопряженного оператора. Так как ортогональное дополнение к любому множеству замкнуто, то из теоремы 4.7.1 вытекает

Следствие 4.7.1. *Гильбертово сопряженный оператор A^* замкнут. Если оператор A замкнут, то справедливо равенство*

$$H = V(\mathbf{Gr}(A)) \oplus \mathbf{Gr}(A^*). \qquad (4.185)$$

Из теоремы о замкнутом графике и замкнутости оператора A^* следует теорема Хеллингера-Теплица.

Теорема 4.7.2. *Если оператор A определен во всем пространстве:* $\mathbf{Dom}(A) = H$ *и самосопряжен: $A = A^*$, то оператор A ограничен: $A \in \mathcal{L}(H \mapsto H)$.*

Напомним, что замкнутый оператор -это такой оператор, *график* которого замкнут. Из замкнутости оператора *не* следует ни замкнутость его области определения, ни замкнутость его области значений. Напомним, что замыкание оператора A существует только в том случае, если

$$(\mathbf{Cl}(\mathbf{Gr}(A))) \bigcap (0 \oplus H) = 0.$$

Лемма 4.7.1. *Если замыкание оператора A существует, то*

$$(\mathbf{Cl}(A))^* = A^*.$$

Доказательство. Справедливы равенства

$$\mathbf{Gr}(\mathbf{Cl}(A))^*) = (V(\mathbf{Gr}(\mathbf{Cl}(A))))^{\perp} =$$
$$(V(\mathbf{Cl}(\mathbf{Gr}(A))))^{\perp} = (\mathbf{Cl}(V((\mathbf{Gr}(A))))^{\perp} =$$
$$(V(\mathbf{Gr}(A)))^{\perp} = \mathbf{Gr}(A^*).$$

Лемма доказана.

Определение 4.7.2. Оператор B есть расширение оператора A (или оператор A есть часть оператора B), если

$$\mathbf{Gr}(A) \subset \mathbf{Gr}(B), \tag{4.186}$$

что означает:

$$\mathbf{Dom}(A) \subset \mathbf{Dom}(B)\ ,\ \forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : Ax = Bx.$$

Соотношение (4.186) записывается так:

$$A \subset B.$$

Лемма 4.7.2. *Если*

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Dom}(A^*)) = H,$$

то

$$A \subset (A^*)^*.$$

Доказательство. В силу условия леммы оператор $(A^*)^*$ существует. Имеем:

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)\,,\, y \in \mathbf{Dom}(A^*)) :\ < x\,,\, A^*y > = < A^*y\,,\, x >^*$$
$$= < y\,,\, Ax >^* = < Ax\,,\, y > = < (A^*)^*x\,,\, y > .$$

Следовательно,

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)) : Ax = (A^*)^*x.$$

Лемма доказана.

Определение 4.7.3. Оператор A симметричен, если

$$A \subset A^*, \tag{4.187}$$

что означает:

$$\forall(x\,,\, y \in \mathbf{Dom}(A)) :\ < x\,,\, Ay > = < Ax\,,\, y > .$$

Определение 4.7.4. Оператор A самосопряжен, если

$$A = A^*. \tag{4.188}$$

Напомним, что оператор $U \in \mathcal{L}(H_1 \mapsto H_2)$ называется унитарным, если он обратим и

$$\forall (x \in H_1\,,\, y \in H_1):\ < Ux\,,\, Uy >_2 = < x\,,\, y >_1 .$$

Определение 4.7.5. Оператор

$$A_2 : H_2 \supset \mathbf{Dom}(A_2) \ni x \mapsto A_2 x \in H_2$$

унитарно эквивалентен оператору A_1:

$$A_1 : H_1 \supset \mathbf{Dom}(A_1) \ni x \mapsto A_1 x \in H_1$$

если

$$\mathbf{Dom}(A_2) = U(\mathbf{Dom}(A_1))\,,\ \forall (x \in \mathbf{Dom}(A_2)) : A_2 x = U A_1 U^{-1} x,$$

где $U \in \mathcal{L}(H_1 \mapsto H_2)$ -унитарный оператор.

Лемма 4.7.3. *Если оператор A_1 самосопряжен и оператор A_2 унитарно эквивалентен оператору A_1, то оператор A_2 самосопряжен.*

Доказательство. Имеем:

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A_2)\,,\, y \in \mathbf{Dom}(A_2)):\ < x\,,\, A_2 y >_2 = < x\,,\, U A_1 U^{-1} y >_2 =$$
$$< U^{-1} x\,,\, A_1 U^{-1} y >_1 = < A_1 U^{-1} x\,,\, U^{-1} y >_1 = < A_2 x\,,\, y >_2 .$$

Это равенство доказывает, что оператор A_2 симметричен на своей области определения. Из этой же выкладки и самосопряженности оператора A_1 следует, что функционал

$$y \mapsto < x\,,\, A_2 y >$$

продолжается до непрерывного функционала в том и только том случае, если

$$U^{-1} x \in \mathbf{Dom}(A_1),$$

т.е.

$$x \in U(\mathbf{Dom}(A_1)) = \mathbf{Dom}(A_2),$$

а это и означает, что оператор A_2 самосопряжен.

Лемма 4.7.4. *Если*

$$A \subset B,$$

то

$$B^* \subset A^*.$$

Доказательство. Пусть

$$x \in \mathbf{Dom}(B^*)\ ,\ y \in \mathbf{Dom}(A).$$

Тогда

$$< x\,,\, Ay >=< x\,,\, By >=< B^*x\,,\, y > .$$

Следовательно,

$$x \in \mathbf{Dom}(A^*)\ ,\ B^*x = A^*x.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.7.5. *Если*

$$A = A^*\ ,\ A \subset B\ ,\ B \subset B^*,$$

то

$$A = B.$$

Доказательство. Имеем:

$$A \subset B\ , \text{поэтому}\ B^* \subset A^* = A \subset B.$$

Следовательно,

$$B^* = B = A.$$

Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что если оператор A самосопряжен, то любое его симметричное расширение совпадает с ним, т.е. среди симметричных операторов самосопряженный оператор есть симметричный оператор с максимальной областью определения.

Напомним, что линейный оператор A^{-1} определен в том и только в том случае, если $\mathbf{Ker}(A) = 0$, и в этом случае по определению оператор A^{-1} есть оператор с графиком

$$\mathbf{Gr}(A^{-1}) = \{Ax \oplus x \mid x \in \mathbf{Dom}(A)\}.$$

Лемма 4.7.6. *Если*

$$\mathbf{Ker}(A) = 0\ ,\ \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)) = H,$$

то

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Доказательство. Из первого условия леммы следует, что оператор A^{-1} существует, из второго условия леммы следует, что оператор $(A^{-1})^*$ существует. Далее имеем:

$$\mathbf{Gr}(A^{-1}) = \{Ax \oplus x \mid x \in \mathbf{Dom}(A)\},$$
$$V(\mathbf{Gr}(A^{-1})) = \{(-x) \oplus Ax \mid x \in \mathbf{Dom}(A)\},$$
$$V(\mathbf{Gr}(A^{-1}))^{\perp} =$$
$$\{y \oplus z \mid - < y\,,\, x > + < z\,,\, Ax >= 0\ ,\ x \in \mathbf{Dom}(A)\},$$
$$V(\mathbf{Gr}(A^{-1}))^{\perp} = \{A^*z \oplus z \mid z \in \mathbf{Dom}(A^*)\}.$$

Сравнивая поседнее равенство с (4.182) мы получаем:

$$\mathbf{Gr}((A^*)^{-1}) = \mathbf{Gr}((A^{-1})^*)).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.7.7. *Если*

$$A = A^*\ ,\ \mathbf{Ker}(A) = 0,$$

то

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)) = H.$$

Доказательство. Пусть

$$y \perp \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)).$$

Тогда

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) :\ < y\,,\, Ax >= 0.$$

Следовательно,

$$y \in \mathbf{Dom}(A^*)\,,\ A^*y = Ay = 0\,,\ y \in \mathbf{Ker}(A).$$

Из второго условия леммы следует, что

$$y = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.7.8. *Если оператор A самосопряжен:*

$$A = A^*$$

и оператор A^{-1} существует, то оператор A^{-1} самосопряжен:

$$(A^{-1})^* = A^{-1}.$$

Доказательство. Имеем:

$$
\begin{array}{ll}
a. & (\exists A^{-1}) \Rightarrow (\mathbf{Ker}(A) = 0), \\
b. & ((A = A^*) \wedge (\mathbf{Ker}(A) = 0)) \Rightarrow (\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)) = H), \\
c. & ((\mathbf{Ker}(A) = 0) \wedge (\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)) = H)) \Rightarrow ((A^{-1})^* = (A^*)^{-1}), \\
d. & ((A^{-1})^* = (A^*)^{-1}) \wedge (A = A^*)) \Rightarrow ((A^{-1})^* = (A^{-1})).
\end{array}
$$

Здесь:
a -необходимое условие существования обратного оператора,
b -утверждение леммы 4.7.7,
c -утверждение леммы 4.7.6,
d -очевидно.
Лемма доказана.

Лемма 4.7.9. *Если*

$$A \subset A^* \; , \; \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A)) = H,$$

то

$$\mathbf{Ker}(A) = 0.$$

Доказательство. Пусть

$$y \in \mathbf{Ker}(A).$$

Тогда из первого условия леммы следует, что

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : \; < x \, , \, Ay >=< Ax \, , \, y >= 0.$$

Поэтому

$$y \perp \mathbf{Im}(A).$$

Из второго условия леммы следует, что

$$y = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.7.10. *Если*

$$A \subset A^* \; , \; \mathbf{Im}(A) = H,$$

то

$$A = A^* \; , \; A^{-1} \in \mathcal{L}(H \mapsto H).$$

Доказательство. Из леммы 4.7.9 следует, что $\mathbf{Ker}(A) = 0$, поэтому оператор A^{-1} существует. Докажем, что оператор A^{-1} симметричен. Пусть x, y -произвольные элементы из $\mathbf{Dom}(A^{-1}) = H$. Тогда существуют такие элементы w, z, что $x = Aw$, $y = Az$. Поэтому

$$< x\,,\, A^{-1}y >=< Aw\,,\, z >=< w\,,\, Az >=< A^{-1}x\,,\, y > .$$

Так как оператор A^{-1} симметричен и область его определения есть все пространство, то оператор A^{-1} самосопряжен и поэтому замкнут. По теореме о замкнутом графике (см. 169) оператор A^{-1} ограничен. Далее имеем:

$$A^* = ((A^{-1})^{-1})^* = ((A^{-1})^*)^{-1} = ((A^{-1})^{-1} = A.$$

Лемма доказана.

Лемма 4.7.11. *Если оператор A симметричен, то*

$$\mathbf{Ker}(A \pm i\mathsf{id}) = 0.$$

Доказательство. Если оператор A симметричен, то справедливо равенство

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : \|(A \pm i\mathsf{id})x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2, \qquad (4.189)$$

откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 4.7.12. $\mathbf{Ker}(A^* \pm i\mathsf{id}) = 0$ *в том и только том случае, если* $\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A \mp i\mathsf{id})) = H$.

Доказательство. Доказательство проведем для знака $+$. Пусть

$$y \perp \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A - i\mathsf{id})).$$

Тогда

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : \; < y\,,\, (A - i\mathsf{id})x >= 0.$$

Следовательно,

$$y \in \mathbf{Dom}(A^* + i\mathsf{id})\,,\, (A^* + i\mathsf{id})y = 0\,,\, y \in \mathbf{Ker}(A^* + i\mathsf{id}).$$

Поэтому из условия

$$\mathbf{Ker}(A^* + i\mathsf{id}) = 0$$

следует равенство

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A - i\mathsf{id})) = H.$$

Пусть
$$y \in \mathbf{Ker}(A^* + i\mathsf{id})\,,\; y \neq 0.$$
Тогда
$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : \; < (A^* + i\mathsf{id})y\,,\, x >=< y\,,\, (A - i\mathsf{id})x >= 0,$$
и
$$y \perp \mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A - i\mathsf{id})).$$
Следовательно,
$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A - i\mathsf{id})) \neq H.$$
Лемма доказана.

Лемма 4.7.13. *Если оператор A симметричен и замкнут, то множества* $\mathbf{Im}(A \pm i\mathsf{id})$ *замкнуты. Если оператор A симметричен и хотя бы одно из множеств* $\mathbf{Im}(A \pm i\mathsf{id})$ *замкнуто, то оператор A замкнут.*

Доказательство. Проведем доказательство для знака $+$. Определим оператор
$$T : \mathbf{Gr}(A) \mapsto \mathbf{Im}(A + i\mathsf{id})\;,\; T(x \oplus Ax) = (A + i\mathsf{id})x.$$
Ясно, что
$$\mathbf{Im}(T) = \mathbf{Im}(A + i\mathsf{id}).$$
Из (4.189) следует, что $\mathbf{Ker}(T) = 0$, поэтому оператор T^{-1} существует. Из (4.189) следует, что оператор T изометричен, поэтому множества $\mathbf{Gr}(A)$, $\mathbf{Im}(A + i\mathsf{id})$ замкнуты или нет одновременно. Рассуждения для знака $-$ аналогичны. Лемма доказана.

Следующая теорема иногда называется основным критерием самосопряженности.

Теорема 4.7.3. *Пусть оператор A имеет плотную область определения и симметричен:*
$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Dom}(A)) = H\;,\; A \subset A^*.$$
Тогда

1. Если оператор A самосопряжен:
$$A = A^*,$$
то оператор A замкнут и выполнены условия
$$\mathbf{Ker}(A^* \pm i\mathsf{id}) = 0. \tag{4.190}$$

2. Если оператор A замкнут и справедливы равенства (4.190), *то справедливы равенства*

$$\mathbf{Im}(A \pm i\mathsf{id}) = H \tag{4.191}$$

и резольвенты $R(\pm i\,,\,A)$ существуют.

3. Если $\mathbf{Im}(A \pm i\mathsf{id}) = H$, то оператор A самосопряжен.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$. Самосопряженный оператор замкнут, а равенство (4.190) есть следствие равенства (4.189).

$2 \Rightarrow 3$. Из леммы 4.7.12 следует, что

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A \pm i\mathsf{id})) = H.$$

Замкнутость оператора A означает замкнутость множества $\mathbf{Gr}(A)$, поэтому множество $\mathbf{Im}(A \pm i\mathsf{id})$ замкнуто на основе леммы 4.7.13 и

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(A \pm i\mathsf{id})) = \mathbf{Im}(A \pm i\mathsf{id}) = H.$$

Так как

$$\mathbf{Ker}(A \pm i\mathsf{id}) = 0,$$

то множество

$$\{(A \pm i\mathsf{id})x \oplus x \mid x \in \mathbf{Dom}(A)\}$$

есть график оператора, что эквивалентно существованию резольвент.

$3 \Rightarrow 1$. Проведем рассуждения для знака $+$. Пусть

$$x \in \mathbf{Dom}(A^*).$$

Тогда из условия (4.191) следует, что

$$\exists (y \in \mathbf{Dom}(A) \subset \mathbf{Dom}A^*) : (A + i\mathsf{id})y = (A^* + i\mathsf{id})x$$

Поэтому

$$(A^* + i\mathsf{id})(x - y) = 0.$$

Согласно лемме 4.7.12 из условия $\mathbf{Im}(A - i\mathsf{id}) = H$ следует,что $\mathbf{Ker}(A^* + i\mathsf{id}) = 0$.

Следовательно,

$$(x - y = 0) \Rightarrow (x \in \mathbf{Dom}(A)) \Rightarrow (\mathbf{Dom}(A^*) = \mathbf{Dom}(A)).$$

Теорема доказана.

Замечание 4.7.1. Так как $mathbf Ker(A \pm i\mathsf{id}) = 0$, то условие 3 эвивалентно существованию операторов $(A \pm i\mathsf{id})^{-1}$, область опрделения которых удовлетворяет условию: $\mathbf{Dom}(A \pm i\mathsf{id})^{-1} = H.$. Для проверки условия 3 достаточно доказать, что

$$\forall (x \in H)\,,\, \exists (y_{\pm} \in \mathbf{Dom}(A))\, : (A \pm i\mathsf{id}) y_{\pm} = x.$$

Пусть

$$\lambda = a + ib\,,\, b \neq 0.$$

Тогда

$$(\lambda \mathsf{id} - A) = b(i\mathsf{id} - (-a\mathsf{id} + A)/b)$$

Оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда оператор $(-a\mathsf{id} + A)/b$ самосопряжен. Поэтому из теоремы 4.7.3 вытекает

Следствие 4.7.2. *Спектр любого сомосопряженного оператора лежит на действительной оси.*

Пусть A -самосопряженный оператор, B симметричный оператор и $\mathbf{Dom}(B) \supset \mathbf{Dom}(A)$.

Определение 4.7.6. Оператор B называется A-ограниченным (или ограниченным оператором A), если

$$\exists (a\,,\, b)\,,\, \forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : \|Bx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\|. \tag{4.192}$$

Входящая в (4.192) константа b называется верхней A-гранью оператора B (или верхней гранью оператора B по отношению оператора A). Отметим, что точной нижней грани всех верхних A-граней может и не существовать (число a в оценке (4.192) может стремиться к $+\infty$ при уменьшении b).

Следующая теорема называется теоремой Като-Реллиха (или Реллиха-Като)

Теорема 4.7.4. *Если оператор A самосопряжен, оператор B симметричен, $\mathbf{Dom}(B) \supset \mathbf{Dom}(A)$ и оператор B A-ограниченн с A-гранью $b < 1$, то оператор $A + B$ с областью определения $\mathbf{Dom}(A)$ самосопряжен.*

Доказательство. Так как

$$\forall \epsilon : \; 2ab \leq (a/\epsilon)^2 + (b\epsilon)^2,$$

то из (4.192) следует неравенство

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)): \ \|Bx\|^2 \leq (a^2 + \epsilon^{-2})\|x\|^2 + (b^2 + \epsilon^2)\|Ax\|^2 =$$
$$(b^2 + \epsilon^2)\|(-i((a^2 + \epsilon^{-2})/(b^2 + \epsilon^2) - A)x\|^2. \tag{4.193}$$

Выберем ϵ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\gamma^2 := b^2 + \epsilon^2 < 1.$$

Положим

$$\alpha = (a^2 + \epsilon^{-2})/(b^2 + \epsilon^2).$$

Для доказательства самосопряженности оператора $A+B$ нам достаточно доказать, что

$$\mathbf{Im}(A + V + i\alpha\mathsf{id}) = H,$$
$$R(-i\alpha\,,\,A + B) \in \mathcal{L}(H \mapsto H).$$

Пусть

$$x \in \mathbf{Dom}(A)\,,\ (A + B + i\alpha\mathsf{id})x = y. \tag{4.194}$$

Так как оператор A самосопряжен, оператор $R(-i\alpha\,,\,A)$ существует и

$$R(-i\alpha\,,\,A) \in \mathcal{L}(H \mapsto H)\,,\ \mathbf{Im}(R(-i\alpha\,,\,A)) \subset \mathbf{Dom}(A).$$

Заменив в (4.194)

$$x \to (A + i\alpha\mathsf{id})x,$$

мы получим:

$$(\mathsf{id} - BR(-i\alpha\,,\,A))(A + i\alpha\mathsf{id})x = y. \tag{4.195}$$

Сделав замену

$$x \mapsto -R(-i\alpha\,,\,A)x \tag{4.196}$$

в (4.193), мы получим:

$$\forall x: \|BR(-i\alpha\,,\,A)x\| \leq \gamma\|x\|.$$

Следовательно,

$$\|BR(-i\alpha\,,\,A)\| \leq \gamma < 1, \tag{4.197}$$

и

$$(\mathsf{id} - BR(-i\alpha\,,\,A))^{-1} \in \mathcal{L}(H \mapsto H),$$
$$\mathbf{Im}(\mathsf{id} - BR(-i\alpha\,,\,A))^{-1} = H.$$

Теперь из (4.195) следует, что в равенстве (4.194):

$$\forall (y \in H): \\ x = -R(-i\alpha\,,\,A)(\mathsf{id} - BR(-i\alpha\,,\,A))^{-1}y \in \mathbf{Dom}(A).$$

В силу предыдущей теоремы отсюда следует, что оператор $A + B$ самосопряжен. Теорема доказана.

Рассмотрим примеры.

Пример 4.7.1. Пусть $H = L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$. На плотной в $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$ области

$$\mathbf{Dom}(A) = \{f \mid f \in L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)\,,\,\int |x|^4 |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

рассмотрим оператор

$$Af(x) = x^2 f(x).$$

Этот оператор симметричен на своей области определения. Область определения сопряженного оператора A^* состоит из тех элементов $g \in H$, для которых функционал

$$\mathbf{Dom}(A) \ni f \mapsto < g\,,\,Af >= \int g^*(x)|x|^2 f(x) dx$$

продолжается до линейного непрерывного функционала на всем пространстве H. Это функционал непрерывен в том и только том случае, если он ограничен, т. е. если

$$\sup\{| < g\,,\,Af > | \mid \|f\| \leq 1\} = \sup\{| \int g^*(x)|x|^2 f(x) dx| \mid \|f\| \leq 1\} = \\ \left(\int |x|^4 |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Отсюда следует, что область определения сопряженного оператора A^* совпадает с областью определения оператора A и поэтому оператор A самосопряжен.

Пример 4.7.2. Пусть $H = L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$. На пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор

$$A: \ S(\mathbb{R}^d) \ni f(x) \mapsto Af(x) = -\Delta f(x),$$

где Δ -оператор Лапласа. Найдем замыкание оператора A. Пусть $\{f_n\} \in S(\mathbb{R}^d)$ и в метрике $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$

$$f_n \to f_0 \in H\,,\,Af_n \to g \in H\,,\,n \to \infty.$$

Переходя к преобразованиям Фурье, находим:

$$\widehat{f}_n(\xi) \to \widehat{f}_0(\xi)\,,\ |\xi|^2 \widehat{f}_n(\xi) \to \widehat{g}(\xi)\,,\ n \to \infty.$$

(Сходимость в метрике $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,d\xi)$). Следовательно,

$$\widehat{g}(\xi) = |\xi|^2 \widehat{f}_0(\xi)\,,\ \int |\xi|^4 |\widehat{f}_0(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Отсюда вытекает, что область определения замыкания оператора $-\Delta$ состоит из функций, принадлежащих пространству Соболева $H^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathbf{Dom}(\mathbf{Cl}(-\Delta)) = H^2(\mathbb{R}^2),$$

и на этой области определения замыкание оператора $-\Delta$ вычисляется по формуле

$$-\Delta f(x) \overset{\text{def}}{=} (2\pi)^{-d} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|\xi|<R} \exp(i(x\,,\,\xi))|\xi|^2 \widehat{f}(\xi) d\xi\,,\ f \in H^2(\mathbb{R}^2). \quad (4.198)$$

Определенный формулой (4.198) оператор самосопряжен, так как он унитарно эквивалентен оператору умножения на $|\xi|^2$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,d\xi)$.

Если замыкание оператора есть самосопряженный оператор, то иногда говорят, что оператор самосопряжен в сущестенном (на своей первоначальной области определения). Мы доказали, что оператор Лапласа самосопряжен в существенном на пространстве Шварца.

Пример 4.7.3. Пусть $H = L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$. На пространстве $H^2(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$ рассмотрим оператор

$$B : Bf(x) = l \cdot Df(x) + q(x)f(x), \quad (4.199)$$

где $l \in \mathbb{R}^d$, производная понимается в обобщенном смысле (см.стр. 453),$q(x)$ ограниченная измеримая функция. Докажем, что оператор B ограничен оператором $-\Delta$ со сколь угодно малой верхней гранью.

Пусть

$$\forall x : |q(x)| \le q_\infty.$$

Тогда

$$\|Bf\| \le |l| \||Df|\| + q_\infty \|f\|.$$

Далее имеем:

$$\||Df|\|^2 \le (2\pi)^{-d} \int |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \le$$

$$(2\pi)^{-d} \int (\epsilon^{-2} + \epsilon^2 |\xi|^4) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$\epsilon^{-2}\|f\|^2 + \epsilon^2 \|\Delta f\|^2,$$

поэтому
$$\||Df|\| \le \epsilon^{-1}\|f\| + \epsilon\|\Delta f\|.$$
Следовательно,
$$\forall(\epsilon > 0) : \|Bf\| \le (|q_\infty + \epsilon^{-1}|l|)\|f\| + \epsilon|l|\|\Delta f\|.$$
Мы доказали, что оператор B ограничен оператором $-\Delta$ со сколь угодно малой верхней гранью.

Из теоремы Като-Реллиха следует, что при сформулированных нами условиях оператор Шредингера
$$H^2(\mathbb{R}^d) \ni f \mapsto -\Delta f + l \cdot Df(x) + q(x)f(x)$$
самосопряжен в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$

Из теоремы 4.7.3 и теоремы Хилле-Филлипса-Иосиды (см. 249) вытекает теорема Стоуна .

Теорема 4.7.5. *1. Если*
$$t \mapsto T(t)$$
-полугруппа класса C_0 в гильбертовом пространстве и при всех $t > 0$ операторы $T(t)$ самосопряжены, то инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$ самосопряжен.

2. Если
$$t \mapsto U(t)$$
-полугруппа класса C_0, при всех $t \in \mathbb{R}^1$ операторы $U(t)$ унитарны и A -инфинитезимальный оператор полугруппы $U(t)$, то оператор $-iA$ -самосопряжен.

Доказательство. Если операторы $T(t)$ самосопряжены, то инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$ симметричен. В силу теоремы Хилле-Филлипса-Иосиды он замкнут, имеет плотную область определения и его резольвента определена при $Re\,\lambda \gg 1$. Следовательно, условие 3 теоремы 4.7.3 выполнено. Если полугруппа состоит из унитарных операторов, то ее инфинитезимальный оператор очевидно кососимметичен. Остальные рассуждения аналогичны и их проведение предоставляется читателю в качестве упражнения (следует воспользоваться спектральной теоремой для унитарных операторов).

Теорема доказана.

4.8 Оснащение гильбертова пространства и билинейные формы.

4.8.1 Оснащение гильбертова пространства.

Пусть H гильбертово простансво со скалярным произведением $< \, , \, >$ и нормой

$$\|f\|^2 =< f \, , \, f > .$$

Пусть $H_+ \subset H$ -линейное многообразие в H, которое удовлетворяет условиям:

1. H_+ плотно в H по метрике H:

$$H_+ \subset H \; , \; \mathbf{Cl}(H_+) = H.$$

(Замыкание берется по метрике пространства H).

2. H_+ есть гильбертово пространство со скалярным произведением $[\, , \,]_+$ и нормой

$$\forall (f \in H_+) : \; \|f\|_+^2 = [f \, , \, f]_+.$$

3. Выполнено неравенство

$$\forall (f \in H_+) : \; \|f\|_+ \geq \|f\|.$$

Приведем пример.

Пусть

$$H = L^2(\mathbb{R}^1 \, , \, dx) \, , \, H_+ = \{f \mid \int |f(x)|^2(1+x^2)dx < \infty\},$$
$$\forall (f \in H_+ \, , \, g \in H_+) : \; [f \, , \, g]_+ = \int f^*(x)g(x)(1+x^2)dx.$$

Нетрудно проверить, что в этом примере выполнены все сделанные выше предположения.

Для любого $g \in H$ на пространстве H_+ определен линейный функционал:

$$H_+ \ni f \mapsto < g \, , \, f > . \tag{4.200}$$

Заданный на пространстве H_+ формулой (4.200) функционал непрерывен в метрике пространства H_+, так как

$$| < g \, , \, f > | \leq \|g\| \cdot \|f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|_+.$$

Следовательно, по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве в пространстве H_+ существует такой вектор Jg, что

$$\forall(g \in H\,,\ f \in H_+):\ [Jg\,,\ f]_+ \stackrel{\text{def}}{=} < g\,,\ f > . \tag{4.201}$$

Формула (4.201) определяет линейный оператор

$$J:\ H \mapsto H_+ \subset H.$$

Для рассматриваемого нами примера равенство (4.201) принимает вид:

$$\int Jg^*(x)f(x)(1+x^2)dx = \int g^*(x)f(x)dx,$$

поэтому в рассматриваемом нами примере

$$Jg(x) = (1+x^2)^{-1}g(x).$$

Изучим свойства определенного формулой (4.201) оператора J.

Лемма 4.8.1. *Справедливы неравенства*

$$\|J \mid \mathcal{L}(H \to H_+)\| \leq 1. \tag{4.202}$$

$$\|J \mid \mathcal{L}(H \to H)\| \leq 1. \tag{4.203}$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall(g \in H):\ \|Jg \mid \|_+ = \sup\{|[Jg\,,\ f]_+| \mid \|f\|_+ \leq 1\} =$$
$$\sup\{| < g\,,\ f > | \mid \|f\|_+ \leq 1\} \leq \sup\{| < g\,,\ f > | \mid \|f\| \leq 1\} = \|g\|.$$

Первое неравенство доказано. Второе есть очевидное следствие первого.

Лемма 4.8.2. *Оператор J удовлетворяет соотношениям:*

$$\mathbf{Ker}(J) = 0. \tag{4.204}$$

$$\mathbf{Cl}(\mathbf{Im}(J)) = H_+. \tag{4.205}$$

Замыкание в (4.205) *берется в метрике пространства H_+.*

Доказательство. Если $f \in \mathbf{Ker}(J)$, то

$$\forall(g \in H_+) : [Jf\,,\ g]_+ = < f\,,\ g >= 0.$$

Так как H_+ плотно в H, то отсюда следует, что $f = 0$.

Если $g \in H_+\,,\ g \perp \mathbf{Im}(J)$, то

$$(\forall(f \in H) : [Jf\,,\ g]_+ = < f\,,\ g >= 0) \Rightarrow (g = 0).$$

Лемма доказана. Из леммы 4.8.2 вытекает

Следствие 4.8.1. *Оператор J^{-1} определен на плотном в пространстве H множестве*
$$\mathbf{Im}(J) \subset H_+ \subset H.$$

Лемма 4.8.3. *Оператор J^{-1} симметричен на пространсве $\mathbf{Im}(J)$ относительно скалярного произведения $< \, , \, >$.*

Доказательство. Имеем:

$$\forall (f \in \mathbf{Im}(J) \, , \, g \in \mathbf{Im}(J)) : \; < J^{-1}f \, , \, g >= [f \, , \, g]_+ =$$
$$[g \, , \, f]_+^* =< J^{-1}g \, , \, f >^* =< f \, , \, J^{-1}g > .$$

Лемма доказана.

Лемма 4.8.4. *Оператор J самосопряжен и неотрицателен на пространстве H.*

Доказательство. Докажем, что оператор J симметричен на пространстве H. Имеем:

$$\forall (f \in \mathbf{Im}(J) \, , \, g \in \mathbf{Im}(J)) : \; < J^{-1}f \, , \, g >=< f \, , \, J^{-1}g > .$$

Заменяя в этом равенстве

$$f \to Jf \, , \, g \to Jg,$$

мы получим:

$$\forall (f \in H \, , \, g \in H) : \; < f \, , \, Jg >=< Jf \, , \, g > .$$

Оператор J определен на всем пространстве H, ограничен и симметричен. Следовательно, он самосопряжен. Неотрицательность оператора J следует из равенства

$$< g \, , \, Jg >= [Jg \, , \, Jg]_+ \geq 0.$$

Из самосопряженности оператора J в силу леммы 4.7.8 вытекает

Следствие 4.8.2. *Оператор J^{-1} с областью определения*

$$\mathbf{Dom}(J^{-1}) = \mathbf{Im}(J) \subset H$$

самосопряжен в пространстве H.

В рассматриваемом нами примере

$$\mathbf{Im}(J) = \{f \mid f(x) = (1+x^2)^{-1}g(x)\,,\ g(x) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\ dx)\} =$$
$$\{f \mid (1+x^2)f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\ dx)\}$$

и

$$J^{-1}f(x) = (1+x^2)f(x).$$

На пространстве H определим скалярное произведение:

$$\forall(f \in H\,,\ g \in H) : [f\,,\ g]_- \stackrel{\text{def}}{=} [Jf\,,\ Jg]_+. \tag{4.206}$$

Это скалярное произведение на пространстве H порождает норму:

$$\|f\|_-^2 = [f\,,\ f]_-. \tag{4.207}$$

Лемма 4.8.5. *Справедливо неравенство*

$$\forall(f \in H) :\ \|f\|_- \leq \|f\|. \tag{4.208}$$

Доказательство. Имеем:

$$\forall(f \in H) :\ \|f\|_-^2 = \|Jf\|_+^2 \leq \|f\|^2.$$

Пусть H_- -гильбертово пространство, полученное пополнением пространства H по норме $\|\ \|_-$ со скалярным произведением $[\,,\,]_-$. По построению пространство H плотно в H_- по норме $\|\ \|_-$.

В рассматриваемом нами примере

$$\|f\|_-^2 = \int (1+x^2)^{-2}|f(x)|^2(1+x^2)dx = \int (1+x^2)^{-1}|f(x)|^2 dx.$$

Теорема 4.8.1. *Определенный равенством* (4.201) *оператор* J *продолжается по непрерывности на пространство* H_- *до оператора*

$$\widetilde{J} \in \mathcal{L}(H_- \mapsto H_+)\,,\ \forall(f \in H) : \widetilde{J}(f) = J(f).$$

Оператор $\widetilde{J}$ *удовлетворяет условиям:*

$$\mathbf{Dom}(\widetilde{J}) = H_-\,,\ \mathbf{Im}(\widetilde{J}) = H_+\,,\ \mathbf{Ker}(\widetilde{J}) = 0\,,\ \|\widetilde{J} \mid \mathcal{L}(H_- \mapsto H_+)\| = 1.$$

Доказательство. По определению, имеем:

$$\forall(f \in H):\ \|f\|_-^2 = \|Jf\|_+^2. \tag{4.209}$$

Так как пространство H плотно в H_-, то существует и единственно такое непрерывное отображение

$$\widetilde{J} \in \mathcal{L}(H_- \mapsto H_+),$$

которое продолжает это равенство на все пространство H_-. Действительно, пусть

$$f \in H_- \,,\ \|f - f_n\|_- \to 0\,,\ n \to \infty\,,\ f_n \in H.$$

Из (4.209) следует, что последовательность Jf_n фундаментальна в пространстве H_+ и мы можем по определению положить

$$\widetilde{J}f := \lim_{n\to\infty} Jf_n.$$

Докажем, что множество $\mathbf{Im}(\widetilde{J})$ замкнуто в H_+. Пусть

$$\widetilde{J}f_n \to g\,,\ n \to \infty.$$

Тогда из (4.209) следует, что последовательность f_n фундаментальна в пространстве H_- и поэтому

$$\exists(f_0 \in H_-):\ f_0 = \lim_{n\to\infty} f_n \text{ и } g = \widetilde{J}(f_0).$$

Если $\mathbf{Im}(\widetilde{J}) \neq H_+$, то существует $g \in H_+\,,\ g \perp \mathbf{Im}(\widetilde{J})$, но тогда

$$\forall(f \in H):\ < f\,,\, g >= [Jf\,,\, g]_+ = 0.$$

Следовательно, $g = 0$ и $\mathbf{Im}(\widetilde{J}) = H_+$. Остальные утверждения леммы тривиальны.

Следствие 4.8.3. *Оператор $\widetilde{J}$ обратим и*

$$\|\widetilde{J}^{-1} \mid \mathcal{L}(H_+ \mapsto H_-)\| = 1.$$

Теорему 4.8.1 можно изложить в немного другой редакции.

Скалярное произведение на пространстве H мы можем рассматривать как билинейную форму, заданную на декартовом произведении $H \times H_+$:

$$H \times H_+ \ni f \times g \to < f\,,\, g > \in \mathbb{C}^1. \tag{4.210}$$

Теорема 4.8.2. *Билинейная форма* (4.210) *продолжается по непрерывности на декартово произведение пространств* $H_- \times H_+$ *и ее продолжение:*

$$[\ ,\ ]_0 : H_- \times H_+ \mapsto \mathbb{C}^1\ ,\ \forall (f \times g \in H \times H_-) : [f\ ,\ g]_0 \stackrel{def}{=} < f\ ,\ g > \tag{4.211}$$

приводит пространства H_- *и* H_+ *в двойственность: любой линейный непрерывный функционал на пространстве* H_+ *может быть представлен в виде:*

$$H_+ \ni g \mapsto [f\ ,\ g]_0\ ,\ f \in H_-, \tag{4.212}$$

и любой линейный непрерывный функционал на пространстве H_- *может быть представлен в виде:*

$$H_- \ni f \mapsto [f\ ,\ g]_0^*\ ,\ g \in H_+. \tag{4.213}$$

Доказательство. Напомним, что декартово произведение пространств $H_- \times H_+$ мы можем рассматривать как метрическое пространство с метрикой

$$d(f \times g\ ,\ f' \times g') = \|f - f'\|_- + \|g - g'\|_+.$$

Имеем:

$$\forall (f \times g \in H \times H_+) :\ | < f\ ,\ g > | = |[Jf\ ,\ g]| \leq \|Jf\|_+ \|g\|_+ = \|f\|_- \|g\|_+. \tag{4.214}$$

Отсюда следует, что билинейная форма (4.210) продолжается по непрерывности на декартово произведение пространств $H_- \times H_+$, так как если последовательность $f_n \times g_n \in H \times H_+$ фундаментальна в метрике пространства $H_- \times H_+$ и

$$f_n \times g_n \to f_0 \times g_0 \in H_- \times H_+\ ,\ n \to \infty,$$

то последовательность $< f_n\ ,\ g_n >$ фундаментальна и отображения

$$H_+ \ni g \mapsto [f\ ,\ g]_0\ ,\ f \in H_-\ ,\ H_- \ni f \mapsto [f\ ,\ g]_0^*\ ,\ g \in H_+$$

задают линейные непрерывные функционалы на соответствующих пространствах. Докажем, что любой линейный непрерывный функционал на пространстве H_+ может быть представлен в виде (4.212). Пусть l -такой функционал. По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве существует такой вектор $g_0 \in H_+$, что

$$\forall (g \in H_+) :\ l(g) = [g_0\ ,\ g]_+.$$

Тогда мы имеем:

$$l(g) = [g_0\,,\, g]_+ = [\widetilde{J}^{-1}g_0\,,\, g]_0.$$

Аналогично доказывается, что любой линейный непрерывный функционал на пространстве H_- может быть представлен в виде (4.213). Теорема доказана.

Пространства H_+, H_- и билинейная форма $[\ ,\ ]_0$ называются оснащением гильбертова пространства H, а само пространство H вместе с пространствами H_+, H_- -оснащенным гильбертовым пространством.

4.8.2 Полуограниченные эрмитовы формы и расширение операторов по Фридрихсу.

Пусть $\mathbf{Dom}(B)$ -плотное в гильбертовом пространстве H линейное многообразие.

Функция

$$B:\ \mathbf{Dom}(B)\times\mathbf{Dom}(B)\ni x\times y\to B(x\,,\,y)\in\mathbb{C}^1$$

называется полуограниченной эрмитовой формой с областью определения $\mathbf{Dom}(B)$, если

1. Функция $B(x\,,\,y)$ линейна по второму агрументу:

$$\forall(x\in\mathbf{Dom}(B)\,,\,y\in\mathbf{Dom}(B)):\ B(x\,,\,\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha B(x\,,\,y_1)+\beta B(x\,,\,y_2).$$

2. Выполнено условие:

$$\forall(x\in\mathbf{Dom}(B)\,,\,y\in\mathbf{Dom}(B)):\ B(x\,,\,y)=B(y\,,\,x)^*.$$

3. Существует такая константа $-\infty<M<\infty$, что

$$\forall(x\in\mathbf{Dom}(B)):\text{либо } B(x\,,\,x)\le M\|x\|^2\ ,\ \text{либо } B(x\,,\,x)\ge M\|x\|^2.$$

Если эрмитова форма $B(x\,,\,y)$ ограничена, то в силу теоремы Лакса-Мильграма-Вишика существует такой ограниченый самосопряженный оператор A, что

$$\forall(x\in H\,,\,y\in H):B(x\,,\,y)=<x\,,\,Ay>. \tag{4.215}$$

Если справедливо равенство (4.215), то говорят, что форма $B(x\,,\,y)$ представлена оператором A. Если форма неограничена, то, вообще говоря, она не может быть представлена оператором (соответствующий пример будет приведен ниже). Нас будет интересовать вопрос о том, при каких условиях полуограниченная форма может быть представлена самосопряженным оператором.

Если форма $B(x\,,\,y)$ представлена оператором A, то при замене

$$B(x\,,\,y) \to \pm B(x\,,\,y) + a < x\,,\,y >\,,\; a \in \mathbb{R}^1. \tag{4.216}$$

предсталяющий ее оператор A заменится на оператор

$$A \to \pm A + a\mathsf{id}.$$

Ясно, что с помощью замены (4.216) можно получить форму, которая будет удовлетворять неравенству

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(B)) :\; B(x\,,\,x) \geq \|x\|^2. \tag{4.217}$$

В дальнейшем мы будем считать, что неравенство (4.217) выполнено.

Удовлетворяющая условию (4.217) эрмитова форма $B(x\,,\,y)$ на пространстве $\mathbf{Dom}(B)$ определяет скалярное произведение и норму

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(B)) : \|x \mid B\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} B(x\,,\,x). \tag{4.218}$$

Определение 4.8.1. Эрмитова форма $B(x\,,\,y)$ замкнута, если пространство $\mathbf{Dom}(B)$ есть гильбертово пространство (т. е. полно) относительно нормы (4.218).

Пусть H_B -пополнение пространства $\mathbf{Dom}(B)$ по норме (4.218).

Если $\{x_n\} \subset \mathbf{Dom}(B)$ -сходящаяся по метрике пространства H_B последовательность:

$$\|x_n - x_0 \mid B\| \to 0\,,\; x_0 \in H_B, \tag{4.219}$$

то в силу неравенства (4.217) последовательность $\{x_n\} \subset \mathbf{Dom}(B)$ сходится и в пространстве H, поэтому с помощью (4.219) корректно определено отображение

$$I : H_B \mapsto H\,,\; I(x_0) = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{4.220}$$

Предел в правой части (4.220) вычисляется в метрике пространства H.

Определение 4.8.2. Эрмитова форма $B(x\,,\,y)$ замыкаема, если определенное формулой (4.220) отображение имеет нулевое ядро:

$$\mathbf{Ker}(I) = 0.$$

Приведем примеры.

Пусть

$$H = L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\,,\ \mathbf{Dom}(B) = S(\mathbf{R}^1),$$
$$B(f\,,\,g) = \int (f^*(x)g(x) + D_x f(x)^* D_x g(x))dx = \tag{4.221}$$
$$(2\pi)^{-1}\int (1+\xi^2)\widehat{f}^*(\xi)\widehat{g}(\xi)d\xi. \tag{4.222}$$

В этом случае

$$H_B = \{f \mid \int (1+\xi^2)|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}\,,\, \mathbf{Ker}(I) = 0$$

и форма (4.222) замыкаема.

Пусть

$$H = L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\,,\ \mathbf{Dom}(B) = S(\mathbf{R}^1),$$
$$B(f\,,\,g) = \int f^*(x)g(x)dx + f^*(0)g(0). \tag{4.223}$$

В этом случае

$$H_B = L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx) \oplus \mathbb{C}^1\,,\ \mathbf{Ker}(I) = 0 \oplus \mathbb{C}^1 \neq 0$$

и форма (4.223) не замыкаема (и не может быть представлена действующим в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)$ оператором).

Если эрмитова форма B замыкаема, то пространство H_B (пополнение пространства $\mathbf{Dom}(B)$ по норме $\|\quad \mid B\|$) с помощью определенного равенством (4.220) отображения I можно вложить в пространство H так, что вложение будет взаимно однозначно на образе пространства H_B, поэтому можно считать, что пространство H_B есть подмногообразие пространства H:

$$H_B \subset H,$$

а эрмитова форма B по непрерывности продолжена на H_B.

Теорема 4.8.3. *Если B -замкнутая плотно определенная полуограниченная эрмитова форма, то существует такой самосопряженный оператор A, что выполнены условия:*

1.Область определения оператора A содержится в $\mathbf{Dom}(B)$ и плотна в $\mathbf{Dom}(B)$:

$$\mathbf{Dom}(A) \subset \mathbf{Dom}(B)\,,\ \mathbf{Cl}(\mathbf{Dom}(A)) \supset \mathbf{Dom}(B), \tag{4.224}$$

2. Справедливо равенство:

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(B)\,,\, y \in \mathbf{Dom}(A)):\ B(x\,,\,y) =< x\,Ay > . \qquad (4.225)$$

Удовлетворяющий условиям 1-2 самосопряженный оператор единственен и называется оператором, который представляет форму B.

Доказательство. Докажем существование оператора A. Заменой (4.216) перейдем к форме, которая удовлетворяет неравенству (4.217). Далее используем конструкцию, описанную в предыдущем параграфе: пусть

$$\mathbf{Dom}(B) = H_+\ ,\ B(x\,,\,y) = [x\,,\,y]_+\ ,\ A = J^{-1},$$

где J^{-1} -введенный в следствии (4.8.2) оператор. Как доказано в предыдущем параграфе, условия 1-2 выполнены. Докажем единственность оператора A. Пусть оператор A_0 удовлетворяет условиям 1-2. Так как

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A_0))\,,\, B(x\,,\,x) = [x\,,\,A_0 x]_+ \geq \|x\|^2,$$

то

$$\mathbf{Ker}(A_0) = 0$$

и оператор A_0^{-1} существует. Далее имеем:

$$\begin{aligned}
&\forall(x \in \mathbf{Dom}(B)\,,\, y \in \mathbf{Dom}(A_0)):\\
&< A_0 y\,,\,x >= [y\,,\,x]_+ = [JA_0 y\,,\,x]_+ = [A_0 y\,,\,Jx]_+ = [y\,,\,A_0 Jx]_+,\\
&< y\,,\,x >= [A_0^{-1} y\,,\,x]_+ = [Jy\,,\,x]_+.
\end{aligned}$$

Так как множество $\mathbf{Dom}(A_0)$ плотно в $\mathbf{Dom}(B)$, то отсюда следует, что оператор A_0 непрерывен как оператор $\mathcal{L}(H_+ \to H)$ и совпадает на плотном в H_+ множестве с ораниченным оператором J^{-1}, а оператор A_0^{-1} совпадает на $\mathbf{Dom}(B)$ с оператором J. Теорема доказана.

Пусть $\mathbf{Dom}(A)$ -плотное в гильбертовом пространстве H линейное многообразие, и A -опреденный на $\mathbf{Dom}(A)$ симметричный полуограниченный оператор:

$$\begin{aligned}
&\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)\,,\, y \in \mathbf{Dom}(A)):\ < x\,,\,Ay >=< Ax\,,\,y >,\\
&\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)):\ < x\,,\,Ax >\geq M\|x\|^2 \text{ или } < x\,,\,Ax >\leq M\|x\|^2. \qquad (4.226)
\end{aligned}$$

Теорема 4.8.4. *Если A -опреденный на плотном в H линейном многообразии $\mathbf{Dom}(A)$ симметричный полуограниченный оператор, то форма*

$$\forall(x \in \mathbf{Dom}(A)\,,\, y \in \mathbf{Dom}(A)):\ B(x\,,\,y) =< x\,,\,Ay >$$

эрмитова, полуограничена и замыкаема.

Доказательство. В нем нуждается только последнее утверждение. Без ораничения общности будем считать, что выполнено неравенство (4.217). Нам нужно доказать, что если последовательность $\{x_n\} \subset \mathbf{Dom}(A))$ удовлетворяет условиям:

1. Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна по норме

$$\|x \mid B\|^2 = B(x\,,\,x).$$

2. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к нулю в пространстве H:

$$\|x_n\| \to 0\,,\; n \to \infty,$$

то

$$B(x_n\,,\,x_n) \to 0\,,\; n \to \infty.$$

Пусть пространство H_B есть пополнение пространства H по норме $\| \quad | \; B\|$ и $x_0 \in H_B$ -предел последовательности $\{x_n\}$. Имеем:

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A))) : \; |B(x\,,\,x_0)| = \lim_{n\to\infty} |B(x\,,\,x_n)| =$$

$$\lim_{n\to\infty} | < x\,,\, Ax_n > | = \lim_{n\to\infty} | < Ax\,,\, x_n > | \le \lim_{n\to\infty} \|Ax\| \cdot \|x_n\| = 0.$$

Так как множество $\mathbf{Dom}(A)$ плотно в H_B, то отсюда следует, что $x_0 = 0$. Теорема доказана.

Пусть A -опреденный на плотном в гильбертовом пространстве H линейном многообразии $\mathbf{Dom}(A)$ симметричный полуограниченный оператор.

Заменой

$$\Lambda : A \to \pm A + a\mathsf{id} \tag{4.227}$$

можно сделать так, что порожденная оператором ΛA эрмитова форма

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)\,,\, y \in \mathbf{Dom}(A)) : B(x\,,\,y) =< x\,,\,\Lambda A y > \tag{4.228}$$

будет удовлетворять неравенству:

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : \; B(x\,,\,x) \ge \|x\|^2.$$

Сделаем такую замену и пусть $\overline{B}$ -замыкание формы (4.228), а $\overline{\Lambda A}$ -оператор, который представляет форму $\overline{B}$:

$$\forall (x \in \mathbf{Dom}(\overline{B})\,,\,, y \in \mathbf{Dom}(\overline{\Lambda A})) : \; \overline{B}(x\,,\,y) =< x\,,\,\overline{\Lambda A} y > .$$

Оператор

$$\overline{A} := \Lambda^{-1}\overline{\Lambda A} \tag{4.229}$$

самосопряжен и удовлетворяет условиям:

$$\mathbf{Dom}(A) \subset \mathbf{Dom}(\overline{A}) \subset \mathbf{Dom}(\overline{B})\,,\, \forall (x \in \mathbf{Dom}(A)) : \; Ax = \overline{A}(x).$$

Оператор $\overline{A}$ называется *расширением по Фридрихсу* оператора A. Это расширение часто используется в математической физике.

4.9 Преобразование Келли и спектральное разложение неограниченных операторов.

Дробно-линейное преобразование

$$z \mapsto (z-i)/(z+i)$$

переводит прямую $\mathbb{R}^1$ в окружность

$$z = \exp(i\theta)\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Спектр любого самосопряженного оператора лежит на действительной оси. Следовательно, если A -ограниченный самосопряженный оператор, то по теореме об отображении спектра спектр оператора

$$Ca(A) \stackrel{\text{def}}{=} (A - i\mathsf{id}) \cdot (A + i\mathsf{id})^{-1} \tag{4.230}$$

лежит на единичной окружности и оператор $Ca(A)$ унитарен. Мы докажем, что оператор $Ca(A)$ унитарен для любого самосопряженного оператора A.

Лемма 4.9.1. *Если A -произвольный самосопряженный оператор, то формула* (4.230) *корректно определяет оператор $Ca(A)$.*

Доказательство. Если A -самосопряженный оператор, то в силу теоремы 4.7.3

$$\mathbf{Dom}(A + i\mathsf{id})^{-1} = H\ ,\ \mathbf{Im}((A + i\mathsf{id})^{-1}) \subset \mathbf{Dom}(A - i\mathsf{id}),$$

поэтому произведение операторов в (4.230) корректно определено и $\mathbf{Dom}(Ca(A)) = H$.

Определение 4.9.1. Определенный формулой (4.230) оператор $Ca(A)$ называется преобразованием Келли оператора A.

Прямое вычисление показывает, что справедлива

Лемма 4.9.2. *График оператора $Ca(A)$ есть множество*

$$\mathbf{Gr}(Ca(A)) = \{(A + i\mathsf{id})h \oplus (A - i\mathsf{id})h \mid h \in \mathbf{Dom}(A)\}. \tag{4.231}$$

Из этой леммы вытекает

Лемма 4.9.3. *Преобразование Келли самосопряженного оператора удовлетворяет условиям:*

$$\mathbf{Dom}(Ca(A)) = H\ ,\ \mathbf{Im}(Ca(A)) = H,$$
$$\mathbf{Ker}(Ca(A)) = 0\ ,\ Ca(A)^{-1} = Ca(A)^* \tag{4.232}$$

и унитарно.

Доказательство. Так как оператор A самосопряжен, то в силу теоремы 4.7.3

$$\mathbf{Im}(A \pm i\mathsf{id}) = H.$$

Отсюда следуют первые два утверждения леммы. Второе утверждение леммы следует из равенства (4.189). Из этого же равенства следует, что множество

$$\mathbf{Gr}(Ca(A)^{-1}) := \{(A - i\mathsf{id})h \oplus (A + i\mathsf{id})h \mid h \in \mathbf{Dom}(A)\}$$

есть график оператора. Очевидно, что это график оператора, обратного к $Ca(A)$.

Из равенства (4.189) и леммы 4.231 следует, что оператор $Ca(A)$ изометричен:

$$\forall(\phi \in H) : \|Ca(A)\phi\| = \|\phi\|.$$

Так как оператор $Ca(A)$ изометричен и обратим, то он унитарен. Лемма доказана.

Пусть A -ограниченный самосопряженный оператор. Тогда спектр его преобразования Келли $Ca(A)$ лежит на дуге

$$z = \exp(i\theta)\ ,\ 0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < 2\pi$$

и точка $z = 1$ не принадлежит спектру оператора $Ca(A)$. Следовательно, оператор $(Ca(A) - \mathsf{id})^{-1}$ существует и

$$A = -i(Ca(A) + \mathsf{id})(Ca(A) - \mathsf{id})^{-1}. \tag{4.233}$$

Поэтому согласно теореме 4.6.2 справедливо равенство

$$\forall(\phi \in H\ ,\ f \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^1)) :\ < \phi\, ,\, f(A)\phi >=$$
$$\int_0^{2\pi} f\left(-i\frac{\exp(i\theta) + 1}{\exp(i\theta) - 1}\right) d_\theta < \phi\, ,\, E_{un}(\theta\, ,\, Ca(A))\phi >=$$
$$\int_0^{2\pi} f(-\operatorname{ctg}(\theta/2)) d_\theta < \phi\, ,\, E_{un}(\theta\, ,\, Ca(A))\phi >\ . \tag{4.234}$$

Интеграл в (4.234) нужно понимать как интеграл Лебега-Стльтьеса.

Подставив в формулу (4.234) вместо функции f характеристическую функцию полуинтервала $(\infty\,,\,\lambda]$, мы получим:

$$\forall(\phi \in H\,,\, \lambda = -\operatorname{ctg}(\theta/2)):\; <\phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\phi> = <\phi\,,\, E_{un}(\theta\,,\, Ca(A))\phi> .$$

Если оператор A неограничен, то точка $z = 1$ принадлежит спектру оператора $Ca(A)$ и оператор $(Ca(A) - \mathsf{id})^{-1}$ не существует, поэтому предыдущие рассуждения для неограниченного оператора не проходят. Но ограниченную функцию от неограниченного оператора можно просто определить равенством (4.234). Покажем, как это можно сделать.

Напомним, что заданная на действительной прямой функция измерима по Борелю, если ее сужение на любое компактное множество измеримо по Борелю.

Преобразование

$$\mathrm{Ca} : \mathrm{Ca}(f)(\theta) = f(-\operatorname{ctg}(\theta/2)$$

переводит алгебру всех ограниченных измеримых по Борелю функций на действительной оси $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^1)$ в алгебру $\mathcal{B}or([0\,,\,2\pi])$. Пусть A -произвольный (ограниченный или нет) самосопряженный оператор. Ниже под отображением $\mathcal{O}p_{Ca(A)}$ нам будет удобно понимать его регуляризацию, которая стоится так. Для неотрицательных ограниченных измеримых функций $f \in \mathcal{B}or([0\,,\,2\pi])$ мы полагаем

$$\begin{aligned} &\forall(\phi \in H):\; <\phi\,,\, \mathcal{O}p_{Ca(A)}(f)\phi> := \\ &\lim_{\epsilon \to 0} <\phi\,,\, \mathcal{O}p_{Ca(A)}(\mathbb{I}([\epsilon\,,\, 2\pi - \epsilon] \mid \cdot) f)\phi> . \end{aligned} \tag{4.235}$$

где в правой части $\mathcal{O}p_{Ca(A)}$ -заданное определением 4.5.2 (см. стр. 316) отображение. Существование предела в (4.235) очевидно, так как правая часть (4.235) ограничена и не убывает как функция ϵ. На остальные функции $f \in \mathcal{B}or([0\,,\,2\pi])$ отображение $\mathcal{O}p_{Ca(A)}$ распространяется по линейности. Из теоремы 4.6.1 и формулы (4.234) вытекает

Теорема 4.9.1. *Отображение*

$$\mathcal{O}pb_A : \mathcal{B}or(\mathbb{R}^1) \ni f \mapsto Caf \mapsto \mathcal{O}p_{Ca(A)} \in \mathcal{L}(H \mapsto H) \tag{4.236}$$

переводит алгебру $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^1)$ *в коммутативную подалгебру алгебры* $\mathcal{L}(H \mapsto H)$ *и удовлетворяет условиям теоремы 4.5.1, а если оператор* A *ограничен, то отображение* (4.236) *совпадает с описанным в теореме 4.5.1 отображением* $\mathcal{O}pb_A$.

Из теоремы 4.9.1 следует что для ограниченных операторов A функция

$$\mathbb{R}^1 \ni -\operatorname{ctg}(\theta/2) \mapsto E(-\operatorname{ctg}(\theta/2)\,,\,A) = E_{un}(\theta\,,\,Ca(A)) \tag{4.237}$$

совпадает с введенной в определении 4.5.3 спектральной функцией, для неограниченных операторов A мы определим спектральную функцию равенством (4.237).

Теорема 4.9.2. *Вектор ψ принадлежит области определеня оператора A в том и только том случае, если сходится понимаемый как несобственный интеграл Римана-Стильтьеса в правой части* (4.238) *и в этом случае*

$$\|A\psi\|^2 = \int_0^{2\pi} (\operatorname{ctg}(\theta/2))^2 d_\theta < \psi\,,\,E_{un}(\theta\,,\,Ca(A))\psi > . \tag{4.238}$$

Доказательство. Пусть

$$\psi \in \mathbf{Dom}(A)\,,\,\phi = (A - i\mathsf{id})\psi\,,\,Ca(A)\phi = (A + i\mathsf{id})\psi.$$

Тогда

$$\psi = \frac{(\phi - Ca(A)\phi)}{2i}\;,\;A\psi = \frac{(\phi + Ca(A)\phi)}{2}.$$

Следовательно,

$$< \psi\,,\,E_{un}(\alpha\,,\,Ca(A))\psi >=$$
$$\frac{1}{4}\int_0^{\alpha} |1 - \exp(i\theta)|^2 d_\theta < \phi\,,\,E_{un}(\theta\,,\,Ca(A))\phi >=$$
$$\int_0^{\alpha} (\sin(\theta/2))^2 d_\theta < \phi\,,\,E_{un}(\theta\,,\,Ca(A))\phi >, \tag{4.239}$$
$$\|A\psi\|^2 = \frac{1}{4}\int_0^{\alpha} |1 + \exp(i\theta)|^2 d_\theta < \phi\,,\,E_{un}(\theta\,,\,Ca(A))\phi >=$$
$$\int_0^{2\pi} (\cos(\theta/2))^2 d_\theta < \phi\,,\,E_{un}(\theta\,,\,Ca(A))\phi > . \tag{4.240}$$

Заметим, что правая часть (4.239), вообще говоря, не дифференцируема по α. Однако если

$$\theta_1\,,\,\theta_2 \in [\epsilon\,,\,2\pi - \epsilon]\,,\,\epsilon > 0,$$

то в силу равенства (4.239):

$$< \phi\,,\,(E_{un}(\theta_2\,,\,Ca(A)) - E_{un}(\theta_1\,,\,Ca(A))\phi >=$$
$$(\sin(\theta/2))^{-2}(1 + o(1)) < \psi\,,\,(E_{un}(\theta_2\,,\,Ca(A)) - E_{un}(\theta_1\,,\,Ca(A))\psi >,$$

где

$$o(1) \to 0\,,\ |\theta_1 - \theta_2| \to 0\,,\ \theta \in [\theta_1\,,\,\theta_2] \subset [\epsilon\,,\,2\pi - \epsilon]\,,\ \epsilon > 0.$$

Вспоминая определение интеграла Римана-Стильтьеса (см. стр. 57), мы получаем:

$$\|A\psi\|^2 = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon}(\cos(\theta/2))^2 d_\theta < \phi\,,\, E_{un}(\theta\,,\,Ca(A))\phi >=$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon}(\mathrm{ctg}(\theta/2))^2 d_\theta < \psi\,,\, E_{un}(\theta\,,\,Ca(A))\psi > .$$

Существование предела следует из того факта, что правая часть выписанного равенства ораничена сверху и не убывает как функция ϵ.

Мы доказали, что если ψ принадлежит области определеня оператора A, то интеграл в (4.238) сходится. Теперь предположим, что интеграл в (4.238) сходится и докажем, что ψ принадлежит области определения оператора A.

Пусть

$$\psi_n = (E_{un}(2\pi - 1/n\,,\,Ca(A)) - E_{un}(1/n\,,\,Ca(A)))\psi.$$

Тогда

$$\psi_n \to \psi\,,\ n \to \infty\,,\ \psi_n \in \mathbf{Dom}(A),$$

а из сходимости интеграла (4.238) следует, что существует предел

$$A\psi_n \to y\,,\ n \to \infty.$$

Из замкнутости оператора A следует, что

$$\psi \in \mathbf{Dom}(A)\,,\ A\psi = \lim_{n\to\infty} A\psi_n$$

Теорема доказана.

Из формулы (4.238) следует, что

$$\forall (f \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^1)\,,\ \phi \in H):$$
$$\|f(A)\phi\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(-\mathrm{ctg}(\theta/2)|^2 \mu(\phi|d\theta), \tag{4.241}$$

где

$$\mu(\phi|d\theta) = d_\theta < \phi\,,\, E_{un}(\theta\,,\,Ca(A))\phi > .$$

В дальнешем нам будет удобно перейти к мере (см. (4.237) на стр. 362)

$$\nu(\phi|d\lambda) = d_\lambda < \phi\,,\, E(\lambda\,,\,A)\phi > . \tag{4.242}$$

Очевидно, что порожденная функцией распределения

$$\lambda \to < \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\phi >\,,\, -\infty < \lambda < \infty \tag{4.243}$$

борелевская мера $\nu(\phi|d\lambda)$ нормирована:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \nu(\phi|d\lambda) = \|\phi\|^2$$

и в силу (4.241) справедлива формула:

$$\begin{aligned} &\forall (f \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^1)\,,\, \phi \in H): \\ &\|f(A)\phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \nu(\phi|d\lambda), \end{aligned} \tag{4.244}$$

Формула (4.244) позволяет дать описание произвольного самосопряженного оператора в терминах оператора умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(X)$.

Теорема 4.9.3. *Пусть A самосопряженный оператор в сепарабельном гильбетровом пространстве H. Тогда существуют следующие объекты:*

1. нормированные на единицу борелевские меры $\{\mu_j(d\lambda) \mid 1 \le j < \infty\}$,

2. разложение гильбертова пространства H в прямую сумму

$$H = \oplus \sum_{1 \le j < \infty} H_j,$$

3. унитарные отображения

$$T_j: \ H_j \mapsto L^2(\mathbb{R}^1\,,\, \mu_j(d\lambda))$$

которые обладают следующими свойствами

1. пространства H_j приводят любую ограниченную борелевскую функцию от оператора A:

$$\forall (j\,,\, f \in \mathcal{B}or\mathbb{R}^1): f(A)H_j \subset H_j,$$

2. в пространстве H_j оператор $f(A)$ унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию $f(\lambda)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1\,,\, \mu_j(d\lambda))$:

$$\forall (x \in H_j): T_j f(A)x = f(\lambda)T_j x \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\, \mu_j(d\lambda)). \tag{4.245}$$

$$\forall (x \in H_j): \ \|f(A)x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)T_j x(\lambda)|^2 \mu_j(d\lambda) \tag{4.246}$$

Доказательство. Фиксируем произвольно нормированный вектор $e_1 \in H$. Пусть

$$\mu_1(d\lambda) = d_\lambda < e_1\,,\, E(\lambda\,,\, A)e_1 >,$$
$$H_1 = \mathbf{Cl}\{f(A)e_1 \mid f(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\, \mu_1(d\lambda))\}.$$

Из (4.244) следует, что пространство H_1 унитарно изоморфно пространству $L^2(\mathbb{R}^1\,,\, \mu_1(d\lambda))$, и этот изоморфизм осуществляется унитарным оператором

$$T_1 :\; H_1 \ni f(A)e_1 \mapsto f(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\, \mu_1(d\lambda)),$$

причем

$$\forall (g \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^1)) : T_1(g(A)e_1) = g(\lambda)T_1(e_1) = g(\lambda).$$

Если $H_1 \neq H$, то в пространстве $H_1^{\perp}$ мы возьмем нормированный вектор e_2 и повторим наше построение. Так мы получим (далее мы рассуждаем также, как на стр. 171, векторов e_j может быть не более чем счетное число) разложение пространства H в прямую сумму пространств

$$H = \oplus \sum_i H_i\,,$$

в каждом из которых оператор H унитарно эквивалентен оператору умножения в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1\,,\, \mu_j(d\lambda))$. Описанная выше конструкция является одним из вариантов "общей спектральной теоремы". Если оператор A самосопряжен и компактен, то в качестве векторов e_j можно брать собственные векторы оператора A, и тогда мы получим удобное описание оператора. В общем случае для получения удобного описания оператора приходится сужать класс рассматриваемых операторов и прибегать к дополнительным приемам (вводить нак называемое оснащение исходного гильбертова пространства).

Вычислим спектральную функцию оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения $H^2(\mathbb{R}^1) \subset L^2(\mathbb{R}^1\,,\, dx)$.

По определению имеем:

$$\forall (f \in H^2(\mathbb{R}^1)) :\; -\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix\xi)|\xi|^2\widehat{f}(\xi)d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$\forall (\lambda \notin [0\,,\, \infty)\,,\, f \in L^2(\mathbb{R}^1\,,\, dx)) :\; R(\lambda\,,\, -\frac{d^2}{dx^2})f(x) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |(\lambda - |\xi|^2)^{-1}\exp(ix\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} r(x\,,\, y\,,\, \lambda)f(y)dy,$$

где

$$r(x\,,\,y\,,\,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|(\lambda-|\xi|^2)^{-1}\exp(i(x-y)\xi)d\xi=$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|(\lambda-|\xi|^2)^{-1}\cos((x-y)\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}(\lambda-\mu)^{-1}\frac{\cos((x-y)\sqrt{\mu})}{\sqrt{\mu}}d\mu.$$

Поэтому

$$\forall(\lambda\in(0\,,\,\infty)):\ \frac{1}{2\pi i}(R(\lambda-i\epsilon\,,\,-\frac{d^2}{dx^2})-R(\lambda+i\epsilon\,,\,-\frac{d^2}{dx^2})))f(x)=$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}k(x\,,\,y\,,\,\lambda\,,\,\epsilon)f(y)dy,$$

где

$$k(x,\,,\,y\,,\,\lambda\,,\,\epsilon)=\frac{\epsilon}{2\pi^2}\int_{0}^{\infty}((\lambda-\mu)^2+\epsilon^2)^{-1}\frac{\cos(|x-y|\sqrt{\mu})}{\sqrt{\mu}}d\mu.$$

Следовательно,

$$E(\lambda\,,\,-\frac{d^2}{dx^2})f(x)=$$
$$\lim_{\epsilon\to0)}[\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\lambda}(R(\mu-i\epsilon\,,\,-\frac{d^2}{dx^2})-R(\mu+i\epsilon\,,\,-\frac{d^2}{dx^2}))d\mu]f(x)=$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(|x-y|\sqrt{\mu})}{2\sqrt{\mu}}f(y)dy\right)d\mu=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(|x-y|\sqrt{\lambda})}{\pi|x-y|}f(y)dy,$$

и

$$\phi(-\frac{d^2}{dx^2})f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\phi(\lambda)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(|x-y|\sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}}f(y)dy\right)d\lambda.$$

Иногда (особенно в теории рассеяния) бывает полезна следующая конструкция. Пусть A -самосопряженный оператор и $C((\sigma(A)\mapsto h)$ -множество непрерывных на $\sigma(A)$ функций со значениями во вспомогательном гильбертовом пространстве h.

В дальнейше мы будем считать, что $h=L^2(\Omega\,,\,d\omega)$, где Ω -компактное топологическое пространство, а $d\omega$ -пополнение борелевской меры на Ω.

В случае неограниченного интервала предплагается, что носитель каждой функции компактен. Введем в $C((\sigma(A)\mapsto h)$ скалярное произведение:

$$\forall(f(\lambda)\in C((\sigma(A)\mapsto h)\,,\,g(\lambda)\in C((\sigma(A)\mapsto h)):$$
$$<f\,,\,g>:=\int_{a}^{b}<f(\lambda)\,,\,g(\lambda)>_h\,\mu(d\lambda),$$

где $\mu(d\lambda)$ -борелевсая мера на $\sigma(A)$. Пусть пространство $L^2(\sigma(A) \mapsto h)$ есть пополнение пространства $C((\sigma(A) \mapsto h)$ по норме

$$\|f \mid L^2(\sigma(A) \mapsto h)\|^2 = \int_{\sigma(A)} \|f(\lambda) \mid h\|^2 \mu(d\lambda).$$

Определение 4.9.2. Унитарное отображение

$$U : H \mapsto L^2(\sigma(A) \mapsto h),$$

называется диагонализируещим преобразованием, если при этом отображении оператор A переходит в оператор умножения:

$$\forall (f \in \mathbf{Dom}(A)) : \ UAf(\lambda) = \lambda U f(\lambda).$$

В пространстве $L^2(\sigma(A) \mapsto h)$ функция от оператора A действует как оператор умножения на функцию, и это часто упрощает изучение оператора A.

Приведем примеры.

Пусть оператор A компактен и пусть λ_j , ψ_j -его собственные значения и собственные функции. Тогда:

$$\sigma(A) = \{\lambda_j\} \ , \ A\psi_j(\cdot\,,\,\lambda_j) = \lambda_j \psi_j(\cdot\,,\,\lambda_j).$$

В этом случае можно положить:

$$h = \mathbb{C}^1 \ , \ L^2(\sigma(A) \mapsto h) = l^2 \ , \ Uf(\lambda_j) =< \psi(\cdot\,,\,\lambda_j)\,,\,f > .$$

Если постранство $H = L^2(\mathbb{R}^n\,,\,dx)$, а преобразование U мы ищем в виде

$$Uf(\lambda\,,\,\omega) = \int e(x\,,\,\lambda\,,\,\omega)^* f(x) dx\,, \tag{4.247}$$

то тогда интегральное ядро преобразования U должно удовлетворять уравнению

$$\mu(d\lambda) \times d\omega \text{ п.в.} : \ A_x e(x\,,\,\lambda\,,\,\omega) = \lambda e(x\,,\,\lambda\,,\,\omega). \tag{4.248}$$

Вообще говоря, решения уравнения (4.248) могут не принадлежать пространству $L^2(\mathbb{R}^n\,,\,dx)$ (проблема ненормируемых “собственных функций непрерывного спектра”). В этом случае преобразование U *не может* быть задано формулой (4.247) *на всех* функциях из $L^2(\mathbb{R}^n\,,\,dx)$: обычно удается задать его этой формулой на плотном в $L^2(\mathbb{R}^2\,,\,dx)$ множестве. Сейчас для наиболее часто встречающихся случаев разработана эффективная техника решения этой проблемы.

По этому поводу можно заметить следующее.

1. Диагонализируещее преобразование можно и не искать в форме (4.247). На примере модели Фридерихса мы показали, как можно найти диагонализируещее преобразование, не обращаясь к формуле (4.247).

2. Обычно бывает нужна не формула для диагонализируещего преобразования, а знание его свойств. Эти свойства часто проще получить другими методами, не основанными на формулах для диагонализируещего преобразования.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть

$$H = L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\,,\,\mathbf{Dom}(A) = H^2(\mathbb{R}^1)\,,\,A = -\frac{d^2}{dx^2}.$$

(Производная здесь понимается в обобщенном смысле см. стр. 453.)

Имеем:

$$< f\,,\,Af >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\lambda\left(|\widehat{f}(\sqrt{\lambda})^2 + |\widehat{f}(-\sqrt{\lambda})|^2\right)\lambda^{-1/2}d\lambda.$$

Из приведенной выкладки следует, что преобразование

$$U:\;L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)\mapsto L^2((0\,,\,\infty)\mapsto\mathbb{R}^2),$$
$$Uf(\lambda) = \Big(\frac{\widehat{f}(-\sqrt{\lambda})}{\sqrt{4\pi\lambda}}\,,\,\frac{\widehat{f}(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{4\pi\lambda}}\Big)$$

диагонализует оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,dx)$.

Аналогичная выкладка показывает, что преобразование

$$U: L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)\mapsto L^2((0\,,\,\infty)\mapsto L^2(S_\omega\,,\,d\omega)),$$
$$Uf(\lambda\,,\,\omega) = (2\pi)^{-d/2}2^{-1/2}\lambda^{(d/2-1)/2}\widehat{f}(\omega\sqrt{\lambda}),$$

где S_ω -единичная сфера в $\mathbb{R}^d$ со стандартной мерой $d\omega$(в трехмерном случае $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi$), диагонализует оператор $-\Delta$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$.

4.10 Коментарии и литературные указания.

Изложенные в этой главе сведения из теории гильбертовых пространств есть во многих учебниках функционального анализа. С точки зрения автора, для специалиста по математической физики интересены учебники [34, 31, 42]. При изложении спектральной теории мы использовали теорему Вейрштрасса и явную конструкцию гомоморфизма алгебры функций в алгебру операторов. Можно существенно упростить доказательства, если опираться на некоторые теоремы и констукции общей алгебры (понятия кольца и идеала). Простое изложение спектральной теории, которое использует алгебраические конструции, есть в [41] , [44]. Интересный подход к понятию положительных элементов развит в параграфе 2.2.2 книги [37]. Для физика будет интересена трактовка спектральной теоремы с точки зрения теории оснащенных (rigged) гильбертовых пространств. С этим направлением можно познакомиться по работам [47] , [48] , [49]. В последнее время стал популярен подход к построению спектральной функции, который опирается на аналитические свойства резольвенты оператора и методы теории функций комплексного переменного. Доступное изложение этого подхода есть в лекциях [43].шроко испол

Модель Фридерихса обсуждается в работах [50, 51].

Мы описали только один из возможных подходов к построению расширния операторов: расширение по Фридрихсу. Это расширение часто используется в математической физике. Расширение по Фридрихсу можно построить на основе вариационной процедуры, которая описана, например, в книге [42]. В теории расширения симметричных операторов большую роль играют *индексы дефекта* симметричного оператора A:

$$n_{\pm} = \mathbf{dim}(\mathbf{Ker}(\imath \mathsf{id} \mp A^*)).$$

Теория расширений дифференциальных операторов с обыкновенными производными изложена в книге [45]. С теорией расширения эллиптических дифференциальных операторв в частных производных можно познакомиться по цитированной в [46] литературе. Изложение общей теории расширений теории есть в книгах [31, 42].

Книга [38] донесет до читателя свежесть первоисточника. Для подготовленного читателя будет интересна книга [35]. Стандартым источником ссылок на математические проблемы квантовой физики являются книги [23]-[26].

Глава 5

Элементы математической теории рассеяния.

5.1 Абсолютно непрерывный и сингулярный спектр оператора.

Пусть H -сепарабельное гильбертово пространство, A -самосопряженный оператор в H, $E(\lambda\,,\,A)$ -спектральная функция оператора A. Мы будем считать, что функция $E(\lambda\,,\,A)$ доопределена нулем на множество $\{\lambda < \inf\sigma(A)\}$ и доопределена как единичный оператор на множество $\{\lambda > \sup\sigma(A)\}$ (если эти множества не пусты).В дальнейшем по умолчанию все интегалы без указания пределов интегрирования берутся от $-\infty$ до ∞.

Пусть $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}^1$ -произвольный отрезок, $\mathcal{B}or([a\,,\,b])$ алгебра все борелевских подмножеств отрезка $[a\,,\,b]$. Каждому множеству $m \in \mathcal{B}or([a\,,\,b])$ поставим в соответствие задаваемый квадратичной формой проектор:

$$\forall(\phi \in H)\,:\, \mathcal{B}or([a\,,\,b]) \ni m \mapsto < \phi\,,\, P(m)\phi >=$$
$$\int \mathbb{I}(m \mid \lambda) d_\lambda < \phi\,,\, E(\lambda\,,\,A)\phi > . \tag{5.1}$$

Каждому элементу $\phi \in H$ соответствует борелевская мера на отрезке $[a\,,\,b]$:

$$\mu(\phi \mid \cdot\,)\,:\, \mathcal{B}or(a\,,\,b]) \mapsto \mu(\phi \mid m) =< \phi\,,\, P(m)\phi > . \tag{5.2}$$

Если A -компактный оператор, то

$$\mu(\phi \mid m) = \sum_{\lambda_j \in m} |\phi_j|^2,$$

где λ_j -собственные значения оператора A, ϕ_j -коэффициенты Фурье по собственным функциям оператора A.

Если $A = -\Delta$, то

$$\mu(\phi \mid m) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\xi^2 \in m} |F\phi(\xi)|^2 d\xi.$$

Теорема 5.1.1. *Пространство H есть прямая сумма двух пространств:*

$$H = H_{ac} \oplus H_s. \tag{5.3}$$

Если $\phi \in H_{ac}$, то определенная равенством (5.2) мера $\mu(\phi \mid \cdot)$ на любом отрезке $[a\,,\,b]$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^1$. Если $\phi \in H_s$, то определенная равенством (5.2) мера $\mu(\phi \mid \cdot)$ на любом отрезке $[a\,,\,b]$ сингулярна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^1$. Разложение (5.3) приводит оператор A: если f -любая ограниченная борелевская функция на $\mathbb{R}^1$, то

$$f(A)H_{ac} \subset H_{ac}\ ,\ f(A)H_s \subset H_s. \tag{5.4}$$

Доказательство. Обозначим символом $|m|$ меру Лебега множества $m \in \mathcal{B}or([a\,,\,b])$. Напомним, что мера $\mu(\phi \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, если

$$(|m| = 0) \Rightarrow (\mu(\phi \mid m) = 0).$$

Определим множество $H_{ac} \subset H : \phi \in H_{ac}$, если $\forall [a\,,\,b] \subset \mathbb{R}^1$ на отрезке $[a\,,\,b]$ мера $\mu(\phi \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Множество H_{ac} есть линийное пространство, так как если $\phi \in H\,,\,\psi \in H$, то

$$\begin{aligned}&< (\phi + \psi), P(m)(\phi + \psi) >=< \phi\,,\,P(m)\phi > + < \psi\,,\,P(m)\psi >\\ &+ 2Re\ < \psi\,,\,P(m)\phi >= 0,\end{aligned}$$

при

$$< \phi\,,\,P(m)\phi >= 0\ ,\ < \psi\,,\,P(m)\psi >= 0.$$

В силу непрерывности проектора $P(m)$ множество H_{ac} замкнуто. По теореме Леви о проекции

$$H = H_{ac} \oplus H_{ac}^{\perp}.$$

Ниже мы докажем, что

$$H_s = H_{ac}^{\perp}. \tag{5.5}$$

Получим другое описание пространств H_{ac} и H_s. Так как

$$H = \oplus \sum_n (E(n\,,\,A) - E(n-1\,,\,A))H,$$

то достаточно рассмотреть случай, когда

$$\psi\,,\,\phi \in (E(n\,,\,A) - E(n-1\,,\,A))H.$$

Рассмотрим сужение меры $\mu(\phi \mid \cdot)$ на отрезок $[a\,,\,b] \subset \mathbb{R}^1$. По теореме Лебега о разложении меры справедливо равенство

$$\forall (m \in \mathcal{B}([a\,,\,b]))\,:\; \mu(\phi \mid m) = \mu_{ac}(\phi \mid m) + \mu_s(\phi \mid m), \tag{5.6}$$

где мера $\mu_{ac}(\phi \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега:

$$\forall (m \in \mathcal{B}([a\,,\,b]))\,:\, ((|m| = 0)) \Rightarrow (\mu_{ac}(\phi \mid m) = 0), \tag{5.7}$$

а мера $\mu_s(\phi \mid \cdot)$ сингулярна относительно меры Лебега:

$$\exists (|m_0| = 0)\,,\, \forall (m \in \mathcal{B}([a\,,\,b]))\,:\; \mu_s(\phi \mid m) = \mu_s(\phi \mid m \bigcap m_0). \tag{5.8}$$

Заметим, что входящее в (5.8) множество m_0 зависит от ϕ,и когда это существенно, мы будем писать

$$m_0 = m_0(\phi).$$

Пусть множество m_0 удовлетворяет условию (5.8). Положим

$$\phi_{ac} = \int \mathbb{I}(\mathbf{C}(m_0) \mid \lambda) d_\lambda E(\lambda\,,\,A)\phi, \tag{5.9}$$

$$\phi_s = \int \mathbb{I}(m_0 \mid \lambda) d_\lambda E(\lambda\,,\,A)\phi. \tag{5.10}$$

Так как

$$\mathbb{I}(\mathbf{C}(m_0) \mid \lambda) + \mathbb{I}(m_0 \mid \lambda) \equiv 1,$$

то

$$\forall (\phi \in H)\,:\, \phi = \phi_{ac} + \phi_s. \tag{5.11}$$

Докажем, что мера $\mu(\phi_{ac} \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а мера $\mu(\phi_s \mid \cdot)$ сингулярна относительно меры Лебега.

Имеем:

$$\mu(\phi_{ac} \mid m) = \int \mathbb{I}(m \mid \lambda) d_\lambda < \phi_{ac}\,,\, E(\lambda\,,\, A)\phi_{ac} >=$$
$$\int \mathbb{I}(m \mid \lambda)\mathbb{I}(\mathbf{C}(m_0)) d_\lambda < \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\phi >= \mu(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0)) =$$
$$\mu_{ac}(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0)) + \mu_s(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0)) = \mu_{ac}(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0)),$$

так как

$$\mu_s(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0)) = \mu_s(\phi \mid m \bigcap \mathbf{C}(m_0) \bigcap m_0) = 0.$$

Аналгично,из (5.10) следует, что

$$\mu(\phi_s \mid m) = \mu(\phi \mid m \bigcap m_0),$$

поэтому мера $\mu(\phi_s \mid \cdot)$ сингулярна. Пусть

$$\psi = \psi_{ac} + \psi_s$$

-разложение произвольного элемента $\psi \in H$.

Имеем:

$$| < \phi_{ac}\,,\, \psi_s > |^2 = | \int \mathbb{I}(\mathbf{C}(m_0(\phi)))\mathbb{I}(m_0(\psi)) d_\lambda < \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\psi > |^2 \leq$$
$$| \int \mathbb{I}(\mathbf{C}(m_0(\phi)))\mathbb{I}(m_0(\psi)) d_\lambda < \phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\phi > | \|\psi\|^2 =$$
$$\mu_{ac}(\phi \mid m_0(\psi)) | \|\psi\|^2 = 0.$$

Итак, мы доказали равенство (5.5) Из (5.9) следует, что

$$\mu(f(A)\phi_{ac} \mid m) \leq \sup\{|f(\lambda)|^2\}\mu(\phi_{ac} \mid m),$$

поэтому

$$(\mu(\phi_{ac} \mid m) = 0) \Rightarrow (\mu(f(A)\phi_{ac} \mid m)) = 0),$$

и

$$f(A)H_{ac} \subset H_{ac}.$$

Из (5.10) следует, что

$$\mu(f(A)\phi_s \mid m) = \mu(f(A)\phi_s \mid m \bigcap m_0),$$

поэтому

$$f(A)H_s \subset H_s.$$

Теорема доказана.

Определение 5.1.1. Спектр сужения оператора A на пространство H_{ac} называется абсолютно непрерывным спектром оператора A. Спектр сужения оператора A на пространство H_s называется сингулярным спектром оператора A.

Теорема 5.1.2. *Если либо $\phi \in H_{ac}$, либо $\psi \in H_{ac}$, то функция*

$$\lambda \mapsto < \phi \,,\, E(\lambda \,,\, A)\psi >$$

абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a \,,\, b] \subset \mathbb{R}^1$ и

$$\exists(\omega(\lambda \,,\, \phi \,,\, \psi) \in L^1(\mathbb{R}^1)): \;\; < \phi \,,\, E(\lambda \,,\, A)\psi >= \int_{-\infty}^{\lambda} \omega(\xi \,,\, \phi \,,\, \psi) d\xi. \quad (5.12)$$

Определенная равенством (5.12) *функция* $\omega(\lambda \,,\, \phi \,,\, \psi)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$1.\ \forall(\phi \in H_{ac}) : \text{п.в. } \omega(\lambda \,,\, \phi \,,\, \phi) \geq 0, \quad (5.13)$$

$$2.\ |\omega(\lambda \,,\, \phi \,,\, \psi)|^2 \leq \omega(\lambda \,,\, \phi \,,\, \phi)\omega(\lambda \,,\, \psi \,,\, \psi), \quad (5.14)$$

$$3.\ \forall(f \in L^\infty(\mathbb{R}^1)) : \;\; < \phi \,,\, f(A)\psi >= \int f(\lambda)\omega(\lambda \,,\, \phi \,,\, \psi) d\lambda. \quad (5.15)$$

4.*Множество*

$$\mathcal{M}(A) = \{\phi \mid \phi \in H_{ac} \,,\, \sup\{\omega(\lambda \,,\, \phi \,,\, \phi) \mid \lambda \in \mathbb{R}^1\} < \infty\} \quad (5.16)$$

плотно в H_{ac} и функция

$$\phi \to \|\phi \mid \mathcal{M}(A)\| = \sup\{\omega(\lambda \,,\, \phi \,,\, \phi) \mid \lambda \in \mathbb{R}^1\}^{1/2} \quad (5.17)$$

определяет на этом множестве норму.

Доказательство. Во-первых, заметим, что если либо $\phi \in H_{ac}$, либо $\psi \in H_{ac}$, то

$$< \phi \,,\, E(\lambda \,,\, A)\psi >=< \phi_{ac} \,,\, E(\lambda \,,\, A)\psi_{ac} > .$$

Далее заметим, что если $\phi \in H_{ac}$, то на любом отрезке $[a \,,\, b] \subset \mathbb{R}^1$ функция

$$\lambda \mapsto < \phi \,,\, E(\lambda \,,\, A)\phi >$$

не убывает и мера $\mu(\phi \mid \cdot)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Следовательно,

$$\exists(\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\phi)\in L^1([a\,,\,b])\,,\,\text{п.в. }\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\phi)\geq 0):$$
$$\forall(m\in\mathcal{B}([a\,,\,b]):\mu(\phi\mid m)=\int\limits_m \omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\phi)d\lambda.$$

Так как

$$\forall(a\,,\,b):\ \int_a^b \omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\phi)d\lambda=\|(E(a\,,\,A)-E(b\,,\,A)\phi\|^2\leq\|\phi\|^2,$$

то

$$\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\phi)\in L^1(\mathbb{R}^1).$$

Утверждение (5.12) теперь следует из поляризационного тождества.

Из теоремы 1.2.19 следует, что функция

$$\lambda\mapsto\int_{-\infty}^{\lambda}\omega(\xi\,,\,\phi\,,\,\psi)d\xi=<\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi>$$

по мере Лебега почти всюду дифференцируема и

$$\text{п.в. }\frac{d}{d\lambda}<\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi>=\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\psi).$$

Так как

$$(E(\lambda+\Delta\lambda\,,\,A)-E(\lambda\,,\,A))^2=E(\lambda+\Delta\lambda\,,\,A)-E(\lambda\,,\,A), \tag{5.18}$$

то из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$<\phi\,,\,(E(\lambda+\Delta\lambda\,,\,A)-E(\lambda\,,\,A))\psi>|^2\leq$$
$$<\phi\,,\,(E(\lambda+\Delta\lambda\,,\,A)-E(\lambda\,,\,A))\phi>\times<\psi\,,\,(E(\lambda+\Delta\lambda\,,\,A)-E(\lambda\,,\,A))\psi>.$$

Деля обе части этого неравенства на $\Delta\lambda^2$ и переходя к пределу $\Delta\lambda\to 0$, мы получим неравенство (5.14).

Равенство (5.15) есть следствие равенства (5.12) и определения функции от оператора.

Положим

$$\forall(\phi\in H_{ac}):\ r(\phi\,,\,n)=\{\lambda\mid\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\phi)<n^2\}\bigcap[-n\,,\,n].$$

Пусть $r_b(\phi\,,\,n)$ -борелевское множество, которое удовлетворяет условиям:

$$r_b(\phi\,,\,n) \subset r(\phi\,,\,n)\ ,\ |r(\phi\,,\,n) \setminus r_b(\phi\,,\,n)(\phi\,,\,n)| < 2^{-n}.$$

Пусть

$$P(\phi\,,\,n) := \mathcal{O}pb_A(\mathbb{I}(r_b(\phi\,,\,n) \mid \cdot)).$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&\forall(\phi \in H_{ac})\,,\,\omega(\lambda\,,\,P(\phi\,,\,n)\phi\,,\,P(\phi\,,\,n)\phi) = \\
&\mathbb{I}(r_b(\phi\,,\,n) \mid \lambda)\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\phi) < n^2, \\
&\|\phi - P(\phi\,,\,n)\phi\|^2 = \int (1 - \mathbb{I}(r_b(\phi\,,\,n) \mid \lambda)\omega(\lambda\,,\,\phi\,,\,\phi)d\lambda \to 0\,,\,n \to \infty.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что множество

$$\mathcal{M}_b(A) := \bigcup_{1 \le n < \infty} \{\phi \mid \phi = P(\psi\,,\,n)\psi\} \tag{5.19}$$

удовлетворяет условиям:

$$\mathcal{M}_b(A) \subset \mathcal{M}(A) \bigcap \mathbf{Dom}(A)\ ,\ \mathbf{Cl}(\mathcal{M}_b(A)) = H_{ac}(A).$$

Из равенства (5.18) следует, что если производная функции

$$\lambda \mapsto E(\lambda\,,\,A)$$

существует, то она равна нулю.

5.2 Волновые операторы и оператор рассеяния.

Пусть $P_{ac}(A)$ проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора A:

$$P_{ac}(A)H = H_{ac}.$$

Пусть B -самосопряженный оператор в H.

Определение 5.2.1. Если существуют пределы

$$\forall(\phi \in H):\ W_+(B\,,\,A)\phi = \lim_{t \to +\infty} \exp(itB)\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi, \tag{5.20}$$

$$\forall(\phi \in H):\ W_-(B\,,\,A)\phi = \lim_{t \to -\infty} \exp(itB)\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi, \tag{5.21}$$

то эти пределы называются волновыми операторами.

Далее следуют равенства, в которых есть индексы $\pm$. Эти равенства мы будем понимать как независимые равенства, в обеих частях которых берутся либо верхние индексы, либо нижние.

Определение волновых операторов можно сформулировать так:

$$\forall \phi : \lim_{t \to \pm\infty} \| W_{\pm}(B\,,\,A)\phi - \exp(itB)\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi \| = 0. \qquad (5.22)$$

Условия существования волновых операторв мы обсудим позже, а сейчас мы будем предполагать, что эти операторы существуют и установим их простейшие свойства.

Теорема 5.2.1. *Если волновые операторы $W_{\pm}(B\,,\,A)$ существуют, то тогда*

$$1.\ \forall(\phi \in H) :\ \|W_{\pm}(B\,,\,A)\phi\| = \|P_{ac}\phi\|. \qquad (5.23)$$

$$2.\ E(\lambda\,,\,B)W_{\pm}(B\,,\,A) = W_{\pm}(B\,,\,A)E(\lambda\,,\,A). \qquad (5.24)$$

$$3.\ \mathbf{Im}(W_{\pm}(B\,,\,A)) \subset P_{ac}(B)H. \qquad (5.25)$$

Проведем доказательство для знака $+$. Имеем:

$$\|W_{+}(B\,,\,A)\phi\| = \lim_{t\to\infty} \|\exp(itB)\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\| =$$
$$\lim_{t\to\infty} \|\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\| = \|P_{ac}(A)\phi\|.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Далее имеем:

$$\forall(\tau \in \mathbb{R}^1) : W_{+}(B\,,\,A)\exp(-i\tau A)\phi =$$
$$\lim_{t\to\infty} \exp(itB)\exp(-itA)\exp(-i\tau A)P_{ac}(A)\phi =$$
$$\exp(-i\tau B)\lim_{t\to\infty}\exp(itB)\exp(-itA))P_{ac}(A)\phi = \exp(-i\tau B)W_{+}(B\,,\,A)\phi,$$

следовательно,

$$\exp(-i\tau B)W_{+}(B\,,\,A) = W_{+}(B\,,\,A)\exp(-i\tau A).$$

Поэтому

$$\forall(\phi\,,\,\psi) :\ <\phi\,,\,\exp(-i\tau B)W_{+}(B\,,\,A)\psi>=$$
$$<\phi\,,\,W_{+}(B\,,\,A)\exp(-i\tau A)\psi>=<W_{+}(B\,,\,A)^{*}\phi\,,\,\exp(-i\tau A)\psi>,$$
$$\int \exp(-i\tau\lambda)d_{\lambda} < W_{+}(B\,,\,A)^{*}\phi\,,\,E(\lambda\,,\,A)\psi>=$$
$$\int \exp(-i\tau\lambda)d_{\lambda} < \phi\,,\,E(\lambda\,,\,B)W_{+}(B\,,\,A)\psi>,$$

и из единственности преобразования Фурье следует равество

$$< \phi\,,\, E(\lambda\,,\, B)W_+(B\,,\, A)\psi > = < W_+(B\,,\, A)^*\phi\,,\, E(\lambda\,,\, A)\psi >,$$

поэтому

$$\forall(\phi\,,\,\psi):\ < \phi\,,\, W_+(B\,,\, A)E(\lambda\,,\, A)\psi > = < \phi\,,\, E(\lambda\,,\, B)W_+(B\,,\, A)\psi > .$$

Второе утверждение теоремы доказано.

Из этого утверждения следует, что

$$\|E(\lambda\,,\, B)W_+(B\,,\, A)\phi\| = \|W_+(B|,\,,\, A)E(\lambda\,,\, A)P_{ac}(A)\phi\| =$$
$$\|E(\lambda\,,\, A)P_{ac}(A)\phi\|.$$

Правая часть этого равенства есть абсолютно непрерывная функция параметра λ. Следовательно, $W_+(B\,,\, A)\phi \in P_{ac}(B)H$.

Теорема доказана.

Соотношение (5.24) называется сплетающим свойством волновых операторов.

Следующая теорема называется теоремой об умножении волновых операторов.

Теорема 5.2.2. *Если волновые операторы $W_\pm(B\,,\, A)$ и $W_\pm(C\,,\, B)$ существуют, то волновой оператор $W_\pm(C\,,\, A)$ существует и выполнено равенство*

$$W_\pm(C\,,\, A) = W_\pm(C\,,\, B)W_\pm(B\,,\, A). \tag{5.26}$$

Доказательство. Сначала заметим, что

$$\|\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itC)\exp(-itB)(P_{ac}(B)-\mathsf{id})\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itB)\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\| =$$
$$\|(P_{ac}(B)-\mathsf{id})\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itB)\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi\| = 0.$$

С учетом этого замечания, имеем:

$$W_\pm(C\,,\, B)W_\pm(B\,,\, A)\phi =$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itC)\exp(-itB)P_{ac}(B)\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itB)\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi =$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itC)\exp(-itB)\lim_{t\to\infty}\exp(itB)\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi +$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itC)\exp(-itB)(P_{ac}(B)-\mathsf{id})\times$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itB)\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi =$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}\exp(itC)\exp(-itA)P_{ac}(A)\phi = W_\pm(C\,,\, A).$$

Теорема доказана.

Определение 5.2.2. Если

$$\mathbf{Im}(W_{\pm}(B\,,\,A)) = P_{ac}(B)H, \tag{5.27}$$

то волновой оператор $W_{\pm}(B\,,\,A)$ называется полным.

Теорема 5.2.3. *Если хотя бы один волновых операторов $W_{\pm}(B\,,\,A)$ полный, то*

1. Этот оператор обратим и операторы $E(\lambda\,,\,B)P_{ac}(B)$ и $E(\lambda\,,\,A)P_{ac}(A)$ унитарно эквивалентны:

$$\begin{aligned}&\forall(\phi\in P_{ac}(B)H):\ E(\lambda\,,\,B)P_{ac}(B)\phi =\\ &W_{\pm}(B\,,\,A)E(\lambda\,,\,A)P_{ac}(A)W_{\pm}(B\,,\,A)^{-1}\phi\end{aligned} \tag{5.28}$$

2. Существует волновой оператор $W_{\pm}(A\,,\,B)$.

3. Если существуют оба волновых оператора $W_{\pm}(B\,,\,A)$ и $W_{\pm}(A\,,\,B)$, то они полны.

Доказательство. Если выполнено условие (5.27), то к пространствам $P_{ac}(A)H$, $P_{ac}(B)H$ и оператору

$$W_{\pm}(B\,,\,A)\in\mathcal{L}(P_{ac}(A)H\mapsto P_{ac}(B)H)$$

мы можем применить теорему Банаха об обратном операторе (см. стр. 168) и первое утверждение теоремы следует из равенства (5.25).

Если

$$\forall(\psi\in P_{ac}(B)H)\,,\ \exists(\phi\in P_{ac}(A)H):\ \psi = W_{\pm}(B\,,\,A)\phi,$$

то

$$\begin{aligned}&\forall(\psi\in P_{ac}(B)H):\ \lim_{t\to\pm\infty}\|\psi-\exp(itB)\exp(-itA)\phi\| =\\ &\lim_{t\to\pm\infty}\|\exp(itA)\exp(-itB)\psi-\phi\| = \|W_{\pm}(A\,,\,B)\psi-\phi\|.\end{aligned}$$

Второе утверждение теоремы доказано.

Если существуют оба волновых оператора, то по теореме об умножении волновых операторов имеем:

$$\begin{aligned}P_{ac}(A) &= W_{\pm}(A\,,\,B)W_{\pm}(B\,,\,A),\\ P_{ac}(B) &= W_{\pm}(B\,,\,A)W_{\pm}(A\,,\,B).\end{aligned}$$

Эти равенства доказывают, что

$$P_{ac}(A)H = \mathbf{Im}(W_{\pm}(A\,,\,B))\ ,\ P_{ac}(B)H = \mathbf{Im}(W_{\pm}(B\,,\,A)).$$

Теорема доказана.

Пусть существуют операторы $W_{\pm}(B\,,\,A)$, $W_{\pm}(A\,,\,B)$.

Определение 5.2.3. Оператором рассеяния $S(B\,,\,A)$ называется оператор

$$S(B\,,\,A) \stackrel{\mathrm{def}}{=} W_+(B\,,\,A)^* W_-(B\,,\,A). \tag{5.29}$$

Теорема 5.2.4. *Оператор рассеяния $S(B\,,\,A)$ коммутирует с любой ограниченной борелевской функцией оператора A.*

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
&f(A)S(B\,,\,A) = f(A)W_+(B\,,\,A)^*W_-(B\,,\,A) = \\
&(W_+(B\,,\,A)f(A))^*W_-(B\,,\,A) = (f(B)W_+(B\,,\,A))^*W_-(B\,,\,A) = \\
&W_+(B\,,\,A)^*f(B)W_-(B\,,\,A) = W_+(B\,,\,A)^*W_-(B\,,\,A)f(A) = \\
&S(B\,,\,A)f(A).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

5.3 Признаки существования волновых операторов и принцип инвариантности волновых операторов.

Сначала мы докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 5.3.1. *Если K -компактный оператор, то*

$$\forall(\phi \in H_{ac}): \ \lim_{t\to\infty} \|K\exp(-itA)\phi\| = 0. \tag{5.30}$$

Доказательство. Используя разложение Шмидта (см. (4.60) на стр. 296), мы получаем:

$$\begin{aligned}
&\|K\exp(-itA)\phi\|^2 = \\
&\sum_{1\le j\le n} s_j(K)^2| < g_j\,,\,\exp(-itA)\phi > |^2 + \sum_{j>n} s_j(K)^2| < g_j\,,\,\exp(-itA)\phi > |^2 \\
&\le \sum_{1\le j\le n} s_j(K)^2| < g_j\,,\,\exp(-itA)\phi > |^2 + s_n(K)^2\|\phi\|^2\,,\ s_n(K)\to 0\,,\ n\to\infty.
\end{aligned}$$

Но

$$\forall(\phi \in H_{ac}): \ < g_j\,,\,\exp(-itA)\phi >= \int \exp(-it\lambda)\omega(g_j\,,\,\phi\,,\,\lambda)d\lambda \to 0\,,\ t\to\infty,$$

что и доказывает наше утверждение.

Следующая важная в теории рассеяния лемма называется леммой М. Розенблюма.

Лемма 5.3.2. *Если T - оператор Гильберта-Шмидта (см. определение нормы Гильберта-Шмидта на стр. 300)и $\phi \in \mathcal{M}(A)$ (определение этого пространства см. на стр. 375), то справедлива оценка:*

$$\int \|T\exp(-itA)\phi\|^2 dt \leq 2\pi \|\phi \mid \mathcal{M}(A)\|^2 \|T \mid NS\|^2. \tag{5.31}$$

Доказательство. Используя разложение Шмидта, мы получаем:

$$\int \|T\exp(-itA)\phi\|^2 dt = \int \left(\sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2 | < g_j\,,\, \exp(-itA)\phi > |^2 \right) dt =$$

$$\sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2 \int | \int \omega(g_j\,,\, \phi\,,\, \lambda) \exp(-i\lambda t) d\lambda|^2 dt.$$

Используя равенство Парсеваля для преобразования Фурье по λ и неравенство (5.14), мы получаем:

$$\int \|T\exp(-itA)\phi\|^2 dt =$$

$$2\pi \sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2 \int |\omega(g_j\,,\, \phi\,,\, \lambda)|^2 d\lambda \leq$$

$$2\pi \sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2 \int |\omega(g_j\,,\, g_j\,,\, \lambda)\omega(\phi\,,\, \phi\,,\, \lambda)| d\lambda \leq$$

$$2\pi \|\phi \mid \mathcal{M}\|^2 \sum_{1\leq j<\infty} s_j(T)^2 \int \omega(g_j\,,\, g_j\,,\, \lambda) d\lambda = 2\pi \|\phi \mid \mathcal{M}\|^2 \|T \mid NS\|^2.$$

Лемма доказана.

Пусть A и B -самосопряженные операторы с общей областью определения

$$\mathbf{Dom}(A) = \mathbf{Dom}(B) = \mathcal{D}$$

и $\mathcal{R}$ -плотное в H_{ac} множество:

$$\mathbf{Cl}(\mathcal{R}) \supset H_{ac},$$

которое содержится в области определения операторов A и B:

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{D}.$$

Множество $\mathcal{R}$ с такими свойствами всегда существует: можно положить $\mathcal{R} = \mathcal{M}_b(A)$, и множеств с такими свойствами может быть много.

Следующее простое утверждение оказывается очень полезным в теории рассеяния. Это -признак Кука существования волновых операторов.

Лемма 5.3.3. *Если множество $\mathcal{R}$ удовлетворяет описанным выше требованиям и*

$$\forall(\phi \in \mathcal{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} \|(B - A) \exp(-iAt)\phi\| dt < \infty, \tag{5.32}$$

то волновые операторы $W_{\pm}(B\,,\,A)$ существуют.

Доказательство. Положим

$$W(t) := \exp(itB) \exp(-itA). \tag{5.33}$$

Так как

$$\|W(t)\| \equiv 1,$$

то в силу теоремы Банаха-Штейнгауза (см. стр. 161) для доказательства существования пределов (5.20)-(5.21) для всех $\phi \in H_{ac}$ достаточно доказать существование этих пределов для $\phi \in \mathcal{R}$. Так как $\phi \in \mathbf{Dom}(A)$, то

$$\exp(-i\tau A)\phi \in \mathbf{Dom}(B)\ ,\ \exists\, \frac{d}{d\tau} W(\tau)\phi\ ,\ \frac{d}{d\tau} W(\tau)\phi \in C((0\,,\,\infty)\,,\,H).$$

Докажем существование предела (5.20). Имеем:

$$(W(t) - W(s))\phi = \int_s^t \frac{d}{d\tau} W(\tau)\phi d\tau = i \int_s^t \exp(i\tau B)(B - A) \exp(-i\tau A)\phi d\tau,$$

$$\forall(t > s > s(\epsilon)) : \|(W(t) - W(s))\phi\| \leq \int_s^t \|(B - A) \exp(-i\tau A)\phi\| d\tau < \epsilon.$$

Существование предела (5.21) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Рассмотрим пример.

Пусть

$$H = L^2(\mathbb{R}^3)\ ,\ A = -\Delta\ ,\ B = -\Delta + V,$$

где V -оператор умножения на действительную непрерывную функцию $v(x)$, которая удовлетворяет оценке

$$\forall(x \in \mathbb{R}^3) : |v(x)| \leq C(1 + |x|)^{-(1+\epsilon)}\ ,\ \epsilon > 0. \tag{5.34}$$

Докажем существование волновых операторов $W_{\pm}(B\,,\,A)$.

Имеем:

$$\forall(\phi \in H) : \ < \phi\,,\, E(\lambda\,,\,A)\phi >= (2\pi)^{-3} \int\limits_{\xi^2 < \lambda} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi,$$

Так как правая часть этого равенства есть абсолютно непрерывная функция параметра λ при любом $\phi \in H$, то в рассматриваемом случае

$$P_{ac}(A)H = H_{ac} = L^2(\mathbb{R}^3)$$

и у оператора A нет сингулярного спектра.

В силу известной в теории преобразования Фурье теоремы Винера множество функций вида

$$\psi = \sum_{1\le j\le n} \alpha_j \exp(-(x-a_j)^2)\,,\ a_j \in \mathbb{R}^3\,,\ n = 1\,,\,2\,\ldots$$

плотно в $L^2(\mathbb{R}^3)$, поэтому для доказательства существования волновых операторов $W_\pm(B\,,\,A)$ достаточно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(t)dt < \infty, \tag{5.35}$$

где

$$J(t) = \|V\exp(-itA)\psi_0\|\,,\ \psi_0 = \exp(-(x-a)^2).$$

Имеем:

$$\exp(-itA)\psi_0(x) = F^{-1}(\exp(it\xi^2)F(\exp(-(\cdot - a)^2))(x) =$$
$$\sigma(t)^{-3/2}\exp(-(x-a)^2/\sigma(t))\ ,\ \text{где } \sigma(t) = 1+4it.$$

В силу оценки (5.34)

$$|V\exp(-itA)\psi_0(x)| < C|\sigma(t)|^{-3/2}(1+|x|)^{-(1+\epsilon)}\exp(-(|x-a|/|\sigma(t)|)^2).$$

Пусть число q удовлетворяет оценке

$$\frac{3}{2(1+\epsilon)} < q < \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда по неравенству Гельдера имеем:

$$J(t) \le C|\sigma(t)|^{-3/2}\left(\int (1+|x|)^{-2(1+\epsilon)}\exp(-2((x-a)/|\sigma(t)|)^2)dx\right)^{1/2} \le$$
$$C|\sigma(t)|^{-3/2}\left(\int (1+|x|)^{-2q(1+\epsilon)}dx\right)^{1/2q}\left(\int \exp\left(-\frac{2p|x-a|^2}{|\sigma(t)|^2}\right)dx\right)^{1/2p} \le$$
$$const.|\sigma(t)|^{-3/2q}.$$

Так как $3/2q > 1$, то отсюда следует оценка (5.35).

Одним из основных признаков существования волновых операторов является следующий.

Теорема 5.3.1. *Пусть A и B -самосопряженные операторы с общей областью определения*

$$\mathbf{Dom}(A) = \mathbf{Dom}(B) = \mathcal{D}$$

и оператор $C = B - A$ продолжается по непрерывности до ядерного оператора. Тогда волновые операторы $W_\pm(B\,,\,A)$ существуют и полны.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем несколько лемм. Мы будем доказывать существование оператора $W_+(B\,,\,A)$, доказательство существования оператора $W_-(B\,,\,A)$ аналогично.

Пусть

$$\begin{gathered} Z(t\,,\,s) = W(t)^*(W(t) - W(s)) = \\ \mathsf{id} - \exp(itA)\exp(-i(t-s)B)\exp(-isA). \end{gathered}$$

Прямым вычислением доказывается

Лемма 5.3.4. *Справедливо равенство*

$$\|(W(t) - W(s))\phi\|^2 = <\phi\,,\,Z(t\,,\,s)\phi> + <\phi\,,\,Z(s\,,\,t)\phi>\,. \tag{5.36}$$

В формуле (5.37) и в аналогичных формулах ниже символом $[D\,,\,F]$ мы обозначаем оператор, который задает квадратичную форму на области $\mathcal{D}$ (и не обязательно является оператором в пространстве H):

$$\forall(\phi \in \mathcal{D}):\ <\phi\,,\,[D\,,\,F]\phi> := <D^*\phi\,,\,F\phi> - <F^*\phi\,,\,D\phi>\,.$$

Лемма 5.3.5. *Справедливо равенство*

$$\begin{gathered} \forall(\phi \in \mathcal{D}\,,\,a > 0):\ <\phi\,,\,Z(t\,,\,s)\phi>= \\ <\phi\,,\,\exp(iaA)Z(t\,,\,s)\exp(-iaA)\phi> + \\ i\int_0^a <\phi\,,\,\exp(i(a+t)A)[C\,,\,\exp(-i(t-s)B)]\exp(-i(s+b)A)\phi> db. \end{gathered} \tag{5.37}$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$\begin{gathered} <\phi\,,\,Z(t\,,\,s)\phi> - <\phi\,,\,\exp(iaA)Z(t\,,\,s)\exp(-iaA)\phi>= \\ -\int_0^a \frac{d}{db} <\phi\,,\,\exp(ibA)Z(t\,,\,s)\exp(-ibA)\phi> db = \\ -i\int_0^a <\phi\,,\,\exp(i(b+t)A)[A\,,\,\exp(-i(t-s)B)]\exp(-i(s+b)A)\phi> db. \end{gathered}$$

Но

$$[A\,,\,\exp(-i(t-s)B)]=[A+C\,,\,\exp(-i(t-s)B)]-[C\,,\,\exp(-i(t-s)B)],$$
$$[A+C\,,\,\exp(-i(t-s)B)]=[B\,,\,\exp(-i(t-s)B)]=0$$

Лемма доказана.

Лемма 5.3.6. *Справедливо соотношение:*

$$\forall(\phi\in\mathcal{D}):\ \lim_{a\to\infty}\|\exp(iaA)Z(t\,,\,s)\exp(-iaA)\phi\|=0.$$

Доказательство. Имеем:

$$Z(t\,,\,s)\exp(-iaA)\phi=W^*(t)\int_s^t\frac{d}{d\tau}\exp(i\tau B)\exp(-i(\tau+a)A)\phi>d\tau=$$
$$iW^*(t)\int_s^t\exp(i\tau B)(B-A)\exp(-i(\tau+a)A)\phi d\tau.$$

Поэтому в силу леммы 5.3.1

$$\|\exp(iaA)Z(t\,,\,s)\exp(-iaA)\phi\|\leq\int\limits_s^t\|C\exp(-i(\tau+a)A)\phi\|d\tau\to0\,,\,a\to\infty.$$

Лемма доказана.

Положим

$$\forall(\phi\in\mathcal{M}(A)):\ R(g\,,\,\phi\,,\,t)=\int_t^\infty|<g\,,\,\exp(-ibA)\phi>|^2db.$$

Сходимость интеграла следует из леммы М.Розенблюма.

Пусть

$$C\phi=\sum_{1\leq j<\infty}s_j(C)<g_j\,,\,\phi>e_j$$

-разложение Шмидта оператора C. Так как оператор C ядерный (определение ядерного оператора и ядерной нормы см. на стр. 305), то

$$\|C\mid Ncl\|:=\sum_{1\leq j<\infty}s_j(C)<\infty, \tag{5.38}$$

и это неравенство мы ниже учитываем.

Лемма 5.3.7. *Справедлива оценка*

$$\forall(\phi \in \mathcal{M}(A)\,,\, a > 0):$$
$$|\int_0^a <\phi\,,\, \exp(i(t+b)A)\exp(-i(s-t)B)C\exp(-i(s+b)A)\phi > db| \leq$$
$$(2\pi)^{1/2}\|\phi \mid \mathcal{M}(A)\| \sum_{1\leq j<\infty} s_j(C)R(g_j\,,\,\phi\,,\,s)^{1/2}.$$

Доказательство. Имеем:

$$|\int_0^a <\phi\,,\, \exp(i(t+b)A)\exp(-i(s-t)B)C\exp(-i(s+b)A)\phi > db| \leq$$
$$\sum_{1\leq j<\infty} s_j(C)|\int_0^a <\phi\,,\, \exp(i(t+b)A)\exp(-i(s-t)B)e_j > \times$$
$$< g_j\,,\, \exp(-i(s+b)A)\phi > db| \leq$$
$$\sum_{1\leq j<\infty} s_j(C)\left(\int_{-\infty}^{\infty} | <\phi\,,\, \exp(i(t+b)A)\exp(-i(s-t)B)e_j > |^2 db\right)^{1/2} \times$$
$$\left(\int_s^{\infty} | < g_j\,,\, \exp(-ibA)\phi > |^2 db\right)^{1/2}.$$

Далее в силу леммы М.Розенблюма имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} | <\phi\,,\, \exp(i(t+b)A)\exp(-i(s-t)B)e_j > |^2 db =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} | <\exp(-ibA)\phi\,,\, \exp(-i(s-t)B)e_j > |^2 db \leq$$
$$2\pi\|\phi \mid \mathcal{M}(A)\|^2.$$

Подставляя это неравенство в предыдущую оценку, получаем нужное утверждение.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 5.3.8. *Справедлива оценка*

$$\forall(\phi \in \mathcal{M}(A)\,,\, a > 0):$$
$$|\int_0^a <\phi\,,\, \exp(i(t+b)A)\exp(-i(s-t)B)\exp(-i(s+b)A)\phi > db| \leq$$
$$(2\pi)^{1/2}\|\phi \mid \mathcal{M}(A)\| \sum_{1\leq j<\infty} s_j(C)R(e_j\,,\,\phi\,,\,t)^{1/2}.$$

Лемма 5.3.9. *Справедлива оценка:*

$$\forall(\phi \in \mathcal{M}(A)) : \|(W(t) - W(s))\phi\|^2 \leq$$
$$(8\pi)^{1/2}\|\phi \mid \mathcal{M}(A)\| \sum_{1 \leq j < \infty} s_j(C)(R(g_j\,,\,\phi\,,\,s)^{1/2} + R(e_j\,,\,\phi\,,\,t)^{1/2}). \quad (5.39)$$

Доказательство. Сначала используем равенство (5.36). Затем переходим в (5.37) к пределу $a \to \infty$ и используем оценки лемм 5.3.7-5.3.8.

Из оценки (5.39) легко следует утверждение теоремы. Действительно, из леммы М.Розенблюма следует, что

$$(R(g_j\,,\,\phi\,,\,s)^{1/2} + R(e_j\,,\,\phi\,,\,t)^{1/2}) < const.,$$

где $const.$ не зависит от j, и из той же леммы следует, что

$$\forall j : \ (R(g_j\,,\,\phi\,,\,s)^{1/2} + R(e_j\,,\,\phi\,,\,t)^{1/2}) \to 0\,,\ \min(t\,,\,s) \to \infty.$$

Так как ряд (5.38) сходится, то из (5.39) следует, что

$$\forall(\phi \in \mathcal{M}(A)) : \ \|(W(t) - W(s))\phi\| \to 0\,,\ \min(t\,,\,s) \to \infty.$$

Мы доказали, что если $\phi \in \mathcal{M}(A)$, то функция $t \mapsto W(t)\phi$ имеет предел при $t \to \infty$. Так как пространство $\mathcal{M}(A)$ плотно в H_{ac}, то теорема доказана.

Следующее утверждение называется принципом инвариантности волновых операторов и позволяет существенно расширить область применимости теоремы 5.3.1.

Теорема 5.3.2. *Если выполнены условия теоремы 5.3.1 и $h(\lambda)$ -такая действительная непрерывно дифференцируемая функция, что*

$$\forall \lambda : \ |h'(\lambda)| > 0,$$

то волновые операторы $W_{\pm}(h(B)\,,\,h(A))$ существуют, причем

$$(\forall \lambda : h'(\lambda) > 0) \Rightarrow (W_{\pm}(h(B)\,,\,h(A)) = W_{\pm}(B\,,\,A)),$$
$$(\forall \lambda : h'(\lambda) < 0) \Rightarrow (W_{\pm}(h(B)\,,\,h(A)) = W_{\mp}(B\,,\,A)).$$

Доказательство. Полагая в (5.39) $s = 0\,,\ t \to \infty$, мы получаем:

$$\forall(\phi \in \mathcal{M}(A) : \ \|W_{+}(B\,,\,A)\phi - \phi\|^2 \leq$$
$$(8\pi)^{1/2}\|\phi \mid \mathcal{M}(A)\| \sum_{1 \leq j < \infty} s_j(C)R(g_j\,,\,\phi\,,\,\infty)^{1/2} \quad (5.40)$$

В данном неравенстве заменим

$$\phi \to \exp(-i\tau h(A))\phi.$$

В левой части неравенства (5.40) получим:

$$\begin{aligned}
&\|W_+(B\,,\,A)\exp(-i\tau h(A))\phi - \exp(-i\tau h(A))\phi\|^2 = \\
&\|\exp(-i\tau h(B))W_+(B\,,\,A)\phi - \exp(-i\tau h(A))\phi\|^2 = \\
&\|W_+(B\,,\,A)\phi - \exp(i\tau h(B))\exp(-i\tau h(A))\phi\|^2.
\end{aligned}$$

Переходя к правой части неравенства (5.40), во-первых, заметим, что

$$\|\exp(-i\tau h(A))\phi \mid \mathcal{M}(A)\| \equiv \|\phi \mid \mathcal{M}(A)\|.$$

Далее замечаем, что справедлива оценка:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty | < g_j\,,\,\exp(-ibA)\exp(-i\tau h(A))\phi > |^2 db \le \\
&\int_{-\infty}^\infty | < g_j\,,\,\exp(-ibA)\exp(-i\tau h(A))\phi > |^2 db = \\
&\int_{-\infty}^\infty | \int_{-\infty}^\infty \omega(g_j\,,\,\exp(-i\tau h(A))\phi)\exp(-ib\lambda) d\lambda|^2 db = \\
&2\pi \int_{-\infty}^\infty |\omega(g_j\,,\,\exp(-i\tau h(A))\phi\,,\,\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^\infty |\omega(g_j\,,\,\phi\,,\,\lambda)|^2 d\lambda < const.,
\end{aligned}$$

где константа не зависит от j и τ. Если функция

$$\lambda \mapsto \omega(g_j\,,\,\phi\,,\,\lambda)$$

ступенчатая:

$$\omega(g_j\,,\,\phi\,,\,\lambda) = \begin{cases} 1\,,\ \lambda \in [\alpha\,,\,\beta], \\ 0\,,\ \lambda \notin [\alpha\,,\,\beta], \end{cases}$$

то с учетом неравества $h'(\lambda) > 0$ мы имеем оценку:

$$\begin{aligned}
&| \int_{-\infty}^\infty \exp(-i\tau h(\lambda) - ib\lambda)\omega(g_j\,,\,\phi\,,\,\lambda) d\lambda|^2 = \\
&const.| \int_\alpha^\beta \exp(-ib\lambda - i\tau h(\lambda)) d\lambda|^2 < const'.(\tau + b)^{-2},
\end{aligned}$$

из которой следует, что в рассматриваемом случае правая часть неравенства (5.40) стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Общий случай получается из рассмотренного применением теоремы Банаха-Штейнгауза к зависящему от параметра τ семейству отображений пространства $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,d\lambda)$ в пространство $L^2((0\,,\,\infty)\,,\;db))$:

$$\omega \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ib\lambda - i\tau h(\lambda))\omega(\cdot\,,\,\lambda)d\lambda,$$

так как множество линейных комбинаций ступенчатых функций плотно в $L^2(\mathbb{R}^1\,,\,d\lambda)$.

Совершая в неравестве (5.40) предельный переход при $\tau \to \infty$, мы получаем равенство

$$W_+(h(B)\,,\,h(A)) = W_+(B\,,\,A).$$

Если выполнено неравенство $h'(\lambda) < 0$, то в (5.40) мы делаем замену

$$\phi \to \exp(i\tau h(A))\phi$$

и далее расуждаем аналогично. Теорема доказана.

Принцип инвариантности волновых операторов позволяет доказать существования волновых операторов для пары операторов A и B в том случае, если удается подобрать гладкую монотонную функцию $h(\lambda)$ так, чтобы оператор $h(A) - h(B)$ был бы ядерным.

5.4 Формулы для матрицы рассеяния

Изложенный выше метод исследования задачи рассеяния основан на исследовании предела оператора $W(t)$ при $t \to \infty$ и называется нестационарным методом. Другой подход к задаче рассеяния основан на исследовании пределов резольвент операторов A и B при стремлении спектрального параметра к точке непрерывного спектра. Этот метод технически более сложен, но позволяет получить формулы для вычисления волновых операторов и оператора рассеяния.

Установим связь между этими двумя методами. Мы начнем с доказательства нескольких вспомогательных утверждений.

Во-первых, покажем, как строится обобщение теории преобразования Фурье-Планшереля (по другой терминологии -гильбертова преобразования Фурье) на функции со значениями в гильбертовом пространстве.

Пусть $L^2([\mathbb{R}^1 \;\mapsto\; H]\,,\,dt)$ -множество тех непрерывных функций от $t \in \mathbb{R}^1$ со значениями в гильбертовом пространстве H, которые удовлетворяют условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt < \infty.$$

В пространстве $L^2([\mathbb{R}^1 \mapsto H]\,,\, dt)$ введем скалярное произведение

$$[f\,,\,g] := \int_{-\infty}^{\infty} < f(t)\,,\,g(t) > dt$$

и норму

$$\|f \mid L^2([\mathbb{R}^1 \mapsto H]\,,\, dt)\|^2 := [f\,,\,f].$$

Далее тем же символом $L^2([\mathbb{R}^1 \mapsto H]\,,\, dt)$ мы будем обозначать пополнение этого пространства по введенной норме.

На множестве функций $f(t) \in L^2([\mathbb{R}^1 \mapsto H]\,,\, dt)$ с компактным по t носителем определим преобразование Фурье:

$$F(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-it\xi)dt$$

Интеграл по dt здесь понимается как интеграл Бохнера, т. е. как интеграл Римана от функции со значениями в гильбертовом пространстве.

Справедлива формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(f)(\xi)\exp(it\xi)d\xi$$

и равенство Парсеваля

$$[f\,,\,g] = \frac{1}{2\pi}[F(f)\,,\,F(g)].$$

Для доказательства этих формул достаточно заметить, что если $\{e_j\}$ - ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H и

$$f(t) = \sum_j < e_j\,,\,f(t) > e_j$$

разложение функции f по этому базису, то

$$F(f)(\xi) = \sum_j F(< e_j\,,\,f(t) >)(\xi)e_j = \sum_j < e_j\,,\,F(f)(\xi) > e_j,$$

и доказываемые фомулы для функций с компактным по t носителем следуют из классических формул для скалярного преобразования Фурье. На функции из $L^2([\mathbb{R}^1 \mapsto H]\,,\, dt)$ они распространяются по непрерывности.

Второе замечание, которое нам понадобится ниже, состоит в следующем.

Если функция $f(t)$ непрерывна на полуоси $[0\,,\,\infty)$ и

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = a < \infty,$$

то

$$a = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \int_0^\infty \exp(-\epsilon t) f(t) dt.$$

Теперь предположим, что волновые операторы $W_\pm(B\,,\,A)$ существуют. Тогда

$$\begin{aligned}
&< \psi\,,\, W_+(B\,,\,A)\phi >= \lim_{t\to\infty} < \psi\,,\, W(t)\phi >= \\
&\lim_{t\to\infty} < \exp(-itB)\psi\,,\, \exp(-itA)\phi >= \\
&\lim_{\epsilon\to 0} 2\epsilon \int_0^\infty \exp(-2\epsilon t) < \exp(-itB)\psi\,,\, \exp(-itA)\phi > dt = \\
&\lim_{\epsilon\to 0} 2\epsilon \int_{-\infty}^\infty \exp(-2\epsilon t)\theta(t) < \exp(-itB)\psi\,,\, \exp(-itA)\phi > dt.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Найдем преобразование Фурье функции

$$g(t)\colon\; t \mapsto \theta(t)\exp(-\epsilon t - itB)\psi.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
&F(g)(\xi) = \int_{-\infty}^\infty \theta(t)\exp(-i\xi t - \epsilon t - itB)\psi dt = \\
&\int_{-\infty}^\infty [\int_0^\infty \exp(-i\xi t - \epsilon t - it\lambda)dt] d_\lambda E(\lambda\,,\,B)\psi = \\
&\int_{-\infty}^\infty (i\xi + i\lambda + \epsilon)^{-1} d_\lambda E(\lambda\,,\,B)\psi = iR(i\epsilon - \xi\,,\,B)\psi.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля, из (5.41) получим:

$$< \psi\,,\, W_+(B\,,\,A)\phi >= \lim_{\epsilon\to +0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^\infty < R(\lambda + i\epsilon\,,\,B)\psi\,,\, R(\lambda + i\epsilon\,,\,A)\phi > d\lambda. \tag{5.42}$$

Аналогично доказывается равенство

$$< \psi\,,\, W_-(B\,,\,A)\phi >= \lim_{\epsilon\to +0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^\infty < R(\lambda - i\epsilon\,,\,B)\psi\,,\, R(\lambda - i\epsilon\,,\,A)\phi > d\lambda. \tag{5.43}$$

В общем случае вычисление пределов (5.42)-(5.43) -довольно трудная задача, однако в рассмотренной нами (см. стр. 323) модели Фридерихса эти пределы легко вычисляются.

Воспользовавшись формулами (4.145)-(4.146), мы получаем:

$$\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} < R(\lambda+i\epsilon\,,\,B)\psi\,,\,R(\lambda+i\epsilon\,,\,A)\phi > d\lambda =$$
$$\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} < Q(\lambda+i\epsilon\,,\,B)\psi\,,\,R(\lambda+i\epsilon\,,\,A)R(\lambda-i\epsilon\,,\,A)\phi > d\lambda =$$
$$\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_0^1 Q(\lambda+i\epsilon\,,\,B)\psi(x)^*((x-\lambda)^2+\epsilon^2)^{-1}\phi(x)dx)d\lambda \rightarrow$$
$$\int_0^1 Z_+\psi(x)^*\phi(x)dx =< \psi\,,\,Z_+^*\phi > .$$

Следовательно

$$W_\pm\phi = Z_\pm^*\phi,$$

где операторы $Z_\pm^*$ определены формулой (4.148) на стр. 324.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Операторы $Z_\pm$ диагонализуют оператор B и удовлетворяют соотношению:

$$Z_\pm B = AZ_\pm\ ,\ BZ_\pm^* = Z_\pm^* A,$$

что согласуется со сплетающим свойством волновых операторов.

Так как операторы $Z_\pm$ унитарны, то справедлива формула

$$W_\pm = Z_\pm^* = Z_\pm^{-1}.$$

Матрица рассеяния в диагональном представлении оператора A. Предположим, что пространство H диагонализует оператор A:

$$H = L^2((a\,,\,b)\mapsto h)\ ,\ h = L^2(\Omega\,,\,d\omega),$$
$$A\phi(\mu\,,\,\omega) = \mu\phi(\mu\,,\,\omega).$$

Предположим, что в этом представлении оператор $T(\lambda)$ при $Re\,\lambda \geq 0$ есть интегральный оператор с гладким (непрерывным и ограниченным) по переменным $\lambda\,,\,\mu\,,\,\nu$ ядром:

$$\forall\lambda > 0 :\ T(\lambda)\phi(\mu\,,\,\omega) = \int t(\lambda+i0\ \mid\ \mu\,,\,\omega\,;\,\nu\,,\,\omega')\phi(\nu\,,\,\omega')d\nu d\omega'. \quad (5.44)$$

Теорема 5.4.1. *Пусть выполнены сделанные выше предположения и оператор $B - A$ ядерный. Тогда оператор рассеяния в пространстве H задается формулой:*

$$S(B\,,\,A)\psi(\lambda\,,\,\omega) = \psi(\lambda\,,\,\omega) - 2\pi i\int t(\lambda + i0\ \mid\ \lambda\,,\,\omega\,,\,\lambda\,,\,\omega')\psi(\lambda\,,\,\omega')d\omega'. \tag{5.45}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{id} - S(B\,,\,A) = W_+^*(B\,,\,A)W_+(B\,,\,A) - W_+^*(B\,,\,A)W_-(B\,,\,A)\,,\\
&\mathsf{id} - S(B\,,\,A) = W_+^*(B\,,\,A)(W_+(B\,,\,A) - W_-(B\,,\,A))\,,\\
&<\phi\,,\,(\mathsf{id} - S(B\,,\,A))\psi>=\\
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}<\phi\,,\,W_+^*(B\,,\,A)\exp(iBt)\exp(-iAt)\psi>dt=\\
&i\int_{-\infty}^{+\infty}<\phi\,,\,W_+^*(B\,,\,A)\exp(iBt)(B-A)\exp(-iAt)\psi>dt=\\
&i\int_{-\infty}^{+\infty}<\exp(-iBt)W_+(B\,,\,A)\phi\,,\,(B-A)\exp(-iAt)\psi>dt=\\
&i\int_{-\infty}^{+\infty}<W_+(B\,,\,A)\exp(-iAt)\phi\,,\,(B-A)\exp(-iAt)\psi>dt=\\
&i\int_{-\infty}^{+\infty}<\exp(-iAt)\phi\,,\,W_+(B\,,\,A)^*(B-A)\exp(-iAt)\psi>dt.
\end{aligned}$$

Теперь учтем, что согласно (5.42) на стр. 392 и (3.115) на стр. 191:

$$\begin{aligned}
&<\exp(-iAt)\phi\,,\,W_+(B\,,\,A)^*(B-A)\exp(-iAt)\psi>=\\
&\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}<R(\lambda+i\epsilon\,,\,A)\exp(-iAt)\phi\,,\,R(\lambda+i\epsilon\,,\,B)(B-A)\exp(-iAt)\psi>=\\
&\lim_{\epsilon\to+0}\frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}<R(\lambda-i\epsilon\,,\,A)R(\lambda+i\epsilon\,,\,A)\exp(-iAt)\phi\,,\,T(\lambda+i\epsilon\,,\,A\,,\,B)\exp(-iAt)\psi>.
\end{aligned}$$

В диагональном представлении оператора A:

$$\begin{aligned}
&\frac{\epsilon}{\pi}R(\lambda-i\epsilon\,,\,A)R(\lambda+i\epsilon\,,\,A) = \frac{\epsilon}{\pi}((\lambda-\mu)^2+\epsilon^2)^{-1}\to\delta(\lambda-\mu)\,,\\
&\int<\ldots\exp(-iAt)\ldots\,,\,\ldots\exp(-iAt)\ldots>dt=\\
&\int(\ldots\cdot\int\exp(i(\nu-\mu)t)dt)d\mu = 2\pi\int(\ldots\cdot\ldots\delta(\nu-\mu))d\mu.
\end{aligned}$$

Теорема дказана.

В случа модели Фридрихса пространство Ω состоит из одной точки, и

$$S\phi(\lambda) = (1 - \frac{2\pi i \alpha(\lambda)^2}{1 - g(\lambda + i0)})\phi(\lambda) =$$
$$\frac{1 - g(\lambda + i0) - 2\pi i \alpha(\lambda)^2}{1 - g(\lambda + i0)}\phi(\lambda) = \frac{1 - g(\lambda - i0)}{1 - g(\lambda + i0)}\phi(\lambda).$$

Мы получили классческую формулу.

5.5 Комментарии и литератутные указания

На русском языке изложение математической теории рассеяния есть в книге [22]. В этой книге изложен очень большой материал и подразумевается, что читатель может сам восстановить многие технические детали рассуждений.

Покажем, как традиционные задачи дифракции и рассеяния на короткодействующем потенциале можно исследовать изложенными выше методами. Пусть L_0 и L дифференциальные операторы, которые описывают невозмущенную и возмущенную задачи. Для простоты будем считать, что L_0 и L -дифференциальные операторы эллиптического типа. Пусть $G_0(\beta)$ и $G(\beta)$ -функции Грина задач Коши:

$$\partial_\beta G_0(\beta) = -L_0 G_0(\beta)\ ,\ \partial_\beta G(\beta) = -LG(\beta).$$

Функции Грина строятся традиционными методами теории дифференциальных уравнений: последовательными приближениями, потенциалами, продолжением по параметру. Соответствующие построения подробно описаны в учебной литетатуре. При широких предположениях операторы $G_0(\beta)$ и $G(\beta)$ -интегральные операторы с “хорошими” ядрами. Далее самосопряженные расширения операторов $-L_0$ и $-L$ определяем как инфинитезимальные операторы полугрупп $\beta \mapsto G_0(\beta)$, $\beta \mapsto G(\beta)$ и полагаем $A = G_0(\beta)$, $B = G(\beta)$. Если оператор $L - L_0$ подчинен (в смысле теории дифференциальных уравнений) оператору L_0, то оператор $B - A$ оказывается, как правило, ядерным и можно применять изложенную выше теорию. Имеющие физический смысл величины обычно выражаются через собственные функции непрерывнрго спектра операторов A и B, а эти собственные функции совпадают с собственными функциями операторов G_0 и G.

Глава 6

Распределения.

Эта глава посвящена элементарной теории распределений (в русской математической литературе распределения часто называют обобщенными функциями) и ее можно читать независимо от остальных глав. Конечно, знакомый с содержанием главы 2 Читатель в приведенных конструкциях узнает прием построения топологии с помощью базы окрестностей нуля и топологии, индуцированной системой отображений, знакомый с содержанием главы 3 в доказательстве теоремы о полноте пространства распределений узнает вариант принципа равномерной ограниченности и т. д. Однако для понимания всех (за исключением теоремы о существовании фундаментального решения дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами) утверждений данной главы вполне достаточно тех сведений из математического анализа и начал функционального анализа, которые обычно сообщаются студентам на первом и втором курсах физических факультетов университетов. Теоема о существовании фундаментального решения опирается на теорему Хана-Банаха, которую можно принять без доказательства.

6.1 Пространство пробных функций.

В теории распределений основными являются два объекта: пространство пробных функций и пространство распределений. Пространство пробных функций -это чаще всего линейное пространство L, на котором задано некоторое множество норм

$$\| \quad \|_\alpha : L \ni x \mapsto \|x\|_\alpha \in \mathbb{R}^1_+ \,,\ \alpha \in I.$$

Нормой на линейном пространстве называется такая функция $\| \quad \|$, которая удовлетворяет условиям:

$$1.\forall(x \in L) : \|x\| \geq 0 \; , \; (\|x\| = 0) \iff (x = 0).$$
$$2.\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$
$$3.\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$

Мы рассмотрим два пространства пробных функций: пространство Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ и пространство функций с компактными носителями $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Напомним, что носителем функции $\phi(x)$ называется замыкание множества тех точек x, где $|\phi(x)| > 0$:

$$\mathrm{supp}\phi := \mathbf{Cl}(\{x \mid |\phi(x)| > 0 \mid x \in \mathbb{R}^d\}),$$

а компактные множества в $\mathbb{R}^d$ -это ограниченные замкнутые множества.

6.1.1 Пространство Шварца.

Сначала мы рассмотрим пространство Шварца на прямой $S(\mathbb{R}^1)$, обобщение на случай пространства $\mathbb{R}^d$ получается переосмыслением обозначений. Пусть

$$x \in \mathbb{R}^1 \; , \; D_x^m = (-i\partial_x)^m.$$

Если это не может вызвать недоразумений, в дальнейшем мы будем опускать указание на переменную, по которой берется производная:

$$D^m \equiv D_x^m.$$

В современой теории дифференциальных уравнений широко применяется преобразование Фурье, введение множителя $-i$ в оператор дифференцирования избавляет от необходимости писать этот множитель во многих связанных с преобразованием Фурье формулах и стало общепринятым.

Определение 6.1.1. Функция $\phi(x)$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R}^1)$, если она бесконечно дифференцируема и вместе с производными убывает на бесконечности быстрее любой степени $|x|$:

$$(\phi \in S) \Leftrightarrow (\forall(m\, , \, p) : \; \sup\{(1 + x^2)^{p/2}|D_x^m\phi(x)| \mid x \in \mathbb{R}^1\} < \infty). \tag{6.1}$$

Положим

$$\|\phi \mid (N\, , \, S)\| := \sum_{\substack{0 \leq m \leq N, \\ 0 \leq p \leq N.}} \sup\{(1 + x^2)^{p/2}|D_x^m\phi(x)| \mid x \in \mathbb{R}^1\}. \tag{6.2}$$

Определение 6.1.1 эквивалентно определению

Определение 6.1.2. Функция ϕ принадлежит пространству Шварца $S(\mathbb{R}^1)$, если

$$\forall N : \|\phi \mid (N\,,\, S)\| < \infty. \tag{6.3}$$

Отметим полезное неравенство

$$\forall (m \le N\,,\, p \le N) : \ |D_x^m \phi(x)| \le (1+x^2)^{-p/2} \|\phi \mid (N\,,\, S)\|.$$

Следующие функции принадлежат пространству $S(\mathbb{R}^1)$:

$$\exp(-x^2)\ ,\ 1/\operatorname{ch}(x)\ ,\ \exp(-(1+x^2)^{\alpha})\,,\ \alpha > 0.$$

Свойства функций из пространства $S(\mathbb{R}^1)$.

Перечислим некоторые очевидные свойства пространства $S(\mathbb{R}^1)$.

Лемма 6.1.1. *1. Пространство $S(\mathbb{R}^1)$ -линейное пространство:*

$$\forall (\phi\,,\, \psi \in S(\mathbb{R}^1)) : \alpha\phi + \beta\psi \in S(\mathbb{R}^1).$$

2. Пространство $S(\mathbb{R}^1)$ есть алгебра относительно поточечного умножения функций:

$$\forall (\phi(x) \in S(\mathbb{R}^1)\,,\, \psi(x) \in S(\mathbb{R}^1)) : \phi(x) \cdot \psi(x) \in S(\mathbb{R}^1).$$

3. Если $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$, то $D^m\phi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$, причем

$$\|D^m\phi \mid (N\,,\, S)\| \le \|\phi \mid (N+m\,,\, S)\|. \tag{6.4}$$

4. Если $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$ и $\mathcal{P}(x)$-любой полином, то $\mathcal{P}(x)\phi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$.

Это свойство можно уточнить: очевидно, что если $\phi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$ и $\psi(x)$-любая бесконечно дифференцируемая функция, которая вместе со всеми производными растет не быстрее степени $|x|$:

$$\forall m\,,\, \exists (C(m)\,,\, n(m))\,,\, \forall x : |D_x^m \psi(x)| < C(m)(1+|x|)^{n(m)},$$

то $\psi(x)\phi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$.

Напомним определение преобразования Фурье в пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
&F(\phi)(\xi) := \int \cdots \int \exp(-ix\xi)\phi(x)dx\,,\\
&x = (x_1, \ldots x_d)\,,\, dx = dx_1 \ldots dx_d,\\
&x\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_d\xi_d,
\end{aligned}$$

формулу обратного преобразования Фурье:

$$\phi(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int \cdots \int \exp(ix\xi) F(\phi)(\xi) d\xi.$$

и равенство Парсеваля:

$$\int \cdots \int \phi(x)^* \psi(x) dx = (2\pi)^{-d} \int \cdots \int F(\phi)^*(\xi) F(\psi)(\xi) d\xi.$$

Иногда в формуле для преобразования Фурье берут знак плюс в экспоненте и соответственно знак минус в экспоненте в формуле для обратного преобразования Фурье. Это приводит к изменению знаков в некоторых других формулах.

Поясним пользу от введения оператора D. Применяя оператор D к обеим частям равенства в формуле для обратного преобразоваания Фурье в одномерном случае, мы получаем:

$$D\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix\xi) \xi F(\phi)(\xi) d\xi.$$

Следовательно,

$$F(D^m \phi)(\xi) = \xi^m F(\phi)(\xi). \tag{6.5}$$

Мы видим, что оператор D просто коммутирует с оператором дифференцирования: никаких дополнительных множителей не появляется.

Напомним формулу для преобразования Фурье от гауссовой экспоненты:

$$\int \cdots \int \exp(-ax^2 - ix\xi) dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} \exp(-\xi^2/4a).$$

В дальнейшем нам будет удобно упростить обозначения: мы будем считать, что

$$\int \cdots \int (\ldots) dx \equiv \int (\ldots) dx.$$

Лемма 6.1.2. *1. Если $\phi \in S(\mathbb{R}^1)$, то $F(\phi) \in S(\mathbb{R}^1)$ и*

$$\begin{gathered} \forall N\,,\ \exists (C(N)\,,\ M(N))\,,\ \forall (\phi \in S): \\ \|F(\phi) \mid (N\,,\ S)\| \leq C(N) \|\phi \mid (M(N)\,,\ S)\|. \end{gathered} \tag{6.6}$$

2. Если $F(\phi) \in S(\mathbb{R}^1)$, то $\phi \in S(\mathbb{R}^1)$, причем

$$\begin{gathered} \forall N\,,\ \exists (C(N)\,,\ M(N))\,,\ \forall \phi: \\ \|\phi \mid (N\,,\ S)\| \leq C(N) \|F(\phi) \mid (M(N)\,,\ S)\|. \end{gathered}$$

Доказательство. Достаточно доказать первое утверждение. Пусть $x \in \mathbb{R}^1$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&|D_x^m F(\phi)(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ixy) y^m \phi(y) dy\right|,\\
&\left|(1+x^2)^{p/2} D_x^m F(\phi)(x)\right| \leq \left|(1+x^2)^p D_x^m F(\phi)(x)\right| =\\
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty} ((1-D_y^2)^p \exp(-ixy)) y^m \phi(y) dy\right|
\end{aligned}$$

(интегрируем по частям)

$$\leq \left|\int_{-\infty}^{+\infty} |(1-D_y^2)^p y^m \phi(y)| dy\right|.$$

Но очевидно (вспомним формулу для производной от произведения двух функций), что существует такая константа $C(p\,,\,m)$, что справедливо неравенство

$$\forall y:\ |(1-D_y^2)^p y^m \phi(y)| \leq C(p\,,\,m)(1+y^2)^{-1} \|\phi \mid (2p+m+2\,,\,S)\|.$$

Из этого и предыдущего неравенств следует неравенство

$$\begin{aligned}
&\forall (m\,,\,p):\ \sup\{\left|(1+x^2)^p D^m F(\phi)(x)\right| \mid x \in \mathbb{R}^1\}\\
&\leq C(p\,,\,m)' \|\phi \mid (2p+m+2\,,\,S)\|,
\end{aligned}$$

из которого и следует утверждение леммы.

Так как преобразование Фурье свертки двух функций есть произведение преобразований Фурье этих функций, то из доказанной леммы вытекает

Следствие 6.1.1. *Если $\phi\,,\,\psi \in S(\mathbb{R}^1)$, то их свертка:*

$$\phi * \psi(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)\psi(x-y) dy$$

принадлежит пространству $S(\mathbb{R}^1)$.

Пространство Шварца функций в $\mathbb{R}^d$.

Укажем, какие изменения нужно сделать в предыдущих рассуждениях, чтобы рассмотреть пространство Шварца функций в $\mathbb{R}^d$. Положим в предыдущих рассуждениях

$$x = (x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,x_d); \tag{6.7}$$

$$m = (m_1\,,\,m_2\,,\,\ldots m_d)\,,\ |m| = m_1 + m_2 + \cdots m_d. \tag{6.8}$$

$$D_x^m = (-i\partial_{x_1})^{m_1}(-i\partial_{x_2})^{m_2}\ldots(-i\partial_{x_d})^{m_d}. \tag{6.9}$$

Далее в предыдущих рассуждениях нужно заменить суммирование по индексам $0 \leq m \leq N$ на суммирование по индексам $0 \leq |m| \leq N$, интеграл по прямой нужно заменить на интеграл по пространству $\mathbb{R}^d$, оператор D_y^2 нужно заменить на оператор Лапласа Δ_y. Все остальные рассуждения и формулы остаются без изменения.

Формула (6.5) верна и в многомерном случае, если положить по определению

$$\forall(\xi \in \mathbb{R}^d) : \xi^m = \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\ldots\xi_d^{m_d}.$$

Ниже мы будем считать, что наши рассуждения относятся к пространству Шварца функций в $\mathbb{R}^d$. Таким образом, в дальнешем мы полагаем

$$\|\phi \mid (N\,,\, S)\| := \sum_{\substack{0\leq|m|\leq N,\\ 0\leq p\leq N.}} \sup\{(1+x^2)^{p/2}|D_x^m\phi(x)| \mid x\in\mathbb{R}^d\}. \tag{6.10}$$

6.1.2 Сходимость в простанстве $S(\mathbb{R}^d)$.

Введем понятие сходящейся в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$ последовательности.

Определение 6.1.3. Последовательность $\{\phi_n\} \subset S(\mathbb{R}^d)$ сходится к функции $\phi \in S$ в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$, если

$$\forall N : \|(\phi_n - \phi) \mid (N\,,\, S)\| \to 0\,,\; n\to\infty. \tag{6.11}$$

Сходимость в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$ (условие (6.11)) мы будем обозначать так:

$$\phi_n \xrightarrow{S} \phi\,,\; n\to\infty.$$

Положим

$$\forall(\phi\,,\,\psi\in S) : d_S(\phi\,,\,\psi) := \sum_{0\leq N<\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{\|(\phi-\psi) \mid (N\,,\,S)\|}{1+\|(\phi-\psi)\mid(N\,,\,S)\|}.$$

Ясно, что условие (6.11) эквивалентно условию

$$d_S(\phi_n\,,\,\phi) \to 0\,,\; n\to\infty.$$

Читателю предлагается проверить, что следующие последовательности сходятся к нулю в пространстве S:

$$\exp(-(nx^2+x^{-2}))\,,\; (\exp(-x^2/n)-1)\phi(x)\,,\; \phi\in S(\mathbb{R}^d), \tag{6.12}$$

а последовательность

$$(1/n)^{100}\exp(-nx^2)$$

не сходится к нулю в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$.

Определение 6.1.4. Последовательность $\{\phi_n\} \subset S(\mathbb{R}^d)$ фундаментальна в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$, если

$$\forall N: \lim_{n\to\infty} \sup_{m>0} \|(\phi_{n+m} - \phi_n) \mid (N\,, S)\| = 0. \tag{6.13}$$

Теорема 6.1.1. *Последовательность $\{\phi_n\}$ сходится в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$ в том и только том случае, если она фундаментальна в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. Необходимость доказывается дословным повторением доказательства необходимости условия Коши для сходимости последовательности в метрическом пространстве. Докажем достаточность, т. е. полноту пространства Шварца относительно метрики d_S.

Пусть B_N -пополнение пространства $S(\mathbb{R}^d)$ по норме $\| \quad \mid (N\,, S)\|$. Если последовательность $\{\phi_n\}$ фундаментальна в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$, то она фундаментальна в каждом пространстве B_N, поэтому

$$\forall N\,, \exists(\phi^{(N)} \in B_N): \ \|\phi_n - \phi^{(N)}\| \to 0\,, \, n \to \infty.$$

Так как

$$B_{N+1} \subset B_N,$$

то

$$\phi^{(N+1)} = \phi^{(N)} := \phi \in \bigcap_{0\le N<\infty} B_N = S(\mathbb{R}^d),$$

и

$$\forall N: \|\phi_n - \phi \mid (N\,, S)\| \to 0\,, \, n \to \infty,$$

а это и означает, что последовательность $\{\phi_n\}$ сходится в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$ к функции ϕ. Теорема доказана.

6.1.3 Непрерывные операторы в пространстве основных функций.

Определение 6.1.5. Линейный оператор

$$A: S(\mathbb{R}^d) \mapsto S(\mathbb{R}^d) \tag{6.14}$$

непрерывен в пространстве Шварца, если из условия

$$\phi_n \xrightarrow{S} 0\,, \, n \to \infty \tag{6.15}$$

следует, что

$$A(\phi_n) \xrightarrow{S} 0\,, \, n \to \infty. \tag{6.16}$$

Теорема 6.1.2. *Линейный оператор*

$$A : S \mapsto S$$

непрерывен в пространстве Шварца в том и только том случае, если

$$\begin{aligned} &\forall N\,,\ \exists (C(N)\,,\ M(N))\,,\ \forall \phi \in S : \\ &\|A(\phi) \mid (N\,,\ S)\| \le C(N) \|\phi \mid (M(N)\,,\ S)\|. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Доказательство. В доказательстве нуждается только необходимость условия (6.17). Пусть оператор A непрерывен, но условие (6.17) не выполнено. Тогда существует такое N_0 и такая последовательность $\phi_n \in S$, что

$$\|A(\phi_n) \mid (N_0\,,\ S)\| \ge n^2 \|\phi_n \mid (n\,,\ S)\|.$$

Положим

$$\psi_n = \phi_n / (n \|\phi_n \mid (n\,,\ S)\|)\ .$$

Так как

$$\forall (n \ge M) : \|\psi_n \mid (M\,,\ S)\| \le \|\psi_n \mid (n\,,\ S)\| = 1/n \to 0\,,\ n \to \infty,$$

то

$$\psi_n \xrightarrow{S} 0\,,\ n \to \infty.$$

Но

$$\|A(\psi_n) \mid (N_0\,,\ S)\| \ge n \to \infty\,,\ n \to \infty,$$

что противоречит непрерывности оператора A. Теорема доказана.

Из доказаной теоремы вытекает

Теорема 6.1.3. *Операции дифференцирования, умножения на полином, невырожденной линейной замены переменных:*

$$\phi(x) \mapsto \phi(Ax + b)\,,\ detA \ne 0,$$

преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье непрерывны в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$.

6.1.4 Пространство пробных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Определение 6.1.6. Компактное множесво K_1 строго содержится в компактном множестве K_2:

$$K_1 \Subset K_2,$$

если существует такое открытое множество $\mathcal{O}$, что

$$K_1 \subset \mathcal{O} \subset K_2.$$

Определение 6.1.7. Заданная в пространстве $\mathbb{R}^d$ функция $\phi(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, если носитель функции $\phi(x)$ компактен и функция $\phi(x)$ бесконечно дифференцируема.

Положим

$$\begin{aligned}
&\forall(\phi\,,\,\mathrm{supp}\phi \Subset K):\\
&\|\phi \mid (N\,,\,\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,,\,K)\| := \sum_{0\le|m|\le N} \sup\{|D_x^m\phi(x)| \mid x\in K\}.
\end{aligned}$$

Определение 6.1.7 эквивалентно следуещему:

$$(\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)) \Leftrightarrow (\exists K\,,\,\mathrm{supp}\phi\Subset K\ ,\ \forall N : \|\phi \mid (N\,,\,\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,,\,K)\| < \infty),$$

где K -компактное в $\mathbb{R}^d$ множество.

При расмотрении функций из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ полезно иметь пример функции типа “шапочка” (или “гриб”). Приведем пример такой функции.

Пусть $t\in\mathbb{R}^1$. Положим

$$\phi_0(t) = \begin{cases} \exp(-(1-t^2)^{-2})\ ,\ \text{если } |t|<1,\\ 0\ ,\ \text{если } |t|\ge 1.\end{cases}$$

Определим константу C из условия

$$C\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_0(t)dt = 1$$

и положим

$$\begin{aligned}
&\phi_1(t) = C\int_{-\infty}^{t}\phi_0(\xi)d\xi,\\
&\varkappa(x\,,\,x_0\,,\,R\,,\,\epsilon) = \phi_1((R^2-(x-x_0)^2)/\epsilon^2). \qquad (6.18)
\end{aligned}$$

Функция $\varkappa(x\,,\,x_0\,,\,R\,,\,\epsilon)$ бесконечно дифференцируема и удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}
&\forall x:\ 0\le\varkappa(x\,,\,x_0\,,\,R\,,\,\epsilon)\le 1,\\
&\varkappa(x\,,\,x_0\,,\,R\,,\,\epsilon) = \begin{cases}1\ ,\ (x-x_0)^2 < R^2-\epsilon^2,\\ 0\ ,\ (x-x_0)^2 > R^2+\epsilon^2.\end{cases}
\end{aligned}$$

Иногда удобнее рассмотреть функцию вида

$$\kappa(x) = \kappa_1(x_1)\ldots\kappa_d(x_d)\,,\ x=(x_1,\ldots x_d)\in\mathbb{R}^d,$$

где

$$\kappa_j(x_j) = \varkappa(x_j\,,\, x_{0,j}\,,\, R_j\,,\, \epsilon_j)\,,\; x_j \in \mathbb{R}^1$$

Теперь легко привести пример функции из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$: достаточно взять любую бесконечно дифференцируемую функцию и умножить ее на функцию $\varkappa(x\,,\, x_0\,,\, R\,,\, \epsilon)$.

Для функций из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ справедливы утверждения леммы 6.1.1, но преобразование Фурье функции из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ есть целая функция и *не принадлежит пространству* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Сходимость в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Определение 6.1.8. 1. Последовательность $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ сходится к нулю в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, если выполнены два условия:

$$1.\ \exists K\,,\, \forall n:\ \mathrm{supp}\phi_n \Subset K\ ,\ K\ -\text{компакт и не зависит от } n, \tag{6.19}$$

$$2.\ \forall N:\ \|\phi_n \mid (N\,,\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,,\, K)\| \to 0\,,\, n \to \infty. \tag{6.20}$$

2. Последовательность $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ сходится к функции $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, если последовательность $(\phi_n - \phi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ сходится к нулю в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Определение 6.1.9. Последовательность $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ фундаментальна в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, если выполнены два условия:

$$1.\ \exists K\,,\, \forall n:\ \mathrm{supp}\phi_n \Subset K\ ,\ K \text{ компакт и не зависит от } n, \tag{6.21}$$

$$2.\ \forall N:\ \lim_{n\to\infty} \sup_{m>0} \|\phi_{n+m} - \phi_n \mid (N\,,\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,,\, K)\| = 0. \tag{6.22}$$

Дословным повторением проведенных для пространства Шварца рассуждений легко доказать, что последовательность $\phi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ сходится в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ к функции $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ в том и только том случае, если она фундаментальна в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, но для пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *не существует метрики*, которая задавала бы сходимость.

6.2 Распределения.

Те элементарные факты из теории распределений, которые будут доказаны ниже, формулируются и доказываются одинаково и для пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, и для пространства $S(\mathbb{R}^d)$. Для определенности мы в основном рассмотрим случай пространства $S(\mathbb{R}^d)$, оставив читателю формулировку и полные доказательства для случая пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (как правило, в случае пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ доказательства можно упростить).

6.2.1 Медленно растущие распределения.

Отображение
$$f\,:\,S(\mathbb{R}^d)\ni\phi\mapsto f(\phi)\in\mathbb{C}^1$$
называется линейным функционалом на пространстве $S(\mathbb{R}^d)$, если
$$\forall(\phi_1\,,\,\phi_2\in S(\mathbb{R}^d))\,:\,f(\alpha\phi_1+\beta\phi_2)=\alpha f(\phi_1)+\beta f(\phi_2).$$

Линейный функционал на пространстве Шварца f называется непрерывным, если
$$(\forall(\phi_n\xrightarrow{S}0\,,\,n\to\infty))\Rightarrow(f(\phi_n)\to 0\,,\,n\to\infty).$$

Определение 6.2.1. Линейный непрерывный функционал на пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ называется медленно растущим распределением.

Множество всех медленно растущих распределений обозначается символом $S(\mathbb{R}^d)^\star$.

Приведем примеры.

Пусть функция $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^1$, кусочно-непрерывна и удовлетворяет оценке
$$\forall\,x:\,|f(x)|\le C(1+|x|)^m. \tag{6.23}$$
Положим
$$\forall(\phi\in S):\,f(\phi)=\int f(x)\phi(x)dx. \tag{6.24}$$
Справедлива очевидная оценка:
$$|f(\phi)|\le C'\|\phi\mid(m+2\,,\,S)\|,$$
из которой следует, что заданный формулой (6.24) линейный функционал непрерывен на $S(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, формула (6.24) задает медленно растущее распределение. Если функция $f(x)$ и функционал f связаны равенством (6.24), то говорят, что функционал f задается функцией $f(x)$ или что функция $f(x)$ задает функционал f.

Функционал и задающий этот функционал функцию мы обозначили одним и тем же символом. Это не может привести к недоразумениям, так как аргумент функции есть точка пространства $\mathbb{R}^d$, а аргумент функционала есть функция и из контекста обычно бывает ясно, о чем идет речь. Термин “медленно растущее” объясняется тем, что функция $f(x)$ в (6.24) растет не быстрее степени. Однако не любое медленно растущее распределение можно представить в виде (6.24). Функционал
$$\delta(\phi)\stackrel{\text{def}}{=}\phi(0) \tag{6.25}$$

линеен и непрерывен, но он не может быть представлен как интеграл Римана от произведения кусочно-непрерывной функции и функции из пространства Шварца.

Задаваемый формулой (6.25) функционал называется δ-функцией.

Позже мы докажем, что любое медленно растущее распределение можно в некотором смысле представить как *предел* распределений вида (6.24).

Иногда, чтобы подчеркнуть, что функционал f применяется к функции

$$y \mapsto \phi(y),$$

значение функционала f на функции ϕ мы будем обозначать символом $f_y(\phi(y))$.

Теорема 6.2.1. *Линейный функционал f на пространстве Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ непрерывен в том и только том случае, если*

$$\exists\,(N\,,\,C)\,,\,\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d))\,:\;|f(\phi)| \leq C\|\phi\mid(N\,,\,S)\|. \tag{6.26}$$

Достаточность условия (6.26) очевидна из определения сходимости к нулю в пространстве Шварца. Доказательство необходимости условия (6.26) аналогично доказательству теоремы 6.1.2. Пусть условие (6.26) не выполнено. Тогда существует такая последовательность $\phi_n \in S$, что

$$|f(\phi_n)| \geq n^2\|\phi_n \mid (n\,,\,S)\|.$$

Положим

$$\psi_n = \phi_n/(n\|\phi_n \mid (n\,,\,S)\|)\,.$$

Так как

$$\forall(n \geq M)\,:\,\|\psi_n \mid (M\,,\,S)\| \leq \|\psi_n \mid (n\,,\,S)\| = 1/n \to 0\,,\,n \to \infty,$$

то

$$\psi_n \xrightarrow{S} 0\,,\,n \to \infty.$$

Но

$$|f(\psi_n)| \geq n \to \infty\,,\,n \to \infty,$$

что противоречит непрерывности функционала f. Теорема доказана.

Теорема 6.2.2. *Если $f \in S(\mathbb{R}^d)^\star$, то существует такая последовательность непрерывных функций с компактными носителями $f_n(x)$, что*

$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d))\,:\;f(\phi) = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\phi(x)dx. \tag{6.27}$$

Доказательству теоремы мы предпошлем несколько лемм.

Лемма 6.2.1. *Если* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ *и функция* $\varkappa(x\,,\,x_0\,,\,R\,,\,\epsilon)$ *определена равенством* (6.18), *то*

$$\varkappa(x\,,\,0\,,\,R\,,\,1)\phi(x) \xrightarrow{S} \phi(x)\,,\,R \to \infty. \tag{6.28}$$

Для доказательства леммы достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}&\|(\varkappa(\cdot\,,\,0\,,\,R\,,\,1) - 1)\phi \mid (N\,,\,S)\| \\ &\leq C(1+R^2)^{-1}\|\phi \mid (N+2\,,\,S)\|.\end{aligned}$$

Положим

$$\omega(x\,,\,a) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{d/2} \exp(-ax^2). \tag{6.29}$$

Лемма 6.2.2. *Если* $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$\int \omega(x-y\,,\,a)\phi(y)dy \xrightarrow{S} \phi(x)\,,\,a \to \infty. \tag{6.30}$$

Для доказательства леммы нужно вычислить преобразование Фурье от правой части (6.30), воспользоваться примером (6.12) и непрерывностью преобразования Фурье.

Пусть B_N -банахово пространство, полученное пополнением пространства $S(\mathbb{R}^d)$ по норме $\| \quad \mid (N\,,\,S)\|$, $\phi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. При фиксированном $y \in \mathbb{R}^d$ функция $\omega(x-y\,,\,a)$, рассматриваемая как функция переменной x, принадлежит пространству B_N.

Лемма 6.2.3. *Функция*

$$\mathbb{R}^d \ni y \to \omega(x-y\,,\,a) \in B_N,$$

рассматриваемая как функция переменной y *со значениями в банаховом пространстве* B_N, *непрерывно дифференцируема.*

Доказательство этой леммы предоставляется читателю в качестве упражнения (следует разложить функцию $\omega(x-y\,,\,a)$ в ряд Тейлора по y в окрестности точки $y = y_0$, воспользоваться интегральной формулой для остаточного члена ряда Тейлора и оценить норму остаточного члена в пространстве B_N).

Чтобы не загромождать изложение сложными обозначениями, дальнейшее доказательство мы проведем для случая $d = 1$. Пусть

$$
\begin{aligned}
&J(x) = \int_{|y| \le R} \omega(x - y\,,\, a)\phi(y)dy\,,\, y \in \mathbb{R}^1,\\
&y(j) = R(2j - n - 1)/(n+1)\,,\, 0 \le j \le n+1,\\
&z(j) = \frac{1}{2}(y(j) + y(j+1))\,,\, 0 \le j \le n,\\
&s_n(x) = \frac{2R}{n+1} \sum_{0 \le j \le n} \omega(x - z(j))\phi(z(j)).
\end{aligned}
$$

Лемма 6.2.4. *Справедлива оценка*

$$
\forall N:\ \|(J - s_n) \mid (N\,,\, S)\| \le C(N)/n. \tag{6.31}
$$

Доказательство. Справедливы оценки:

$$
\begin{aligned}
&\|(J - s_n) \mid (N\,,\, S)\| = \\
&\|(\sum_{0 \le j \le n} (\int_{y(j)}^{y(j+1)} (\omega(x - y\,,\, a)\phi(y) - \omega(x - z(j)\,,\, a)\phi(z(j)))dy)) \mid (N\,,\, S)\| \le \\
&\sum_{0 \le j \le n} \|(\int_{y(j)}^{y(j+1)} (\omega(x - y\,,\, a)\phi(y) - \omega(x - z(j)\,,\, a)\phi(z(j)))dy) \mid (N\,,\, S)\| \le \\
&\sum_{0 \le j \le n} \int_{y(j)}^{y(j+1)} \|(\omega(x - y\,,\, a)\phi(y) - \omega(x - z(j)\,,\, a)\phi(z(j))) \mid (N\,,\, S)\|dy \le \\
&\frac{const}{n}.
\end{aligned}
$$

Мы воспользовались вытекающей из леммы 6.2.3 оцекой

$$
\|(\omega(x - y\,,\, a)\phi(y) - \omega(x - z(j)\,,\, a)\phi(z(j))) \mid (N\,,\, S)\| \le const_1|y - z(j)|.
$$

Лемма доказана.

Положим

$$
\begin{aligned}
&\phi_{R\,,\,a}(x) = \int \omega(x - y\,,\, a)\varkappa(y\,,\, 0\,,\, R\,,\, 1)\phi(y)dy,\\
&\forall (f \in S(\mathbb{R}^d)^\star):\ f(R\,,\, a\,,\, y) = f_x(\omega(x - y\,,\, a))\varkappa(y\,,\, 0\,,\, R\,,\, 1).
\end{aligned}
$$

Напомним, что индекс у символа функционала означает, что он применяется по переменной x.

Из лемм 6.2.4 и 6.2.3 следует

Лемма 6.2.5. *Справедливо равенство*

$$f_x(\phi_{R\,,a}(x)) = \int f(R\,,\,a\,,\,y)\phi(y)dy.$$

Теперь доказательство теоремы тривиально. Имеем:

$$f(\phi) = \lim_{\substack{R\to\infty,\\ a\to\infty}} f(\phi_{R\,,a}) = \lim_{\substack{R\to\infty,\\ a\to\infty}} \int f(R\,,\,a\,,\,y)\phi(y)dy.$$

Пусть функционал δ определен равенством (6.25), δ_n -последовательность, удовлетворяющая условию

$$\delta(\phi) = \lim_{n\to\infty} \int \delta_n(x)\phi(x)dx. \tag{6.32}$$

Запись правой части равенства (6.32) можно упростить, полагая по определению

$$\lim_{n\to\infty} \int \delta_n(x)\phi(x)dx \equiv \int \delta(x)\phi(x)dx. \tag{6.33}$$

Символ $\delta(x)$ в (6.33) не есть обозначение функции и символ интеграла в правой части (6.33) не есть обозначение интеграла Римана: символ $\delta(x)$ есть обозначение функционала, который действует на функцию от переменной x по правилу, задаваемому левой частью равенства (6.33), а символ интеграла в правой части равенства (6.33) указывает на то, что функционал может быть вычислен как предел интегралов. Такая система обозначений сложилась исторически и удобна.

Следуя смыслу этих обозначений, для удовлетворяющей разумным условиям функции $h(x)$ по определению полагают

$$\int \delta(h(x))\phi(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} \int \delta_n(h(x))\phi(x)dx, \tag{6.34}$$

где δ_n -удовлетворяющая условию (6.32) последовательность.

6.2.2 Сходимость в пространстве распределений.

Определение 6.2.2. Последовательность медленно растущих распределений $\{f_n\} \subset S(\mathbb{R}^d)^\star$ сходится к распределению $f \in S(\mathbb{R}^d)^\star$, если

$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)) \,:\, \lim_{n\to\infty} f_n(\phi) = f(\phi). \tag{6.35}$$

Сходимость распределений (условие (6.35)) мы будем обозначать так:

$$f_n \xrightarrow{S^\star} f.$$

Определение 6.2.3. Последовательность медленно растущих распределений $\{f_n\} \subset S(\mathbb{R}^d)^\star$ фундаментальна, если для любого элемента $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ числовая последовательность $f_n(\phi)$ фундаментальна.

Если последовательность медленно растущих распределений сходится, то она фундаментальна. Если последовательность $\{f_n\} \subset S(\mathbb{R}^d)^\star$ фундаментальна, то предел в (6.35) существует. Ниже мы докажем, что этот предел задает медленно растущее распределение. Линейность правой части (6.35) по ϕ очевидна. Доказательство непрерывности задаваемого левой частью равенства (6.35) функционала опирается на утверждение, которое есть аналог принципа равномерной ограниченности в теории банаховых пространств.

Пусть
$$M \subset S(\mathbb{R}^d)^\star.$$
Положим
$$m(\phi \mid M) = \sup\{|f(\phi)| \mid f \in M\}.$$

Теорема 6.2.3. *Если*
$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)) : m(\phi \mid M) < \infty, \tag{6.36}$$
то
$$m(\phi \mid M) \to 0\ ,\ \phi \xrightarrow{S} 0. \tag{6.37}$$

Доказательство. Пусть условие (6.37) не выполнено. Тогда существет такое $\epsilon > 0$ и такие последовательности $\{f_{(1\,,\,n)}\} \subset M$, $\{\phi_{(1\,,\,n)}\} \subset S(\mathbb{R}^d)$, что
$$\phi_{(1\,,\,n)} \xrightarrow{S} 0\ ,\ |f_{(1\,,\,n)}(\phi_{(1\,,\,n)})| > \epsilon.$$
Определим номер $n(j)$ из условия
$$\|\phi_{(1\,,\,n(j))} \mid (j\,,\,S)\| < 4^{-j}$$
и положим
$$f_{(2\,,\,j)} = f_{(1\,,\,n(j))}\ ,\ \phi_{(2\,,\,j)} = 2^j \phi_{(1\,,\,n(j))}.$$
Эти последовательности удовлетворяют условиям:
$$\begin{aligned}&\{f_{(2\,,\,j)}\} \subset M\ ,\ \phi_{(2\,,\,j)} \xrightarrow{S} 0\,,\ |f_{(2\,,\,j)}(\phi_{(2\,,\,j)})| > 2^j\epsilon \to \infty\,,\ j \to \infty,\\ &\|\phi_{(2\,,\,j)} \mid (j\,,\,S)\| < 2^{-j}.\end{aligned} \tag{6.38}$$
Заметим, что
$$\forall k : \sum_{1 \le j < \infty} \|\phi_{(2\,,\,j)} \mid (k\,,\,S)\| < \infty, \tag{6.39}$$

так как
$$\forall (j > k):\ \|\phi_{(2\,,\,j)} \mid (k\,,\,S)\| < 2^{-j}.$$
Дальнейшие построения проведем по индукции. Положим
$$f_{(3\,,\,1)} = f_{(2\,,\,1)}\ ,\ \phi_{(3\,,\,1)} = \phi_{(2\,,\,1)}.$$
Пусть элементы $\{f_{(3\,,\,p)}\ ,\ \phi_{(3\,,\,p)}\}\ ,\ p \leq j$ уже выбраны. Далее определим номер j_0 из условия
$$\forall (k > j_0):\ |f_{(2\,,\,k)}(\phi_{(2\,,\,k)})| > \sum_{1 \leq i \leq j} m(\phi_{(3\,,\,i)} \mid M) + j + 1$$
и определим номер j_1 из условия
$$\forall (k > j_1\,,\ i \leq j) : |f_{(2\,,\,i)}(\phi_{(2\,,\,k)})| < 2^{-j}$$
Положим
$$f_{(3\,,\,j+1)} = f_{(2\,,\,n(j))}\,,\ \phi_{(3\,,\,j+1)} = \phi_{(2\,,\,n(j))}\,,\ n(j) = \max(j_0\,,\ j_1).$$
Пусть
$$\psi = \sum_{1 \leq j < \infty} \phi_{(3\,,\,j)}.$$
Сходимость ряда в пространстве $S(\mathbb{R}^d)$ следует из оценки (6.39), так как по построению $\{\phi_{(3\,,\,j)}\} \subset \{\phi_{(2\,,\,j)}\}$. Далее имеем:
$$|f_{(3\,,\,j+1)}(\psi)| \geq |f_{(3\,,\,j+1)}(\phi_{(3\,,\,j+1)})| -$$
$$\sum_{1 \leq i \leq j} |f_{(3\,,\,j+1)}(\phi_{(3\,,\,i)})| - \sum_{j+1 < i < \infty} |f_{(3\,,\,j+1)}(\phi_{(3\,,\,i)})| > j.$$
Так как $\psi \in S(\mathbb{R}^d)$, то это противоречит условию (6.36). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует

Теорема 6.2.4. *Если последовательность медленно растущих распределений фундаментальна, то она сходится к медленно растущему распределению.*

Доказательство. Пусть функционал f задан равенством (6.35). Докажем, что он непрерывен. Так как для любого $\phi \in S(\mathbb{R}^d)$ последовательность $f_n(\phi)$ фундаментальна, то
$$\forall (\phi \in S(\mathbb{R}^d)):\ \sup\{|f_n(\phi)| \mid n \in \mathbb{Z}\} < \infty.$$
В силу теоремы 6.2.3 отсюда следует:
$$|f(\phi)| \leq \sup\{|f_n(\phi)| \mid n \in \mathbb{Z}\} \to 0\,,\ \phi \xrightarrow{S} 0.$$
Теорема доказана.

6.2.3 Случай пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

Укажем, какие изменения нужно сделать в формулировке основных теорем для случая пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Теорема о непрерывности оператора в пространстве основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ формулируется так:

Теорема 6.2.5. *Линейный оператор*

$$A : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$$

непрерывен в том и только том случае, если для любого компакта K_0 *и любых* N *существуют такие константы* $C(K_0\,, N)$, $M(K_0)$, *и такой компакт* K, *что*

$$\begin{aligned}
&\forall(\phi\,,\, supp\phi \Subset K_0) : \\
&suppA\phi \Subset K\ ,\ \|A\phi \mid (N\,, \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, K_0)\| < \\
&C(K_0\,, N)\|\phi \mid (M(K_0\,, N)\,, \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, K)\|.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы остается без изменений.

Теорема о необходимых и достаточных условиях непрерывности лиленейного функционала формулируетя так.

Теорема 6.2.6. *Для того, чтобы линейный функционал* f *на пространстве* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *был непрерывен, необходимо и достаточно выполнение условия: для любого компакта* K *существуют такие константы* $C(K)$, $N(K)$, *что выполнено неравенство*

$$\forall(\phi\,,\, supp\phi \Subset K) :\ |f(\phi)| \le C(K)\|\phi \mid (N(K)\,, \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, K)\|. \tag{6.40}$$

6.2.4 Примеры вычисления пределов распределений.

Рассмотрим примеры.

1. Найдем предел при $\epsilon \to 0$ функционала, заданного формулой

$$\phi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - i\epsilon}\phi(x)dx.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-i\epsilon}\phi(x)dx = \\
&\int_{|x|<1} \frac{1}{x-i\epsilon}\phi(x)dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{x-i\epsilon}\phi(x)dx = \\
&\int_{|x|<1} \frac{1}{x-i\epsilon}(\phi(x)-\phi(0))dx + \phi(0)\int_{|x|<1} \frac{x+i\epsilon}{x^2+\epsilon^2}dx \\
&+ \int_{|x|>1} \frac{1}{x-i\epsilon}\phi(x)dx.
\end{aligned}$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|<1} \frac{1}{x-i\epsilon}(\phi(x)-\phi(0))dx = \int_{|x|<1} \frac{1}{x}(\phi(x)-\phi(0))dx, \\
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>1} \frac{1}{x-i\epsilon}\phi(x)dx = \int_{|x|>1} \frac{1}{x}\phi(x)dx, \\
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|<1} \frac{x+i\epsilon}{x^2+\epsilon^2}dx = i\pi.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-i\epsilon}\phi(x)dx = i\pi\phi(0) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)(\phi), \tag{6.41}$$

где

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)(\phi) = \int_{|x|<1} \frac{1}{x}(\phi(x)-\phi(0))dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{x}\phi(x)dx. \tag{6.42}$$

Таким образом, мы имеем:

$$\frac{1}{x\mp i\epsilon} \xrightarrow{S^\star} \left(\pm i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ \epsilon\to 0.$$

Это утверждение нужно понимать в следующем смысле: распределение, задаваемое стоящей в левой части равенства функцией, сходится в пространстве $S(\mathbb{R}^d)^\star$ к распределению, стоящему в правой части равенства. Это же утверждение часто записывают в виде:

$$\frac{1}{x\mp i0} = \pm i\pi\delta + \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{6.43}$$

Формулы (6.43) называют формулами Сохоцкого.

2. Найдем предел при $n \to \infty$ распределений, задаваемых функциями

$$f_n(x) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{d/2} \exp(-nx^2)\,,\; x \in \mathbb{R}^d.$$

Имеем:

$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)) :\; \int \left(\frac{n}{\pi}\right)^{d/2} \exp(-nx^2)\phi(x)dx = (\pi)^{-d/2} \int \exp(-x^2)\phi(x/n)dx =$$

$$\phi(0) + \pi^{-d/2} \int \exp(-x^2)(\phi(x/n) - \phi(0))dx \to \phi(0)\,,\; n \to \infty.$$

Это равенство записывают так:

$$\left(\frac{n}{\pi}\right)^{d/2} \exp(-nx^2) \stackrel{S^\star}{\to} \delta(x)\,,\; n \to \infty.$$

3. Найдем предел при $n \to \infty$ распределений, задаваемых функциями

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}\,,\; x \in \mathbb{R}^1.$$

Из очевидного равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} \exp(ix\xi)d\xi = \frac{\sin \omega x}{\pi x}$$

и формулы для обратного преобразования Фурье, следует, что

$$F\left(\frac{\sin \omega x}{\pi x}\right)(\xi) = \begin{cases} 1\,,\; |\xi| < \omega, \\ 0\,,\; |\xi| > \omega. \end{cases}$$

Поэтому в силу равенства Парсеваля имеем:

$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^1)) :\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{\pi x}\phi(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|<n} F(\phi)(\xi)d\xi \to$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\phi)(\xi)d\xi = \phi(0)\,,\; n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\frac{\sin nx}{\pi x} \stackrel{S^\star}{\to} \delta(x)\,,\; n \to \infty. \tag{6.44}$$

Приведем другой вывод соотношения (6.44). Пусть

$$C = (-\infty\,,\, \epsilon) \bigcup \{z \mid z = \epsilon \exp(i\theta)\,,\; \pi \le \theta \le 2\pi\} \bigcup (\epsilon\,,\, \infty).$$

На основании теоремы о вычетах и леммы Жордана справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\exp(iaz)}{z}dz = \begin{cases} 1\,,\ a>0 \\ 0\,,\ a<0. \end{cases} \quad .$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin az}{z}dz = \frac{1}{\pi}\int_C \frac{\sin az}{z}dz = 1\,,\ a>0.$$

Справедливо равенство

$$\forall(\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)):\ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}\phi(x)dx =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{|x|<\epsilon}\frac{\sin nx}{x}(\phi(x)-\phi(0))dx + \frac{1}{\pi}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\sin nx}{x}\phi(x)dx +$$
$$\phi(0)\frac{1}{\pi}\int_{|x|<\epsilon}\frac{\sin nx}{x}(x)dx.$$

Далее имеем:

$$\sup_n\left|\frac{1}{\pi}\int_{|x|<\epsilon}\frac{\sin nx}{x}(\phi(x)-\phi(0))dx\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{|x|<\epsilon}\frac{|\phi(x)-\phi(0)|}{|x|}dx = O(\epsilon),$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{|x|>\epsilon}\frac{\sin nx}{x}\phi(x)dx \to 0\,,\ n\to\infty,$$
$$\phi(0)\frac{1}{\pi}\int_{|x|<\epsilon}\frac{\sin nx}{x}dx = \phi(0)\frac{1}{\pi}\int_{|x|<n\epsilon}\frac{\sin x}{x}dx \to \phi(0)\,,\ n\to\infty.$$

Теперь нужно выбрать ϵ так, чтобы

$$\epsilon\to 0\,,\ \epsilon n\to\infty\,,\ n\to\infty.$$

Утверждение (6.44) доказано.

4. Вычислим предел распределения

$$\frac{\exp(ixt)}{(x+i0)}\ ,\ t\to\pm\infty.$$

Нам нужно вычислить

$$\forall(\phi\ \in S(\mathbb{R}^1)):\ \lim_{t\to\pm\infty}\lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ixt)}{(x+i\epsilon)}\phi(x)dx.$$

На основе равенства Парсеваля имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ixt)}{x+i\epsilon}\phi(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{\exp(-ixt)}{x-i\epsilon}\right)^{*}(\xi)F(\phi)(\xi)d\xi.$$

Далее имеем:

$$F\left(\frac{\exp(-ixt)}{(x-i\epsilon)}\right)(\xi) = \int_{\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ix(t+\xi))}{(x-i\epsilon)}dx =$$
$$\begin{cases} 2\pi i\exp(\epsilon(t+\xi))\,,\ (t+\xi)<0, \\ 0\,,\ (t+\xi)>0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{\epsilon+0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ixt)}{x+i\epsilon}\phi(x)dx =$$
$$-i\int_{(t+\xi)<0} F(\phi)(\xi)d\xi \to \begin{cases} -2\pi i\phi(0)\,,\ t\to-\infty \\ 0\,,\ t\to+\infty. \end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$\frac{\exp(ixt)}{(x+i0)} \xrightarrow{S^{\star}} \begin{cases} 0\ ,\ t\to+\infty, \\ -2\pi i\delta(x)\ ,\ t\to-\infty. \end{cases}$$

5. Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) = \sum_{|k|\le n}\exp(2\pi ikx)\,,\ -\infty<x<\infty.$$

Эта последовательность не имеет предела ни в одной точке $x\in\mathbb{R}^1$. Докажем, что последовательность распределений, задаваемых функциями $f_n(x)$, имеет предел. Имеем:

$$\forall(\phi\in S(\mathbb{R}^1)):\ f_n(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\phi(x)dx =$$
$$\sum_{-\infty<m<\infty}\int_m^{m+1} f_n(x)\phi(x)dx = \int_0^1 f_n(x)\left(\sum_{-\infty<m<\infty}\phi(x+m)\right)dx =$$
$$\sum_{|k|\le n}\left(\int_0^1 \exp(2\pi kx)\left(\sum_{-\infty<m<\infty}\phi(x+m)\right)dx\right)\exp(-2\pi iky)\Big|_{y=0} \to$$
$$\left(\sum_{-\infty<m<\infty}\phi(y+m)\right)\Big|_{y=0},\quad n\to\infty.$$

Последнее соотношение вытекает из поточечной сходимости ряда Фурье бесконечно дифференцируемой периодической функции

$$x \mapsto \sum_{-\infty<m<\infty} \phi(x+m).$$

Полученное нами соотношение часто записывают в виде

$$\sum_{-\infty<k<\infty} \exp(2\pi ikx) = \sum_{-\infty<k<\infty} \delta(x-k).$$

Математическое содержание этой красивой формулы состоит в утверждении, что ряд Фурье бесконечно дифференцируемой периодической функции сходится в точке $x=0$.

6.2.5 Дифференцирование и преобразование Фурье распределений.

Определение 6.2.4. Линейный оператор

$$T:\ S(\mathbb{R}^d)^\star \mapsto S(\mathbb{R}^d)^\star$$

называется непрерывным, если

$$(f_n \stackrel{S^\star}{\to} 0\,,\, n\to\infty) \Rightarrow (T(f_n) \stackrel{S^\star}{\to} 0\,,\, n\to\infty). \tag{6.45}$$

Оказывается, что в пространстве распределений топология (понятие сходимости) введена так, что естественно определенные операции дифференцирования и преобразования Фурье непрерывны.

Дифференцирование распределений.

Начнем с определения опрерации диференцирования на прямой. Предположим, что распределение f задано медленно растущей функцией $f(x)$:

$$\forall(\phi\in S(\mathbb{R}^1))\,:\, f(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx.$$

Если производная $Df(x)$ сама есть медленно растущая функция, то эта производная задает распределение

$$Df:\ \phi\mapsto \int_{-\infty}^{\infty} Df(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)D\phi(x)dx = -f(D\phi).$$

Этот пример мотивирует следующее

Определение 6.2.5. Производной порядка m распределения $f \in S(\mathbb{R}^d)^\star$ называется распределение, которое действует по правилу:

$$D^m f : \forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)) \; , \; D^m f(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{|m|} f(D^m \phi). \tag{6.46}$$

Так как отображение

$$S(\mathbb{R}^d) \ni \phi \mapsto D^m \phi \in S(\mathbb{R}^d)$$

непрерывно, отображение

$$S(\mathbb{R}^d) \ni \phi \mapsto (-1)^{|m|} f(D^m \phi) \in \mathbb{C}^1$$

есть композиция линейных непрерывных отображений и поэтому есть линейное непрерывное отображение. Следовательно, наше определение корректно: правая часть равенства (6.46) действительно задает линейный непрерывный функционал на пространстве $S(\mathbb{R}^d)$.

Теорема 6.2.7. *Операция дифференцирования непрерывна пространстве $S(\mathbb{R}^d)^\star$.*

Доказательство. Если

$$f_n \stackrel{S^\star}{\to} 0 \, , \, n \to \infty,$$

то

$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)) : \; D^m f_n(\phi) = (-1)^{|m|} f_n(D^m \phi) \to 0 \, , \, n \to \infty,$$

поэтому

$$D^m f_n \stackrel{S^\star}{\to} 0 \, , \, n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Рассмотрм примеры.

1. Пусть распределение $\theta \in S(\mathbb{R}^1)^\star$ задается функцией

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 \; , \; x > 0, \\ 0 \; , \; x < 0. \end{cases}$$

Найдем производную этого распределения. По определению имеем:

$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^1)) : \; iD\theta(\phi = -\theta(iD\phi) = -\int_0^\infty \frac{d}{dx}\phi(x)dx = \phi(0).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x).$$

Данное равенство нужно понимать в следуещем смысле: производная распределения, задаваемого функцией $\theta(x)$, есть распределение $\delta(x)$. Среди физиков бытует следующая интерпретация этого равенства: производная функции $\theta(x)$ равна нулю всюду, кроме точки $x = 0$, а в точке $x = 0$ эта производная равна бесконечности. Это бессмысленное на первый взгляд утверждение получает математически корректную интерпретацию, если рассмотреть аппроксимацию распределений в обеих частях данного равенства распределениями, задаваемыми гладкими функциями.

2. Пусть
$$-\infty = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = \infty.$$
Предположим, что функция $f(x),\ x \in \mathbb{R}^1$ удовлетворяет оценке
$$\forall x\colon\ |f(x)| < C(1 + |x|)^N,$$
непрерывно дифференцируема на каждом интервале $(a_i\, , \, a_{i+1})$ $0 \le i \le n$ и имеет пределы в точках a_i , $1 \le i \le n$. Положим
$$f'_{loc}(x) = \begin{cases} f'(x)\ ,\ x \in (a_i\, ,\, a_{i+1})\ 0 \le i \le n, \\ 0\ ,\ x \in \{a_i \mid 1 \le i \le n\} \end{cases}$$
Предположим, что функция $f'_{loc}(x)$ удовлетворяет оценке
$$\forall x\colon\ |f'_{loc}(x)| < C'(1 + |x|)^M.$$
Найдем производную распределения, задаваемого функцией $f(x)$. Имеем:
$$\frac{df}{dx}(\phi) = -f(\frac{d\phi}{dx}) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d\phi}{dx}dx = -\sum_{0\le i\le n}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\frac{d\phi}{dx}dx =$$
$$-\sum_{0\le i\le n}((f(a_{i+1}-0)\phi(a_{i+1}) - f(a_i+0)\phi(a_i)) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\phi(x)dx) =$$
$$\sum_{1\le i\le n}(f(a_i+0) - f(a_i-0))\phi(a_i) + \int_{-\infty}^{\infty} f'_{loc}(x)\phi(x)dx.$$
Полученное равенство можно записать в виде
$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{1\le i\le n}(f(a_i+0) - f(a_i-0))\delta(x-a_i) + f'_{loc}(x).$$

Это равенство означает следующее: производная распределения, задаваемого функцией $f(x)$, есть линейная комбинация δ-функций, сосредоточенных в точках разрыва функции $f(x)$ и распределения, задаваемого функцией $f'_{loc}(x)$.

3. Найдем первую и вторую производную распределения, задаваемого функцией $|x|$. Имеем:

$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^1)) : \ < \frac{d}{dx}|x| \mid \phi(x) >= -\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{d\phi(x)}{dx} dx =$$

$$-\int_0^{\infty} x \frac{d\phi(x)}{dx} dx + \int_{-\infty}^{0} x \frac{d\phi(x)}{dx} dx = \int \mathrm{sign}(x) \phi(x) dx,$$

где

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} \ \ 1 \ , \ x > 0, \\ -1 \ , \ x < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{d|x|}{dx} = \mathrm{sign}(x).$$

Данное равенство нужно понимать так: производная распределения, задаваемого функцией $|x|$, есть распределение, задаваемое функцией $\mathrm{sign}(x) = 2\theta(x) - 1$.

Используя решение предыдущей задачи, находим:

$$\frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x).$$

3. Найдем производную распределения $\frac{1}{x-i0}$. Согласно определению, имеем:

$$< \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-i0}\right) \mid \phi(x) >= - < \left(\frac{1}{x-i0}\right) \mid \frac{d}{dx}\phi(x) >=$$

$$- i\pi\phi'(x)\Big|_{x=0} - \int\limits_{|x|<1} \frac{\phi'(x) - \phi'(0)}{x} dx - \int\limits_{|x|>1} \frac{\phi'(x)}{x} dx =$$

$$- i\pi\phi'(x)\Big|_{x=0} - \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\epsilon<|x|<\infty} \frac{\phi'(x)}{x} dx =$$

$$- i\pi\phi'(x)\Big|_{x=0} - \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\epsilon<|x|<\infty} \frac{1}{x} d(\phi(x) - \phi(0)) =$$

$$- i\pi\phi'(x)\Big|_{x=0} - \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\epsilon<|x|<\infty} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2} dx.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-i0}\right) = i\pi\delta'(x) - \mathcal{P}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

где распределение $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ задается формулой:

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{x^2}\right)(\phi) := \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\epsilon<|x|<\infty}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x^2}dx.$$

4. Найдем производную от δ-функции. Имеем:

$$< D^m\delta \mid \phi >= (-1)^{|m|} < \delta \mid D^m\phi >= (-1)^{|m|}D^m\phi(x)\Big|_{x=0}.$$

Преобразование Фурье медленно растущих распределений.

Если распределение $f \in S(\mathbb{R}^d)^\star$ задается функцией $f(x) \in S(\mathbb{R}^d)$, то преобразование Фурье функции $f(x)$ задает распределение по формуле

$$\begin{aligned}&\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)):\ F(f)(\phi) = \int F(f)(x)\phi(x)dx = \\ &\int\left(\int \exp(-ixy)f(y)dy\right)\phi(x)dx = \\ &\int f(y)\left(\int \exp(-ixy)\phi(x)dx\right)dy = f(F(\phi)).\end{aligned}$$

Эта формула мотивирует следующее

Определение 6.2.6. Преобразованием Фурье распределения $f \in S(\mathbb{R}^d)^\star$ называется распределение $F(f) \in S(\mathbb{R}^d)^\star$, вычисляемое по формуле

$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)):\ F(f)(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} f(F(\phi)). \tag{6.47}$$

Как и выше, легко доказывется, что это определение корректно и что отображение

$$S(\mathbb{R}^d)^\star \ni f \mapsto F(f) \in S(\mathbb{R}^d)^\star$$

непрерывно.

Примеры вычисления преобразований Фурье медленно растущих распределений.

Рассмотрим примеры.

1. Найдем преобразование Фурье распределения, задаваемого функцией $f(x) \equiv 1$. Имеем:

$$F(1)(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\phi)(\xi) d\xi =$$
$$(2\pi)^d \left((2\pi)^{-d} \int \exp(ix\xi) F(\phi)(\xi) d\xi \right) \Big|_{x=0} = (2\pi)^d \phi(0).$$

Следовательно,
$$F(1)(\xi) = (2\pi)^d \delta(\xi).$$

Иногда фраза "преобразование Фурье распределения, задаваемого функцией $f(x)$" сокращается до фразы "преобразование Фурье функции $f(x)$". Однако обычно нетрудно понять, о чем идет речь и такая вольность речи не приводит к недоразумениям.

2. Найдем преобразование Фурье распределения, задаваемого функцией $f(x) \equiv x$, $x \in \mathbb{R}^1$. Имеем:

$$F(x)(\phi(x)) = \int x \left(\int \exp(-ixy) \phi(y) dy \right) dx =$$
$$\int \left(\int \left(i \frac{d}{dy} exp(-ixy) \right) \phi(y) dy \right) dx =$$
$$\int \left(\int (exp(-ixy) \left(-i \frac{d}{dy} \right) \phi(y) dy \right) dx = -2\pi i \phi'(0).$$

$$F(x) = 2\pi i \delta'(x).$$

3. Найдем преобразование Фурье распределения, задаваемого функцией $\theta(x)$. Это распределение есть предел распределений, задаваемых функцией $\theta(x) \exp(-\epsilon x)$, $\epsilon \to 0$. Следовательно, преобразование Фурье распределения, задаваемого функцией $\theta(x)$, есть предел распределений задаваемых функцией $\theta(x) \exp(-\epsilon x)$, $\epsilon \to 0$. Преобразование Фурье распределения, задаваемого функцией $\theta(x) \exp(-\epsilon x)$, задается преобразованием Фурье функции $\theta(x) \exp(-\epsilon x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \exp(-\epsilon x - i\xi x) dx = -i(\xi - i\epsilon)^{-1}.$$

Следовательно, преобразование Фурье распределения, задаваемого функцией $\theta(x)$, есть распределение $-i\frac{1}{\xi - i0}$:

$$F(\theta(x))(\xi) = -i\frac{1}{\xi - i0}.$$

4. Найдем преобразование Фурье распределения $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$. Это распределение есть предел распределения, задаваемого функцией $\theta(|x|-\epsilon)/x$, $\epsilon \to 0$. Следовательно, преобразование Фурье распределения $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ задается функцией, которая есть предел преобразований Фурье

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(|x|-\epsilon)}{x}\exp(-ix\xi)dx =$$
$$-i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x\xi)}{x}dx = -i\pi \mathrm{sign}(\xi).$$

Случай пространства $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^d)$.

Определение операции дифференцирования в пространстве $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^d)$ и свойства этой операции совпадают с определением и свойствами операции дифференцирования в пространстве медленно растущих распределений. Мы *не определяем* преобразования Фурье распределений из $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^d)$.

6.2.6 Действие аффинной группы на распределения.

Напомним, что аффинной группой называется группа преобразований пространства $\mathbb{R}^d$, которая действует по правилу

$$\forall(x\in\mathbb{R}^d)\,:\,\Lambda x = Ax + a\,,\,\det(A)\neq 0\,,\,a\in\mathbb{R}^d. \tag{6.48}$$

Аффинную группу можно отождествить с множеством пар $\{(A\,,\,a)\}$, где A -невырожденная матрица, $a\in\mathbb{R}^d$. Закон композиции в аффинной группе задается равенством

$$(A_1\,,\,a_1)\cdot(A_2\,,\,a_2) = (A_1A_2\,,\,A_1a_2 + a_1).$$

Формула (6.48) определяет левое действие аффинной группы в $\mathbb{R}^d$, которое порождает левое действие аффинной группы на заданных в $\mathbb{R}^d$ функциях:

$$(A\,,\,a)\phi(x) = \phi(Ax + a).$$

Если функция $x \mapsto f(x)$ порождает распределение $\phi \mapsto f(\phi)$, то функция $x \mapsto f(Ax+a)$ порождает распределение

$$\phi \mapsto \int f(Ax+a)\phi(x)dx = |\det(A)|^{-1}\int f(x)\phi(A^{-1}(x-a))dx = \\ |\det(A)|^{-1} f_x(\phi(A^{-1}(x-a))). \tag{6.49}$$

Формула (6.49) порождает правое действие аффинной группы на распределения:

$$(f(A\,,\,a))(\phi) = |\det(A)|^{-1} f_x(\phi(A^{-1}(x-a))). \tag{6.50}$$

Эта формула и принимается за правило “замены переменных” в распределениях. Приведем пример.

$$(\delta(A\,,\,a))(\phi) = |\det(A)|^{-1}\delta_x(\phi(A^{-1}(x-a)) = \\ |\det(A)|^{-1}\phi(-A^{-1}a).$$

Некоторые авторы считают естественным сопоставить левому действию аффиной группы на точки пространства правое действие группы на функции. В таком случае для сохранения связи между функциями и порождаемыми ими распределениями на распределения аффинная группа должна действовать слева.

6.2.7 Свертка рспределения и функции.

В этом пункте формулировки утверждений и доказательства не зависят от того, какие пространства рассматриваются: S или $\mathcal{D}$.

Напомним, что сверткой $f * \phi$ функций f и ϕ называется функция

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto f * \phi(x) := \int f(y)\phi(x-y)dy.$$

Свертку распределения и основной функции естественно определить формулой

$$f * \phi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n * \phi(x),$$

где f_n -такая последовательность фукнций, что

$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)) :\ f(\phi) = \lim_{n\to\infty}\int f_n(y)\phi(y)dy.$$

Однако при этом возникают проблемы с обоснованием некоторых предельных переходов и удобно поступить иначе.

Введем операторы инверсии основной функции:

$$\mathrm{inv}\phi(x) := \phi(-x),$$

сдвига основной функции:

$$\forall(z \in \mathbb{R}^d): \ t(z)\phi(x) := \phi(x-z)$$

и сдвига распределения:

$$(t(z)f)(\phi) := f_y(\phi(y+z)).$$

Эти операции непрерывны в соответствующих пространствах.

Определение 6.2.7. Сверткой распределения f и основной функции ϕ называется функция

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto f * \phi(x) := f(t(x)\mathrm{inv}\phi) = f_y(\phi(x-y)). \tag{6.51}$$

Корректность данного определения следует из непрерывности операции инверсии и сдвига.

Нужные нам свойства свертки распределения и основной функции перечислены в

Теорема 6.2.8. *1. Свертка коммутирует со сдвигами:*

$$t(z)(f * \phi(x)) = (t(z)f) * \phi(x) = f * (t(z)\phi)(x). \tag{6.52}$$

2. Свертка коммутирует с дифференцированиями:

$$D_x^m(f * \phi(x)) = (D^m f) * \phi(x) = f * (D_x^m\phi)(x). \tag{6.53}$$

Доказательство первого утверждения проводится прямым вычислением. Имеем:

$$\begin{aligned}
&t(z)(f * \phi(x)) = t(z)f_y(\phi(x-y)) = f_y(\phi(x-z-y)),\\
&(t(z)f) * \phi(x) = (t(z)f)_y(\phi(x-y)) =\\
&f_y(\phi(x-(y+z))) = f_y(\phi(x-z-y)),\\
&f * (t(z)\phi)(x) = f(t(x)\mathrm{inv}(t(z)\phi)) =\\
&f_y(t(x)\phi(-y-z)) = f_y(\phi(x-y-z)).
\end{aligned}$$

Переходим к доказательству второго утверждения. Введем оператор

$$\begin{aligned}
&l_j(\triangle x): \ l_j(\triangle x)\phi(x) =\\
&\frac{1}{\triangle x}\left(\phi(x_1, \dots x_j + \triangle x, \dots, x_d) - \phi(x_1, \dots, x_d)\right) =\\
&\int_0^1 (\partial_{x_j}\phi)(x_1, \dots, x_j + \tau\triangle x, \dots, x_d)d\tau.
\end{aligned}$$

Из непрерывности оператора сдвига в простанствах $S(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ следует

Лемма 6.2.6. *В пространстве $S(\mathbb{R}^d)$ и в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ справедливо утверждение:*

$$l_j(\triangle x)\phi(x) \to \partial_{x_j}\phi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_d)\,,\ \triangle x \to 0.$$

Используя коммутативность оператора свертки со сдвигом и лемму 6.2.6, мы получаем:

$$\partial_{x_j}(f * \phi)(x) = \lim_{\triangle x \to 0} l_j(\triangle x)(f * \phi)(x)$$
$$\lim_{\triangle x \to 0} f * l_j(\triangle x)\phi(x) = (f * \partial_{x_j}\phi)(x).$$

Далее замечаем, что

$$(D^m f) * \phi(x) = (D^m f)_y(\phi(x-y)) = (-1)^{|m|} f_y(D^m_y \phi(x-y))$$
$$= f_y((D^m\phi)(x-y)).$$

Теорема доказана.

6.2.8 Прямое произведение распределений.

В этом пункте в качестве пространства основных функций и пространства распределений мы будем рассматривать пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^d)$.

Очевидна

Лемма 6.2.7. *Если*

$$z = x \oplus y\,,\ x \in \mathbb{R}^p\,,\ y \in \mathbb{R}^q\,,\ \phi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{p+q}),$$

то функции

$$x \mapsto \phi(x \oplus y)\ ,\ y \mapsto \phi(x \oplus y)$$

принадлежат пространствам $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^q)$ соответственно.

Лемма 6.2.8. *Если*

$$x \in \mathbb{R}^p\,,\ y \in \mathbb{R}^q\,,\ z = x \oplus y\,,\ \psi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{p+q})\,,\ g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q),$$

то

$$g_y(\psi(x \oplus y)) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^p).$$

Доказательство. Без ограничения общности мы будем считать, что

$$\mathrm{supp}\psi \Subset K_1 \oplus K_2,$$
$$K_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R}^p\,,\ |x_j| \le a\,,\ 1 \le j \le p\},$$
$$K_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R}^q\,,\ |x_j| \le a\,,\ 1 \le j \le q\}.$$

Из леммы 6.2.6 следует, что

$$D_x^m g_y(\psi(x \oplus y)) = g_y(D_x^m \psi(x \oplus y)),$$

поэтому

$$\begin{gathered}\|g_y(\psi(x \oplus y)) \mid (N\,,\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)\,,\, K_1)\| = \\ \sum_{0 \le |m| \le N} \sup\{|D_x^m g_y(\psi(x \oplus y))| x \in K_1\} = \\ \sum_{0 \le |m| \le N} \sup\{|g_y(D_x^m \psi(x \oplus y))| x \in K_1\}\end{gathered}$$

В силу теоремы 6.2.6 существуют такие *не зависящие* от ϕ и поэтому не зависящие от x константы, что

$$\begin{gathered}|g_y(D_x^m \psi(x \oplus y))| \le C(K_2)\|D_x^m \psi(x \oplus y) \mid (M(K_2)\,,\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^q)\,,\, K_2)\| = \\ C(K_2) \sum_{0 \le |n| \le M(K_2)} \sup\{|D_y^n D_x^m \psi(x \oplus y)| y \in K_2\} < \infty,\end{gathered}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\forall(K \in \mathbb{R}^p\,,\, N)\,,\, \exists(C(K\,,\, N)\,,\, K_0 \in \mathbb{R}^{p+q}\,,\, M(K\,,\, N) < \infty) : \\ \|g_y(\psi(x \oplus y)) \mid (N\,,\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^p)\,,\, K)\| < C(K\,,\, N)\|\psi \mid M\,,\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^{p+q})\,,\, K_0\| < \infty.\end{gathered} \tag{6.54}$$

Лемма доказана.

Из леммы 6.2.8 следует, что корректно определено линейное отображение

$$\begin{gathered}\forall(g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)\,,\, r \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)) : \\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^{p+q}) \ni \psi(x \oplus y) \mapsto r_x(g_y(\psi(x \oplus y))).\end{gathered} \tag{6.55}$$

Из оценки (6.54) следует, что отбражение (6.55) непрерывно.

Определение 6.2.8. Определенное формулой (6.55) отображение называется прямым произведением распределений $g \in \mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^q)$ и $r \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$:

$$r \otimes g : \mathcal{D}(\mathbb{R}^{p+q}) \ni \psi(x \oplus y) \mapsto r \otimes g(\psi) := r_x(g_y(\psi(x \oplus y))).$$

Аналогом теоремы Фубини для распределений является

Теорема 6.2.9. *Прямое произведение распределений коммутативно:*

$$\begin{gathered}\forall(g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^q)\,,\, r \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)\,,\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{p+q})) : \\ r_x(g_y(\psi(x \oplus y))) = g_y(r_x(\psi(x \oplus y))).\end{gathered} \tag{6.56}$$

Для доказательства этой теоремы докажем имеющую самостоятельный интерес лемму.

Лемма 6.2.9. *Множество всех функций вида*

$$\psi_N(x_1 \ldots , x_d) = \sum_{|\alpha j|<N} c_{\alpha 1,\ldots,\alpha d}\phi_{\alpha 1}(x_1)\ldots\phi_{\alpha d}(x_d)\,,\ \phi_{\alpha j}\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)\,,\ N = 1\ldots \tag{6.57}$$

плотно в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Пусть

$$\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,,\ \mathrm{supp}\psi \Subset K\,,\ K = \{x \mid x\in\mathbb{R}^d\,,\ |x_j|\le a\}.$$

В кубе $K_0 = \{x \mid x \in \mathbb{R}^d\,,\ |x_j| \le 2a\}$ разложим функцию ψ в ряд Фурье по ортонормированной системе

$$e_n(x) = (4a)^{-d/2}\exp(i\pi(n\,,\ x)/2a)\,,\ n\in\mathbb{Z}^d\,,\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Получим:

$$\psi(x) = \sum_{|n|<\infty} c_n \exp(i\pi(n\,,\ x)/2a), \tag{6.58}$$

причем ряд (6.58) сходится абсолютно, равномерно и его можно дифференцировать почленно любое число раз.

Пусть $\varkappa(t)$ -функция типа “гриб” и

$$\varkappa(t) = \begin{cases} 1\,,\ |t| < (4/3)a \\ 0\,,\ (5/3)a < |t| \le 2a. \end{cases}$$

Положим

$$\psi_N(x_1 \ldots , x_d) = \varkappa(x_1)\ldots\varkappa(x_d)\sum_{|n|<N} c_n\exp(i\pi(n\,,\ x)/2a). \tag{6.59}$$

Функция ψ_N есть функция вида (6.57) и

$$\psi_N \overset{\mathcal{D}'}{\to} \psi\,,\ N\to\infty. \tag{6.60}$$

Лемма 6.2.9 доказана.

Теорема 6.2.9 следует из леммы 6.2.9, так как на функциях вида (6.57) равенство (6.56) верно.

Пример прямого произведения распределений -δ-функция:

$$\delta(x) = \delta(x_1)\otimes\ldots\otimes\delta(x_d).$$

Из (6.59) следует, что

$$\forall(f\in\mathcal{D}'\,,\ supp\psi\Subset K) : f(\psi_N)\to f(\psi).$$

Замечание 6.2.1. Подставляя в (6.60) выражения для коэффициентов Фурье, мы получим, что для любого компакта K и любого функционала $f \in \mathcal{D}'$ существует такая последовательность функций $\{f_N \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, что

$$\forall (supp\psi \Subset K) : f(\psi) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_K f_N(x)\psi(x)dx.$$

В качестве последовательности f_N можно взять последовательность

$$f_N(x) = (4a)^{-d} \sum_{|n|\le N} f_y(\varkappa(y_1)\ldots\varkappa(y_d)\exp(-i\pi(n\,,\,y)/2a))\exp(i\pi(n\,,\,x)/2a).$$

Отметим, что отсюда легко следует теорема 6.2.2.

6.3 Фундаментальные решения дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами называется оператор вида

$$P(D) = \sum_{0\le|m|\le N} a(m)D_x^m, \tag{6.61}$$

где

$$\begin{aligned}
&m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d\,,\ |m| = m_1 + \cdots m_d,\\
&a(m) \in \mathbb{C}^1,\\
&D_x^m = (-i\partial_{x_1})^{m_1}\cdots(-i\partial_{x_d})^{m_d}.
\end{aligned}$$

Оператор (6.61) имеет порядок N, если

$$A(P)^2 := \sum_{|m|=N} |a(m)|^2 \ne 0. \tag{6.62}$$

В дальнешем мы будем предполагать это условие выполненным.

Определение 6.3.1. Распределение E называется фундаментальным решением для оператора $P(D)$, если

$$P(D)E = \delta. \tag{6.63}$$

Часто вместо термина “фундаментальное решеие для оператора $P(D)$” используют термин “фундаментальное решеие для уравнения “

$$P(D)w = u. \tag{6.64}$$

так как если E -фундаментальное решение для оператора $P(D)$, то функция

$$w = E * u$$

есть решение уравнения (6.64):

$$P(D)(E * u) = (P(D)E) * u = \delta * u = u.$$

6.3.1 Существование фундаментального решения для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

В этом параграфе мы будем считать, что пространство основных функций есть $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ и пространство распределений есть $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^d)$. Мы докажем, что уравнение (6.63) имеет решение в пространстве $\mathcal{D}^\star(\mathbb{R}^d)$. Доказательству мы предпошлем несколько лемм.

Сначала мы напомним известное в теории функций комплексной переменной неравенство.

Лемма 6.3.1. *Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ и непрерывна при $|z| \leq 1$, то справедливо неравенство*

$$|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\exp(i\theta)|d\theta. \tag{6.65}$$

Напомним доказателство этого неравенства. Из формулы Коши следует, что

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\exp(i\theta))d\theta.$$

Теперь осталось вспомнить, что модуль интеграла меньше или равен интегралу от модуля интегрируемой функции.

Лемма 6.3.2. *Если $Q(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^1$ -полином степени n со старшим коэффициентом c:*

$$Q(\lambda) = c\lambda^n + a\lambda^{n-1} + \cdots$$

то существует такой полином $Q_0(\lambda)$ степени n, что

$$Q_0(0) = c\,,\ |Q_0(\exp(i\theta_0))| \equiv |Q(\exp(i\theta_0))|\,,\ 0 \leq \theta_0 < 2\pi.$$

Доказательство. Пусть

$$Q(\lambda) = c \prod_{1\le j\le n} (\lambda - a_j).$$

Тогда полином

$$Q_0(\lambda) = c \prod_{1\le j\le n} (1 - a_j^* \lambda)$$

удовлетворяет условиям леммы.

Положим

$$T = \{\theta \mid \theta = (\theta_1, \dots \theta_d) \in \mathbb{R}^d\,,\, 0 \le \theta_j < 2\pi\}, \tag{6.66}$$

$$c(\theta) = \sum_{|m|=N} a(m) \exp(i(\theta\,,\, m))\,,\; m \in \mathbb{Z}^d, \tag{6.67}$$

$$d\theta = d\theta_1 \dots d\theta_d.$$

Лемма 6.3.3. *Если выполнено условие* (6.62), *то*

$$\int_T |c(\theta)| d\theta \ge \frac{A(P)}{C_0(N\,,\, d)}, \tag{6.68}$$

где $C_0(N\,,\, d)$ *-зависящая только от* N *и* d *константа.*

Доказательство. Справедливо неравенство

$$|c(\theta)| \le \sum_{|m|=N} |a(m)| \le C_0(N\,,\, d) A(P),$$

где $C_0(N\,,\, d)$ -число размещений N неразличимых предметов по d ящикам,

$$C_0(N\,,\, d) = C^N_{N+d+1}.$$

Отсюда следут, что

$$\int_T |c(\theta)| d\theta = C_0(N\,,\, d) A(P) \int_T \frac{|c(\theta)|}{C_0(N\,,\, d) A(P)} d\theta \ge$$

$$C_0(N\,,\, d) A(P) \int_T \left(\frac{|c(\theta)|}{C_0(N\,,\, d) A(P)} \right)^2 d\theta > A(P)/C_0(N\,,\, d).$$

Лемма доказана.

Дифференциальному оператору (6.61) поставим в соответствие полином

$$P(z) = \sum_{0\le |m|\le N} a(m) z^m \equiv$$

$$\sum_{0\le m\le N} a(m_1, \dots m_d) z_1^{m_1} \dots z_d^{m_d}. \tag{6.69}$$

Определим функцию

$$\forall(\theta \in T):\ w(\theta) = \{\exp(i\theta_1), \dots, \exp(i\theta_d)\} \in \mathbb{C}^d.$$

Лемма 6.3.4. *Для любой целой функции* $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^d$ *и любого полинома* $P(z)$ *справедливо неравенство*

$$|F(z)| \le \frac{C_0(N\,,\,d)}{A(P)} \int_T |F(z + w(\theta))P(z + w(\theta))| d\theta. \tag{6.70}$$

Доказательство. Положим

$$f(\lambda) = F(z + \lambda w(\theta))\ ,\ Q(\lambda) = P(z + \lambda w(\theta))\ ,\ \lambda \in \mathbb{C}^1.$$

Заметим, что старший коэффициент многочлена $Q(\lambda)$ (коэффициент при λ^N) равен определяемой равенством (6.67) функции $c(\theta)$.

Пусть многочлен $Q_0(\lambda)$ удовлетворяет условиям:

$$Q_0(0) = c(\theta)\ ,\ |Q_0(\exp(i\theta_0)| \equiv |Q(\exp(i\theta_0))|\,,\ 0 \le \theta_0 < 2\pi.$$

Существование такого многочлена гарантировано леммой 6.3.2.

В силу леммы 6.3.1 справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(z + \exp(i\theta_0)w(\theta))P(z + \exp(i\theta_0)w(\theta))| d\theta_0 = \\
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\exp(i\theta_0))Q(\exp(i\theta_0)| d\theta_0 = \\
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\exp(i\theta_0))Q_0(\exp(i\theta_0)| d\theta_0 \ge |f(0)||Q_0(0)| = \\
&|F(z)||c(\theta)|.
\end{aligned}$$

Проинтегрируем это неравенство по $d\theta$ и учтем, что в силу периодичности функции $w(\theta)$ интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_T |F(z + \exp(i\theta_0)w(\theta))P(z + \exp(i\theta_0)w(\theta))| d\theta$$

не зависит от θ_0. Далее воспользуемся леммой 6.3.3.

Лемма доказана.

Пусть

$$z \in \mathbb{C}^d\,,\ z = Re\,z + iIm\,z\,,\ Re\,z \in \mathbb{R}^d\,,\ Im\,z \in \mathbb{R}^d.$$

Лемма 6.3.5. *Преобразование Фурье функции $\phi \in \mathcal{D}$ есть целая функция, которая удовлетворяет оценке*

$$\begin{aligned}
&\forall(\phi \in \mathcal{D}\,,\, supp\ \phi \Subset K\,,\, N)\,,\, \exists(C_1(K\,,\, N)\,,\, C_2(K\,,\, N)) : \ |F(\phi)(z)| \\
&\leq C_1(K\,,\, N)\exp(C_2(K\,,\, N)|Im\, z|)(1+|Re\, z|^2)^{-N}\|\phi \mid (2N\,,\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,,\, K)\|,
\end{aligned} \tag{6.71}$$

где константы $C_1(K\,,\, N)\,,\, C_2(K\,,\, N)$ зависят только от N и компакта $K = \{x \mid x \in \mathbb{R}^d\,,\, |x_i| \leq a\}$, содержащего носитель функции ϕ.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
&F(\phi)(z) = \int_K \exp(-i(z\,,\, x))\phi(x)dx = \\
&\int_K \exp(-i(Re\, z\,,\, x))\exp((Im\, z\,,\, x))\phi(x)dx, \\
&(1+|Re\, z|^2)^N F(\phi)(z) = \\
&\int_K ((1-\Delta_x)^N \exp(-i(Re\, z\,,\, x)))\exp((Im\, z\,,\, x))\phi(x)dx = \\
&\int_K \exp(-i(Re\, z\,,\, x))((1-\Delta_x)^N \exp((Im\, z\,,\, x))\phi(x))dx, \\
&|(1+|Re\, z|^2)^N F(\phi)(z)| \leq \int_K |((1-\Delta_x)^N \exp((Im\, z\,,\, x))\phi(x))|dx \leq \\
&C_1(K\,,\, N)\exp(C_2(K\,,\, N)|Im\, z|)\|\phi \mid (2N\,,\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,,\, K)\|.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из оценки (6.71) вытекает

Лемма 6.3.6. *На пространстве $\mathcal{D}$ корректно определен функционал*

$$\mathcal{D} \ni \phi \mapsto \|\phi \mid B(\mathcal{D})\| := \int\limits_{\mathbb{R}^d \times T} |F(\phi)(\xi + w(\theta))|d\xi d\theta,$$

который удовлетворяет условиям нормы, причем

$$\|\phi_n \mid B(\mathcal{D})\| \to 0 \text{ при } \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0. \tag{6.72}$$

Пусть $B(\mathcal{D})$ -пополнение пространства $\mathcal{D}$ по норме $\| \quad \mid B(\mathcal{D})\|$. В пространстве $B(\mathcal{D})$ рассмотрим линейное многообразие

$$\mathcal{L}(P) := \{\psi \mid \psi = P(D)\phi\,,\, \phi \in \mathcal{D}\}. \tag{6.73}$$

Лемма 6.3.7. *На линейном многообразии $\mathcal{L}(P)$ корректно определен линейный функционал*

$$\forall(\phi \in \mathcal{D}) : \; l_0(P(D)\phi) = \phi(0), \tag{6.74}$$

и этот функционал на многообразии $\mathcal{L}(P)$ удовлетворяет оценке

$$\forall(\psi \in \mathcal{L}(P)) : |l_0(\psi)| \leq C(P)\|\psi \mid B(\mathcal{D})\|, \tag{6.75}$$

где $C(P)$ -константа, зависящая толко от полинома P.

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что функционал (6.74) определен корректно, нам достаточно доказать, что из

$$P(D)\phi_1 \equiv P(D)\phi_2 \;, \; \phi_j \in \mathcal{D} \tag{6.76}$$

следует, что

$$\phi_1 \equiv \phi_2. \tag{6.77}$$

Возьмем преобразование Фурье от обеих частей равенства (6.76) и рассмотрим это преобразование в комплексной плоскости. Получим:

$$\forall(z \in \mathbb{C}^d) : \; P(z)F(\phi_1)(z) \equiv P(z)F(\phi_2)(z).$$

Так как преобразование Фурье функции из пространства $\mathcal{D}$ есть целая функция, то из этого равенства следует, что

$$F(\phi_1)(z) \equiv F(\phi_2)(z),$$

а отсюда следует (6.77).

Теперь докажем оценку (6.75). Пусть

$$\psi = P(D)\phi \, , \, \phi \in \mathcal{D}.$$

Имеем:

$$l_0(\psi) = l(P(D)\phi) = \phi(0),$$
$$\phi(0) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} F(\phi)(\xi) d\xi,$$
$$|l_0(\psi)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} |F(\phi)(\xi)| d\xi.$$

Далее мы воспользуемся леммой 6.3.4 и неравенством (6.70). Получим:

$$
\begin{aligned}
&|l_0(\psi)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^d} |F(\phi)(\xi)| d\xi \le \\
&C(P) \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{T} |F(\phi)(\xi + w(\theta)) P(\xi + w(\theta))| d\theta \right) d\xi = \\
&C(P) \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\int\limits_{T} |F(\psi)(\xi + w(\theta))| d\theta \right) d\xi = C(P) \|\psi \mid B(\mathcal{D})\|,
\end{aligned}
$$

где $C(P)$ -некотрорая константа, зависящая только от полинома P.

Лемма доказана.

Замечание. При доказательстве корректности определения функционала l_0 следует иметь ввиду, что множество нетривиальных решений уравнения

$$P(D)\psi = 0$$

не пусто, но, как показывает доказательство леммы 6.3.7, это множество не содержит функций из $\mathcal{D}$.

Лемма 6.3.8. *На пространстве $\mathcal{D}$ существует линейный непрерывный функционал l, который на многообразии $\mathcal{L}(P)$ совпадает с функционалом l_0.*

Доказательство. Из теоремы Хана-Банаха и леммы 6.3.7 следует, что на пространстве $B(\mathcal{D})$ существует линейный функционал l, который на многообразии $\mathcal{L}(P)$ совпадает с функционалом l_0 и на всем пространстве $B(\mathcal{D})$ удовлетворяет оценке

$$\forall(\psi \in B(\mathcal{D})) : |l(\psi)| \le C(P) \|\psi \mid B(\mathcal{D})\|. \tag{6.78}$$

Так как $\mathcal{D} \subset B(\mathcal{D})$ то функционал l определен на всем пространстве $\mathcal{D}$. Из оценки (6.78) и леммы 6.3.6 (соотношение (6.72)) следует, что функционал l непрерывен на $\mathcal{D}$.

Следующая теорема называется теоремой Мальгранжа-Эренпрайса.

Теорема 6.3.1. *У любого ненулевого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в пространстве $\mathcal{D}'$ существвет фундаментальное решение.*

Доказательство. Докажем, что таким фудаментальным решением является функционал

$$E := l \cdot \mathrm{inv}, \tag{6.79}$$

где l -функционал, существование которого гарантировано леммой 6.3.8 и inv оператор инверсии:

$$\mathrm{inv}\phi(x) = \phi(-x).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\forall(\phi \in \mathcal{D}):\ & P(D)E(\phi) = E(P(-D)\phi) = l(\mathrm{inv}P(-D)\phi) = \\ & l(P(D)\mathrm{inv}\phi) = \mathrm{inv}\phi(0) = \phi(0) = \delta(\phi).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

В пространстве $\mathcal{D}'$ фундаментальное решение не единственно. Пусть

$$\mathcal{N}_P = \{z \mid z \in \mathbb{C}^d\,,\ P(z) = 0\}$$

Пусть $\mu(dz)$ -мера с компакным носителем, которая сосредоточена на многообразии $\mathcal{N}_P$:

$$\mathrm{supp}\mu(dz) \subset \mathcal{N}_P.$$

Положим

$$w(x) = \int \exp(-i(x\,,\,z))\mu(dz).$$

Функция $w(x)$ удовлетворяет уравнению

$$P(D)w = 0.$$

Пусть E -фундаментальное решение и E_w -распределение, которое порождено функцией $w(x)$. Тогда распределение $E+E_w$ -фундаментальное решение.

6.3.2 Примеры вычисления фундаментальных решений.

Фразу "функция задает распределение, которое есть фундаментальное решение" мы будем сокращать до фразы "функция есть фундаментальное решение". К недоразумениям это привести не может.

Обыкновенные дифференциальные операторы.

Пусть

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n + a_{(n-1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} + \cdots + a_0\,,\, t \in \mathbb{R}^1. \qquad (6.80)$$

Дифференциальному оператору (6.80) мы поставим в соответствие полином

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_{(n-1)}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Напомним

Определение 6.3.2. Функцией Коши $K(t)$ для оператора (6.80) называется решение уравнения

$$\begin{aligned}&LK(t) = 0,\\ &K^{(n-1)}(0) = 1\,,\, K^{(n-2)}(0) = \cdots = K(0) = 0.\end{aligned}$$

Простое вычисление показывает, что функция Коши может быть вычислена по формуле

$$K(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=R}\frac{\exp(\lambda t)}{L(\lambda)}d\lambda, \qquad (6.81)$$

где радиус R больше модуля всех корней многочлена $L(\lambda)$.

Утверждение 6.3.1. *Решение уравнения*

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)E(t) = \delta(t) \qquad (6.82)$$

дается формулой

$$E(t) = \theta(t)K(t). \qquad (6.83)$$

Это утверждение можно проверить непосредстеннным вычислением. Делается это так. По определению производной от распределения, равенство (6.83) означает, что

$$\forall(\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))\colon\ \int_{-\infty}^{+\infty} E(t)L\left(-\frac{d}{dt}\right)\phi dt = \int_0^{+\infty} K(t)L\left(-\frac{d}{dt}\right)\phi dt = \phi(0).$$

Для доказательства последнего равенства перебрасываем оператор L на $K(t)$ и учитываем подстановку в нуле.

Можно заметить, что формула (6.83) фактически есть лишь другая запись формулы Дюамеля (3.275).

Волновое уравнение в размерности 1+1.

Найдем решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E(x\,,\,t) = \delta(t)\delta(x). \tag{6.84}$$

Беря от (6.84) преобразование Фурье по переменной x (преобразование Фурье функции $f(x)$ мы будем обозначать символом $\widehat{f}(\xi)$), мы получаем уравнение

$$\frac{d^2\widehat{E}(\xi\,,\,t)}{dt^2} + \xi^2\widehat{E}(\xi\,,\,t) = \delta(t).$$

Из формулы (6.84) следует, что

$$\widehat{E}(\xi\,,\,t) = \theta(t)\frac{\sin(\xi t)}{\xi}\,,\ \xi \in \mathbb{R}^1.$$

Следовательно,

$$E(x\,,\,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x)\frac{\sin(\xi t)}{\xi}d\xi.$$

При вычислении этого интеграла полезно заметить, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i(\xi\,,\,x))\theta(a - |x|)dx = 2\frac{\sin(a\xi)}{\xi},$$

поэтому

$$F^{-1}\left(\frac{\sin(\xi t)}{\xi}\right) = \frac{1}{2}\theta(t - |x|).$$

Мы получаем

Утверждение 6.3.2. *Решение уравнения* (6.84) *дается формулой*

$$E(x\,,\,t) = \frac{1}{2}\theta(t - |x|). \tag{6.85}$$

Волновое уравнение в размерности 1+3.

Найдем решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right) E(x\,,\,t) = \delta(t)\delta(x)\,,\ t \in \mathbb{R}^1\,,\ x \in \mathbb{R}^3. \tag{6.86}$$

Беря от (6.86) преобразование Фурье по переменной x, мы получаем уравнение

$$\frac{d^2\widehat{E}(\xi\,,\,t)}{dt^2} + \xi^2\widehat{E}(\xi\,,\,t) = \delta(t)\,,\, t \in \mathbb{R}^1\,,\, \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Следовательно,

$$\widehat{E}(\xi\,,\,t) = \theta(t)\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}\,,\, t \in \mathbb{R}^1\,,\, \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Применяя формулу обращения преобразования Фурье,получаем:

$$\forall(t>0)\colon\; E(x\,,\,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|\xi|\le R} \exp(i(\xi\; x))\frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}d\xi =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 2\pi \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^\pi \exp(ir|x|\cos(\theta))\sin(\theta)d\theta\right)\sin(rt)rdr =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{|x|} \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R 2\sin(r|x|)\sin(rt)dr =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{|x|} \lim_{R\to\infty} \left(\frac{\sin((t-|x|)R)}{(t-|x|)} - \frac{\sin((t+|x|)R)}{(t+|x|)}\right) =$$

$$\frac{1}{4\pi|x|}\delta(|x|-t).$$

Таким образом, справедливо

Утверждение 6.3.3. *Решение уравнения* (6.86) *есть функция*

$$E(x\,,\,t) = \frac{1}{4\pi|x|}\delta(|x|-t)\,,\, x \in \mathbb{R}^3. \tag{6.87}$$

Волновое уравнение в размерности 1+2.

Найдем решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right) E(x\,,\,t) = \delta(t)\delta(x)\,,\, t \in \mathbb{R}^1\,,\, x \in \mathbb{R}^2. \tag{6.88}$$

Применяя формулу (6.87) к основной функции вида

$$\phi(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,t) = \psi(x_1\,,\,x_2\,,\,t)\varkappa(x_3\,,\,0\,,\,R\,,\,1)\,,\; R\to\infty,$$

где функция $\varkappa(x_3\,,\,0\,,\,R\,,\,1)$ задается формулой (6.18), мы получаем, что решение уравнения есть функция

$$E(x\,,\,t)=\frac{\theta(t)}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(\sqrt{x^2+z^2}-t)}{\sqrt{x^2+z^2}}dz=$$

$$\frac{\theta(t)}{2\pi}\int\limits_{|x|}^{\infty}\frac{\delta(\xi-t)}{\sqrt{\xi^2-x^2}}d\xi=\frac{\theta(t-|x|)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}\,,\;x=(x_1\,,\,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Таким образом, справедливо

Утверждение 6.3.4. *Решение уравнения* (6.88) *есть функция*

$$E(x\,,\,t)=\frac{\theta(t-|x|)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}\,,\;x\in\mathbb{R}^2. \tag{6.89}$$

Уравнение теплопроводности.

Найдем решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta_x\right)E(x\,,\,t)=\delta(t)\delta(x)\,,\;t\in\mathbb{R}^1\,,\;x\in\mathbb{R}^d. \tag{6.90}$$

Совершая преобразование Фурье по x, мы получаем уравнение

$$\frac{d\widehat{E}(\xi\,,\,t)}{dt}+\xi^2\widehat{E}(\xi\,,\,t)=\delta(t),$$

$$\widehat{E}(\xi\,,\,t)=\theta(t)\exp(-\xi^2t). \tag{6.91}$$

Совершая обратное преобразование Фурье, мы получаем

Утверждение 6.3.5. *Решение уравнения* (6.90) *есть функция*

$$E(x\,,\,t)=\theta(t)(4\pi t)^{-d/2}\exp(-x^2/4t). \tag{6.92}$$

Уравнение Лапласа.

Нам нужно найти решение уравнения

$$(-\Delta_x)E(x)=\delta(x)\,,\;x\in\mathbb{R}^d\,,\;d\geq 2. \tag{6.93}$$

Сначала приведем фомальные выкладки, аналогичные тем, которые делаются в аналогичных случаях физиками. Имеем:

$$\xi^2\widehat{E}(\xi)=1\ ,\ \forall(d\geq 3):E(x)=F^{-1}(|\xi|^{-2})(x)=$$

$$F^{-1}(\int\limits_0^\infty \exp(-t\xi^2)dt)(x)=\int\limits_0^\infty F^{-1}(\exp(-t\xi^2)(x)dt=$$

$$\int\limits_0^\infty (4\pi t)^{-d/2}\exp(-|x|^2/4t)dt=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{d/2}\left(\frac{1}{|x|}\right)^{d-2}\Gamma(d/2-1),$$

$$d=2:E(x)-E(y)=\int\limits_0^\infty \frac{1}{4\pi}(\exp(-|x|^2/4t)-\exp(-|y|^2/4t))dt=$$

$$-\frac{1}{2\pi}(\ln|x|-\ln|y|).$$

Для обоснования этих выкладок используем теорию полугрупп.

В пространстве $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,d\xi)$ функция

$$\widehat{T}(t):\psi(\xi)\mapsto\exp(-\xi^2t)\psi(\xi) \tag{6.94}$$

есть полугруппа класса C_0 (проверку этого утверждения мы оставляем читателю в качестве упражнения). Так как преобразование Фурье F есть взаимно однозначное унитарное (с точностью до множителя $(2\pi)^{-d}$) преобразование пространства $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$ в пространство $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,d\xi)$, функция

$$T(t):=F^{-1}\widehat{T}(t)F \tag{6.95}$$

в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$ есть полугруппа класса C_0. В пространстве $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$ оператор $T(t)$ есть интегральный оператор

$$T(t)\psi(x)=\int G(t\,,\,x\,,\,y)\psi(y)dy, \tag{6.96}$$

$$G(t\,,\,x\,,\,y)=(4\pi t)^{-d/2}\exp(-(x-y)^2/4t). \tag{6.97}$$

Инфинитезимальный оператор полугруппы $T(t)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$ есть оператор Лапласа:

$$\Delta_x=F^{-1}(-\xi^2)F.$$

Пусть $g(x\,,\,y)$ -интегральное ядро оператора $(-\Delta_x)^{-1}$. Из формулы (3.10.8) и (6.96) следует, что

$$g(x\,,\,y)=\int\limits_0^\infty(4\pi t)^{-d/2}\exp(-(x-y)^2/4t)dt=$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{d/2}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)^{d-2}\Gamma(d/2-1)\,,\ d\geq 3. \tag{6.98}$$

При $d=2$ необходима регуляризация интеграла:

$$g(x\,,\,y)-g(x\,,\,z)=$$
$$\frac{1}{4\pi}\lim_{\lambda\to+0}\int\limits_0^\infty\exp(-\lambda t)\left(\frac{\exp(-(x-y)^2/4t)-\exp(-(x-z)^2/4t)}{t}\right)dt=$$
$$\frac{1}{2\pi}(\ln|x-z|-\ln|x-y|)\,,\ x\,,\,y\,,\,z\in\mathbb{R}^2. \tag{6.99}$$

Мы доказали

Утверждение 6.3.6. *Решение уравнения* (6.93) *дается формулой*

$$E(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{d/2}\left(\frac{1}{|x|}\right)^{d-2}\Gamma(d/2-1)\,,\ d\geq 3,\\ -\frac{1}{2\pi}\ln|x|\,,\ d=2.\end{cases} \tag{6.100}$$

6.4 Пространства Соболева.

6.4.1 Преобразование Фурье-順Планшереля.

Напомним определение преобразования Фурье функций из пространства Шварца:

$$\forall(\phi\in S(\mathbb{R}^d)):F(\phi)(\xi)=\int\exp(-i(x\,,\,\xi))\phi(x)dx, \tag{6.101}$$

формулу обратного преобразования Фурье:

$$\forall(\phi\in S(\mathbb{R}^d)):\phi(x)=(2\pi)^{-d}\int\exp(i(x\,,\,\xi))F(\phi)(\xi)d\xi, \tag{6.102}$$

и равенство Парсеваля:

$$\forall(\phi\in S(\mathbb{R}^d)):\int|\phi(x)|^2dx=(2\pi)^{-d}\int|F(\phi)(\xi)|^2d\xi. \tag{6.103}$$

Интегрирование везде ведется по пространству $\mathbb{R}^d$.

В дальнешем нам будет удобно использовать введенное ранее обозначение

$$\widehat{\phi}(\xi) := F(\phi)(\xi). \tag{6.104}$$

Ясно, что формулой (6.101) можно определить преобразование Фурье только для тех функций ϕ, для которых интеграл в (6.101) сходится. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы распространить определение преобразования Фурье на все функции из $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$.

Лемма 6.4.1. *Пространство Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$ по метрике пространства $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$:*

$$\mathbf{Cl}(S(\mathbb{R}^d)) = L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx).$$

Доказательство. Пусть

$$L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx) = \mathbf{Cl}(S(\mathbb{R}^d)) \oplus H_0.$$

Докажем, что

$$H_0 = 0.$$

Если $f_0 \in H_0$, то функция f_0 ортогональна любой функции из $S(\mathbb{R}^d)$. В частности, функция f_0 ортогональна любой функции типа "гриб", поэтому функция f_0 ортогональна характеристической функции любого параллеллипипеда $K \subset \mathbb{R}^d$:

$$\forall K : \int\limits_K f_0(x)dx = 0.$$

Следовательно, функция f_0 ортогональна любой ступенчатой функции и поэтому равна нулю почти всюду. Лемма доказана.

Следствие 6.4.1. *Если $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$, то существует такая последовательность $\phi_n \in S(\mathbb{R}^d)$, что*

$$\|\phi - \phi_n \mid L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)\| \to 0\,,\, n \to \infty. \tag{6.105}$$

Если последовательность $\{\phi_n\}$ удовлетворяет условию (6.105), то она фундаметальна в $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$. Из равенства Парсеваля следует, что последовательность преобразований Фурье $\{\widehat{\phi_n}\}$ фудаментальна в $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,d\xi)$. Следовательно,

$$\exists\widehat{\phi}(\xi) : \|\widehat{\phi} - \widehat{\phi_n} \mid L^2(\mathbb{R}^d\,,\,d\xi)\| \to 0\,,\, n \to \infty. \tag{6.106}$$

Определение 6.4.1. Если функции $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d\,, dx)$ и $\widehat{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^d\,, d\xi)$ связаны равенствами (6.105)-(6.106), то мы говорим, что функция $\widehat{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^d\,, d\xi)$ есть преобразование Фурье-Планшереля функции $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d\,, dx)$:

$$\widehat{\phi}(\xi) := \lim_{n\to\infty} \widehat{\phi}_n(\xi), \tag{6.107}$$

где последовательность $\{\phi_n\}$ удовлетворяет условию (6.105).

Ясно, что преобразование Фурье-Планшереля определено на всем пространстве $L^2(\mathbb{R}^d\,, dx)$, оно преобразует пространство $L^2(\mathbb{R}^d\,, dx)$ в себя, для него справедлива (соответственно обобщенная) формула обращения и формула Парсеваля. В дальнешем мы не будем делать различия между заданным формулой (6.101) преобразованием Фурье и определенным формулой (6.107) преобразованием Фурье-Планшереля.

6.4.2 Определение и основные свойства пространств Соболева.

Напомним, что заданная в $\mathbb{R}^d$ функция $f(x)$ называется локально интегрируемой:

$$f \in L_{loc}(\mathbb{R}^d),$$

если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ справедливо включение:

$$f \in L^1(K).$$

Определение 6.4.2. Распределение $f \in S(\mathbb{R}^d)^\star$ принадлежит пространству Соболева $H^s(\mathbb{R}^d)$, если

1. Преобразование Фурье распределения f задается локально интегрируемой функцией:

$$\exists(\widehat{f}(\xi) \in L_{loc}(\mathbb{R}^d))\,,\ \forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)) :$$
$$F(f)(\phi) = f(F(\phi)) = \int \widehat{f}(\xi)\phi(\xi)d\xi. \tag{6.108}$$

2. Задающая преобразование Фурье функция удовлетворяет условию:

$$\|f \mid H^s(\mathbb{R}^d)\|^2 \overset{\text{def}}{=} \int |\widehat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi < \infty. \tag{6.109}$$

Если распределение f задается функцией $f(x) \in S(\mathbb{R}^d)$, то входящая в (6.108) функция $\widehat{f}(\xi)$ есть преобразование Фурье функции $f(x)$, но в общем случае в определении не требуется, чтобы функция $\widehat{f}(\xi)$ обязательно была бы преобразованием Фурье некоторой функции.

Входящй в определние пространства Соболева $H^s(\mathbb{R}^d)$ параметр s может принимать любое значение:

$$-\infty < s < \infty.$$

Определение 6.4.3. Заданная в пространстве $\mathbb{R}^d$ функция $f(x)$ принадлежит пространству Соболева $H^s(\mathbb{R}^d)$, если порожденное функцией $f(x)$ распределение

$$f : \phi \mapsto \int f(x)\phi(x)dx$$

принадлежит пространству Соболева $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Ясно, что

$$\forall (s \geq 0) : \ H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d\,,\, d\xi),$$

а так как преобразование Фурье переводит пространство $L^2(\mathbb{R}^d)$ в себя, пространство $H^s(\mathbb{R}^d)$ при $s \geq 0$ может быть отождествлено с подпространством пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Приведем примеры.

1. Пусть $f = \delta$-функция. Преобразование Фурье распределения f задается функцией $\widehat{f}(\xi) \equiv 1$. Имеем:

$$\int (1 + |\xi|^2)^s \cdot 1 d\xi < \infty \,, \text{ если } s < -d/2.$$

Следовательно,

$$\delta(x) \in H^s(\mathbb{R}^d) \text{ при } s < -d/2.$$

2. Пусть $f(x) = \theta(1 - |x|)$, $x \in \mathbb{R}^1$. Преобразование Фурье функции $f(x)$ есть функция

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-ix\xi)\theta(1 - |x|)dx = 2\frac{\sin\xi}{\xi}.$$

Имеем:

$$\int (1 + |\xi|^2)^s 4 \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 d\xi < \infty \text{ , если } s < 1/2.$$

Следовательно,

$$\theta(1 - |x|) \in H^s(\mathbb{R}^1) \text{ при } s < 1/2.$$

Теорема 6.4.1. *1. Пространство Соболева $H^s(\mathbb{R}^d)$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением*

$$< f\,,\, g >= \int \widehat{f}(\xi)^* \widehat{g}(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi. \tag{6.110}$$

2. Распределения, задаваемые функциями $f(x) \in S(\mathbb{R}^d)$, плотны в $H^s(\mathbb{R}^d)$ по метрике пространства $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения нам достаточно доказать, что каждая функция $\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d\,,\,(1+|\xi|^2)^s d\xi)$ есть преобразование Фурье распределения из $f \in S(\mathbb{R}^d)^\star$. Для доказательства этого утверждения заметим, что, как следует из (6.108), распределение $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ действует на основную функцию по правилу:

$$f(\phi) = \int \widehat{f}(\xi) F^{-1}(\phi)(\xi) d\xi, \tag{6.111}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} &\forall (f \in H^s(\mathbb{R}^d)\,,\, \phi \in S(\mathbb{R}^d)) :\ |f(\phi)| \le \\ &\left(\int |\widehat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2} \left(\int |F^{-1}(\phi)(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi\right)^{1/2} \\ &\to 0\,,\, \phi \xrightarrow{S} 0. \end{aligned} \tag{6.112}$$

Из этого неравенства следуют два утверждения: во-первых, что каждая функция $\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d\,,\,(1+|\xi|^2)^s d\xi)$ задает по правилу (6.111) линейный непрерывный функционал на пространстве $S(\mathbb{R}^d)$, во-вторых, что из сходимости последовательности распределений в метрике пространства $H^s(\mathbb{R}^d)$ следует сходимость в топологии пространства $S(\mathbb{R}^d)^\star$.

Переходим к доказательству второго утверждения теоремы.

Пусть $\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d\,,\,(1+|\xi|^2)^s d\xi)$ и $f_n \in S(\mathbb{R}^d)$ такая последовательность, что

$$\|f_n - f \mid L^2(\mathbb{R}^d\,,\,(1+|\xi|^2)^s d\xi)\| \to 0.$$

Тогда

$$F(f_n)(\phi) = \int \widehat{f_n}(\xi)\phi(\xi) d\xi \to \int \widehat{f}(\xi)\phi(\xi) d\xi,$$

а так как в силу непрерывности преобразования Фурье

$$\lim_{n\to\infty} F(f_n)(\phi) = F(\lim_{n\to\infty} f_n)(\phi),$$

то функция $\widehat{f}(\xi)$ есть преобразование Фурье распределения $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

Теорема доказана.

Из теоремы (6.4.1) следует, что при $s \geq 0$ пространство $H^s(\mathbb{R}^d)$ можно отождествить с пополнением пространства $S(\mathbb{R}^d)$ по метрике (6.109), где $\widehat{f}(\xi)$ -преобразование Фурье-Планшереля функции f, и справедливо включение

$$L^2(\mathbb{R}^d\,,\ dx) \subset H^s(\mathbb{R}^d)\,,\ s \geq 0.$$

При $s < 0$ пространство $H^s(\mathbb{R}^d)$ есть пространство распределений, которые действуют по правилу (6.111).

На пространстве $S(\mathbb{R}^d)$ определим норму

$$\forall (f \in S(\mathbb{R}^d)) : \|f \mid \widetilde{H}^n(\mathbb{R}^d)\|^2 = \int \left(\sum_{0 \leq |m| \leq n} |D_x^m f(x)|^2 \right) dx.$$

Из равенства Парсеваля следует, что

$$\|f \mid \widetilde{H}^n(\mathbb{R}^d)\|^2 = (2\pi)^{-d} \int \left(\sum_{0 \leq |m| \leq n} |\xi^m|^2 \right) \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \tag{6.113}$$

Так как

$$\exists (C_1\,,\, C_2) : C_1(1 + |\xi|^2)^n \leq \sum_{0 \leq |m| \leq n} |\xi^m|^2 \leq C_2(1 + |\xi|^2)^n,$$

то нормы $\| \quad \mid \widetilde{H}^n(\mathbb{R}^d)\|$ и $\| \quad \mid H^n(\mathbb{R}^d)\|$ эквивалентны:

$$\| \quad \mid \widetilde{H}^n(\mathbb{R}^d)\| \sim \| \quad \mid H^n(\mathbb{R}^d)\|.$$

В случае $s = n + \alpha\,,\ 0 < \alpha < 1$ положим

$$\forall (\phi \in S(\mathbb{R}^d)) :\ \|\phi \mid \widetilde{H}^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0 \leq |m| \leq n} \int |D_x^m \phi(x)|^2 dx +$$

$$\sum_{|m|=n} \iint |x - y|^{-(d+2\alpha)} |D_x^m \phi(x) - D_y^m \phi(y)|^2 dxdy.\,,\ 0 < \alpha < 1\,,\ n = 0\,,\ 1 \ldots \tag{6.114}$$

Теорема 6.4.2. *На пространстве $S(\mathbb{R}^d)$ норма $\| \quad \mid H^{n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\|$ эквивалентна норме $\| \quad \mid \widetilde{H}^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)\|$:*

$$\| \quad \mid H^{n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\| \sim \| \quad \mid \widetilde{H}^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)\|. \tag{6.115}$$

Доказательство. Сначала докажем теорему для $n = 0$. Имеем:

$$\|\phi \mid \widetilde{H}^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)\|^2 =$$
$$\int |\phi(x)|^2 dx + \iint |x-y|^{-(d+2\alpha)} |\phi(x) - \phi(y)|^2 dx dy =$$
$$\int |\phi(x)|^2 dx + \iint |y|^{-(d+2\alpha)} |\phi(x+y) - \phi(x)|^2 dx dy =$$
$$(2\pi)^{-d} \left(\int |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi + \int \left(\int |\exp(i(\xi\,,\, y)) - 1|^2 |y|^{-(d+2\alpha)} dy \right) |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \right) =$$
$$(2\pi)^{-d} \left(\int |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi + C_0(d) \int |\xi|^{2\alpha} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \right).$$

Так как

$$\exists (C_1\,,\, C_2) : C_1(1 + |\xi|^2)^\alpha \le (1 + |\xi|^{2\alpha}) \le C_2(1 + |\xi|^2)^\alpha,$$

то из полученного равенства вытекает утверждение теоремы для $n = 0$. Для доказательства теоремы в общем случае заменим в полученном равенстве

$$\phi(x) \to D_x^m \phi(x),$$

и учтем, что

$$F(D_x^m \phi(x))(\xi) = \xi^m F(\phi(x))(\xi),$$
$$\exists (C_1\,,\, C_2) : \ C_1(1 + |\xi|^2)^k \le 1 + \sum_{|m| \le k} (\xi^m)^2 \le C_2(1 + |\xi|^2)^k.$$

Теорема доказана.

Замечание 6.4.1. Из доказанной теоремы следует, что если $\phi(x) \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s \ge \ 0$ и функция $x \mapsto y(x)$ есть такое гладкое невырожденное отображение пространства $\mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, что $y(x) \equiv x$, $|x| \ge R_0$, $R_0 < \infty$, то функция $x \mapsto \phi(y(x))$ принадлежит пространству $H^s(\mathbb{R}^d)$.

На декартовом произведении пространств $H^s(\mathbb{R}^d)$ и $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$ определим билинейную форму $B_H(f\,,\, g)$:

$$H^s(\mathbb{R}^d) \times H^{-s}(\mathbb{R}^d) \ni f \times g \mapsto B_H(f\,,\, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) d\xi. \tag{6.116}$$

Теорема 6.4.3. *1. Билинейная форма* (6.116) *определена корректно: интеграл в* (6.116) *сходится для всех* $f \times g \in H^s(\mathbb{R}^d) \times H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.

2. Справедливо равенство

$$\|f \mid H^s(\mathbb{R}^d)\| = \sup\{|B_H(f\,,\, g)| \mid \|g \mid H^{-s}(\mathbb{R}^d)\| \le 1\}. \tag{6.117}$$

3. Для любого линейного функционала $l \in H^s(\mathbb{R}^d)^\star$ существует такой элемент $g_l \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$, что

$$\forall f \in H^s(\mathbb{R}^d) : \, l(f) = B_H(f \, , \, g_l). \tag{6.118}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$|\int \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)d\xi|^2 \leq \int |\widehat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi \int |\widehat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi.$$

Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$\begin{aligned}
&\|f \mid H^s(\mathbb{R}^d)\| = \\
&\sup\{| < \int \widehat{g}_0(\xi)^* \widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi| \mid \int |\widehat{g}_0(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi \leq 1\} = \\
&\sup\{|\int \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)d\xi| \mid \int |\widehat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Мы сделали замену

$$\widehat{g}_0(\xi) \to \widehat{g}(\xi)^*(1+|\xi|^2)^{-s}. \tag{6.119}$$

Для доказательства третьего утверждения теоремы заметим, что в силу теоремы Рисса

$$\exists (g_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)) : l(f) =< g_0 \, , \, f >= \int \widehat{g}_0^*(\xi)\widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi.$$

Далее мы делаем замену (6.119).

Теорема доказана.

6.4.3 Теоремы вложения.

Положим

$$\forall (f \in S(\mathbb{R}^d) \, , \, 0 < \alpha < 1) : \|f \mid C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0 \leq |m| \leq n} \sup\{|D_x^m f(x)| x \in \mathbb{R}^d\} +$$

$$\sum_{|m|=n} \sup\{|D_x^m f(x+y) - D_x^m f(x)||y|^{-\alpha} \mid x \in \mathbb{R}^d \, , \, |y| \leq 1\}. \tag{6.120}$$

Определение 6.4.4. Пространство $C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ -это пополнение пространства $S(\mathbb{R}^d)$ по норме (6.120).

Отметим, что если $f \in C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)$, то

$$\forall (m\,,\,|m| \le n):\ \lim_{|x|\to\infty} |D_x^m f(x)| = 0.$$

Действительно, если $f \in C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)$, то

$$\forall (\epsilon > 0)\,,\, \exists f_\epsilon \in S(\mathbb{R}^d):\ \|f - f_\epsilon \mid C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)\| < \epsilon,$$

поэтому

$$\forall (m\,,\,|m| \le n\,,\, \epsilon > 0):\ \limsup_{|x|\to\infty} |D_x^m f(x)| \le \epsilon.$$

Следующая теорема называется теоремой вложения Соболева (он ее автор).

Теорема 6.4.4. *Если распределение*

$$f \in H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\,,\ 0 < \alpha < 1,$$

то оно задается функцией

$$f(x) \in C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d),$$

причем существует такая не зависящая от f *константа* $C(d\,,\,\alpha)$*, что*

$$\forall (f \in H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d)):\ \|f \mid C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)\| \le C(d\,,\,\alpha)\|f \mid H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\|. \tag{6.121}$$

Доказательство. В силу формулы обращения преобразования Фурье имеем:

$$\begin{aligned}
&\forall (m\,,\,|m| \le n\,,\, f \in S(\mathbb{R}^d)):\ |D_x^m f(x+y) - D_x^m f(x)| = \\
&(2\pi)^{-d}\left|\int \xi^m \widehat{f}(\xi)[\exp(i(\xi\,,\,y)) - 1]\exp(i(\xi\,,\,x))d\xi\right| \le \\
&const.\int (1+\xi^2)^{n/2}|\widehat{f}(\xi)||\exp(i(\xi\,,\,y)) - 1|d\xi \le \\
&const.\left(\int (1+\xi^2)^{n+d/2+\alpha}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \times \\
&\left(\int |\exp(i(\xi\,,\,y)) - 1|^2(1+\xi^2)^{-(d/2+\alpha)}d\xi\right)^{1/2} \le \\
&const.\|f \mid H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\|\left(\int |\exp(i(\xi\,,\,y)) - 1|^2|\xi|^{-(d+2\alpha)}d\xi\right)^{1/2} = \\
&C(d\,,\,\alpha)\|f \mid H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\||y|^\alpha.
\end{aligned} \tag{6.122}$$

Поэтому

$$\forall (x \in \mathbb{R}^d\,,\, y \in \mathbb{R}^d\,,\, |m| \le n\,,\, f \in S(\mathbb{R}^d)) :$$
$$|D_x^m f(x+y) - D_x^m f(x)||y|^{-\alpha} \le C(d\,,\,\alpha)\|f \mid H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\|.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\forall (m\,,\, |m| \le n\,,\, f \in S(\mathbb{R}^d)) :$$
$$\|f \mid C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)\| \le C(d\,,\,\alpha)\|f \mid H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\|, \tag{6.123}$$

Окончательно получаем:

$$\forall (f \in S(\mathbb{R}^d)) : \|f \mid C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)\| \le C(d\,,\,\alpha)\|f \mid H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\|. \tag{6.124}$$

Пусть распределение

$$f \in H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d),$$

и последовательность функций $f_n(x) \in S(\mathbb{R}^d)$ задает распределения f_n, которые удовлетворяют условию:

$$\|f - f_n \mid H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\| \to 0\,,\, n \to \infty.$$

Так как последовательность f_n сходится в метрике пространства $H^{d/2+n+\alpha}\,(\mathbb{R}^d)$, она фундаментальна в метрике этого пространства. Из неравенства

$$\|f_n - f_m \mid C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)\| \le C(d\,,\,\alpha)\|f_n - f_m \mid H^{d/2+n+\alpha}(\mathbb{R}^d)\|$$

следует, что последовательность функций $f_n(x)$ фундаментальна в метрике пространства $C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ и поэтому в метрике этого пространства сходится к функции $f_0(x) \in C_0^{n\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Ясно, что функция $f_0(x)$ задает распределение f.

Теорема доказана.

Если $0 \le |m| \le s$, то обобщенной производной порядка m функции $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ называется рассматриваемая как элемент пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ функция

$$D^m f(x) \overset{\text{def}}{=} (2\pi)^{-d} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|\xi|<R} \exp(i(x\,,\,\xi))\xi^m \widehat{f}(\xi) d\xi \tag{6.125}$$

$$m = (m1\,,\, m2\,,\, \ldots md)\;,\; \xi = (\xi 1\,,\, \xi 2\,,\, \ldots)$$
$$D^m = D_{x1}^{m1} \ldots D_{xd}^{md},$$
$$\xi^m = \xi 1^{m1} \ldots \xi d^{md}.$$

Предел в (6.125) понимается в смысле метрики пространства $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,d\xi)$.

Из доказанной теоремы следует, что если $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s > d/2 + |m| + \alpha\,,\, 0 < \alpha < 1$, то обобщенная производная $D^m f(x)$ совпадает с классической.

Из доказанной теоремы и теоремы 6.4.3 следует, что любое медленно растущее распределение с компактным носителем принадлежит некоторому пространству $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Действительно, если $f \in S^\star(\mathbb{R}^d)$, то

$$\exists(C\,,\,N)\,,\,\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)):\ |f(\phi)| \le C\|\phi \mid (N\,,\,S)\|.$$

Если $K \subset \mathbb{R}^d$ -компакт, то существует такая константа $C(K)$, что

$$\forall(\phi \in S(\mathbb{R}^d)\,,\,\mathrm{supp}\phi \Subset K)\,:\,|\|\phi \mid (N\,,\,S)\| \le \\ C(K)\|\phi \mid C_0^{N\,,\,\alpha}(\mathbb{R}^d)\| \le C(d\,,\,s)\|\phi \mid H^{d/2+N+\alpha}(\mathbb{R}^d)\|.$$

Следовательно, любое медленно растущее распределение с компактным носителем задает линейный непрерывный функционал на некотором пространстве $H^s(\mathbb{R}^d)$ и поэтому может быть отождествлено с элементом пространства $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.

Напомним, что следом функции $f(x)\,,\,x \in \mathbb{R}^d$ на многообразии $M \subset \mathbb{R}^d$ называется функция $f(x)$, рассматриваемая как функция точки $x \in M$. Распределение не есть функция точки, поэтому понятие следа распределения на многообразии $M \subset \mathbb{R}^d$ нуждается в отдельном определении. Так как свойство задаваемого функцией $f(x)$ распределения принадлежать пространству $H^s(\mathbb{R}^d)\,,\,s \ge 0$, инвариантно относительно гладких замен переменных $x \mapsto y(x)$, то достаточно определить понятие следа на гиперплоскости, что и будет сделано ниже.

Пусть $f(x) \in H^s(\mathbb{R}^d)\,,\,s \ge 0$. Тогда существует такая последовательность $f_n(x) \in S(\mathbb{R}^d)$, что

$$\|f - f_n \mid H^s(\mathbb{R}^d)\| \to 0\,,\,n \to \infty. \tag{6.126}$$

На функциях из $S(\mathbb{R}^d)$ корректно определена операция τ_S взятия следа:

$$\tau_S : S(\mathbb{R}^d) \mapsto S(\mathbb{R}^{d-1})\,,\,\tau_S f(x_1\,,\,\dots x_{d-1}) = f(x_1,\dots,x_{d-1}\,,\,0). \tag{6.127}$$

Теорема 6.4.5. *Если*

$$f \in H^s(\mathbb{R}^d)\,,\,s > 1/2\,,\ f_n(x) \in S(\mathbb{R}^d)\,,\ \|f - f_n \mid H^s(\mathbb{R}^d)\| \to 0\,,\,n \to \infty, \tag{6.128}$$

то

1. Последовательность

$$\tau_S f_n(x_1, \dots, x_{d-1}) = f_n(x_1 \dots, x_{d-1}, 0)$$

сходится в пространстве $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ и ее предел $\tau_H f$:

$$\tau_H f := \lim_{n\to\infty} \tau_S f_n$$

зависит только от распределения $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ и не зависит от выбора аппроксимируещей последовательности f_n в (6.128).

2. Справедливо неравенство

$$\|\tau_H f \mid H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})\| \le C(d\,,\, s)\|f \mid H^s(\mathbb{R}^d)\|. \tag{6.129}$$

Описанную в теореме ситуацию можно пояснить на диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} S(\mathbb{R}^d) \ni f_n(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) & \xrightarrow[n\to\infty]{} & f \\ \tau_S \Big\downarrow & & \Big\downarrow \tau_H \\ S(\mathbb{R}^{d-1}) \ni f_n(x_1, \dots, x_{d-1}, 0) & \xrightarrow[n\to\infty]{} & \tau_H f \end{array}$$

$$f \in H^s(\mathbb{R}^d)\ ,\ \tau_H f \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1}).$$

Теорема утверждает, что если справедливо обозначенное верхней горизонтальной стрелкой предельное соотношение, то справедливо обозначенное нижней горизонтальной стрелкой предельное соотношение и корректно определено отображение

$$\tau_H : H^s(\mathbb{R}^d) \mapsto H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1}),$$

которое не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности f_n.

Распределение $\tau_H f \in H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ называется следом распределения $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ на гиперплоскости $x_d = 0$.

Доказательство. Пусть

$$f \in S(\mathbb{R}^d)\ ,\ F_d f(x_1, \dots, x_{d-1}|\xi_d) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_d)\exp(-i(\xi_d\,,\, x_d))dx_d.$$

Тогда

$$\tau_S f(x_1, \dots, x_{d-1}) = f(x_1, \dots, x_{d-1}, 0) = \\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_d f(x_1, \dots, x_{d-1}|\xi_d)d\xi_d.$$

Следовательно,

$$\widehat{\tau_S f}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, \xi_d) d\xi_d.$$

Далее имеем:

$$|\widehat{\tau_S f}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})|^2 \leq$$

$$const.\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi_n \Big) \times \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, \xi_d)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi_n \Big) =$$

$$const.(1+\xi_1^2+\ldots\xi_{d-1}^2)^{1/2-s} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, \xi_d)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi_n,$$

$$|\widehat{\tau_S f}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})|^2 (1+\xi_1^2+\ldots\xi_{d-1}^2)^{s-1/2} \leq$$

$$const. \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, \xi_d)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi_d,$$

$$\int |\widehat{\tau_S f}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1})|^2 (1+\xi_1^2+\ldots\xi_{d-1}^2)^{s-1/2} d\xi_1 \ldots d\xi_{d-1} \leq$$

$$const. \int |\widehat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, \xi_d)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi_1 \ldots \xi_d.$$

Мы доказали неравенство (6.129) для функций из $f \in S(\mathbb{R}^d)$. Из этого неравенства следует, что если последовательность $f_n \in S(\mathbb{R}^d)$ фундаментальна в метрике $H^s(\mathbb{R}^d)$, то последовательность $\tau_H f_n$ фундаментальна в метрике $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$. Так как это справедливо для *любой* сходящейся в метрике $H^s(\mathbb{R}^d)$ к распределению f последовательности $f_n \in S(\mathbb{R}^d)$, то предел последовательности $\tau_H f_n$ не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности f_n, а зависит только от распределения f. Теорема доказана.

6.4.4 Пространства $\mathring{H}^p(D)$.

Пусть D -отркрытая ограниченная область в $\mathbb{R}^d$,

$$C_{00}^{\infty}(D) = \{\phi \mid \phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)\,,\, \mathrm{supp}\phi \Subset D\}.$$

Определение 6.4.5. Пространство $\mathring{H}^p(D)$ -это замыкание множества $C_{00}^{\infty}(D)$ в метрике пространства $H^p(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathring{H}^p(D) := \mathbf{Cl}(C_{00}^{\infty}(D)).$$

Пространство $\overset{\circ}{H}{}^p(D)$ мы рассматриваем как подпространство пространства $H^p(\mathbb{R}^d)$ вместе с индуцированной из пространства $H^p(\mathbb{R}^d)$ метрикой, скалярным произведением и нормой:

$$\overset{\circ}{H}{}^p(D) \subset H^p(\mathbb{R}^d).$$

Если $p > 1/2$ и граница ∂D области D достаточно гладкая, то пространство $\overset{\circ}{H}{}^p(D)$ можно расматривать как множество тех распределений $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, которые равны нулю на границе области D.

Ясно, что

$$\forall(q > p): \ \overset{\circ}{H}{}^q(D) \subset \overset{\circ}{H}{}^p(D)\ , \ \forall(p \geq 0): \ \overset{\circ}{H}{}^p(D) \subset L^2(D).$$

Теорема 6.4.6. *При $q > p$ вложение*

$$\overset{\circ}{H}{}^q(D) \mapsto \overset{\circ}{H}{}^p(D)$$

компактно.

Утверждение теоремы означает, что множество

$$B_q = \{\phi \mid \phi \in \overset{\circ}{H}{}^q(D)\ , \ \|\phi \mid H^q(\mathbb{R}^d)\| \leq 1\}$$

компактно в метрике пространства $H^p(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Для простоты мы рассмотрим только случай $p \geq 0$. В этом случае распределения можно отождествить с функциями, которые задают эти распределения. Доказательству теоремы мы предпошлем несколько лемм.

Лемма 6.4.2. *Справедлива оценка:*

$$\forall(\phi \in B_q\, , \, q > p): \int\limits_{|\xi|>R} |\widehat{\phi}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^p d\xi \leq (1 + R^2)^{p-q}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\int\limits_{|\xi|>R} |\widehat{\phi}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^p d\xi = \int\limits_{|\xi|>R} |\widehat{\phi}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^{p-q}(1 + |\xi|^2)^q d\xi \leq$$

$$(1 + R^2)^{p-q} \int |\widehat{\phi}(\xi)|^2(1 + |\xi|^2)^q d\xi \leq (1 + R^2)^{p-q}.$$

Лемма 6.4.3. *В любом фиксированом шаре $\{\xi \mid |\xi| \leq R\}$ множество функций $\{\widehat{\phi}(\xi) \mid \phi(\xi) \in B_q\}$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено.*

Доказательство. Пусть $\kappa(x)$ -функция типа “гриб” и

$$\kappa(x) \equiv 1\,,\; x \in D.$$

Тогда

$$\forall(\phi \in B_q):\ \phi(x) = \kappa(x)\phi(x),$$
$$\widehat{\phi}(\xi) = \int \widehat{\kappa}(\xi - \eta)\widehat{\phi}(\eta)d\eta,$$
$$|\widehat{\phi}(\xi)|^2 \le \left(\int |\widehat{\kappa}(\xi-\eta)|^2(1+|\eta|^2)^{-q}d\eta\right) \times \left(\int |\widehat{\phi}(\eta)|^2(1+|\eta|^2)^{q}d\eta\right) \le$$
$$\int |\widehat{\kappa}(\xi-\eta)|^2 d\eta = const.$$
$$|\widehat{\phi}(\xi_1) - \widehat{\phi}(\xi_2)|^2 \le$$
$$\int |\widehat{\kappa}(\xi_1-\eta) - \widehat{\kappa}(\xi_2-\eta)|^2(1+|\eta|^2)^{-q}d\eta \le$$
$$\int |\widehat{\kappa}(\eta)|^2 |\exp(\xi_1 - \xi_2\,,\,\eta) - 1|^2 d\eta.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.4.4. *Если $\{\phi_n\} \subset B_q$, то для любого $\epsilon > 0$ последовательность $\{\phi_n\}$ содержит такую подпоследовательность $\{\phi_n^\epsilon\}$:*

$$\{\phi_n^\epsilon\} \subset \{\phi_n\},$$

что выполнено условие

$$\exists N\,,\ \forall(n > N\,,\, m > N):\ \|\phi_n^\epsilon - \phi_m^\epsilon \mid H^p(\mathbb{R}^d)\| < \epsilon.$$

Доказательство. Имеем:

$$\|\phi_n - \phi_m \mid H^p(\mathbb{R}^d)\|^2 =$$
$$\int\limits_{|\xi|<R} |\widehat{\phi}_n(\xi) - \widehat{\phi}_m(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^p d\xi + \int\limits_{|\xi|>R} |\widehat{\phi}_n(\xi) - \widehat{\phi}_m(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^p d\xi \le$$
$$4(1+R^2)^{p-q} + \int\limits_{|\xi|<R} |\widehat{\phi}_n(\xi) - \widehat{\phi}_m(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^p d\xi.$$

Теперь мы поступаем так: сначала мы выбираем R достаточно большим, а потом *при фиксированном* R мы выбираем из последовательности $\{\phi_n\}$ такую подпоследовательность $\{\phi_n^\epsilon\}$, которая равномерно сходится в шаре

$\{\xi \mid |\xi| \leq R\}$. Полученная подпоследовательность удовлетворяет условиям леммы.

Перейдем к доказательству теоремы. Нам нужно доказать, что любая последовательность $\{\phi_n\} \subset B_q$ содержит подпоследовательность, которая сходится в метрике пространства $H^p(\mathbb{R}^d)$. Пусть

$$\epsilon(m) \to 0\,,\ m \to \infty\,,\ \{\phi_n^{\epsilon(m+1)}\} \subset \{\phi_n^{\epsilon(m)}\} \subset \{\phi_n\}$$

-последовательности, существование которых гарантировано предыдущей леммой. Последовательность $\phi_n^{\epsilon(n)}$ -искомая.

Теорема доказана.

6.5 Коментарии и литературные указания.

♠

6.5.1 Преобразование Фурье.

Приведем вывод относящихся к преобразованию Фурье формул. Ниже символ

$$\int \dots dx$$

означает интеграл по пространству $\mathbb{R}^d$. Имеем:

$$\int \exp(-ax^2)dx = (\pi/a)^{d/2}\,,$$

$$\int \exp(-ax^2 + x\xi)dx = \int \exp(-a(x-\xi/2a)^2 + \xi^2/4a)dx) = (\pi/a)^{d/2}\exp(\xi^2/4a)\,,$$

аналитическое продолжение:

$$\int \exp(-ax^2 + ix\xi)dx = (\pi/a)^{d/2}\exp(-\xi^2/4a),$$

$$\exp(-\xi^2/4a) = (a/\pi)^{d/2}\int \exp(-ax^2 + ix\xi)dx\,,$$

$$(4\pi t)^{-d/2}\exp(-(x-y)^2/4t) = (2\pi)^{-d}\int \exp(-tz^2 + iz(x-y))dz\,,$$

$$(4\pi t)^{-d/2}\int \exp(-(x-y)^2/4t)f(y)dy = (2\pi)^{-d}\int(\int \exp(-tz^2 + iz(x-y))f(y)dy)dz\,,$$

$$(\pi)^{-d/2}\int \exp(-z^2)f(x+2\sqrt{t}z)dz = (2\pi)^{-d}\int \exp(-tz^2 + ixz)F(f)(z)dz.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу $t \to +0$, получаем формулу обращения:

$$f(x) = (2\pi)^{-d}\int \exp(izx)F(f)(z)dz.$$

Отсюда следует равенство Парсеваля:

$$\int f(x)^* g(x)dx = (2\pi)^{-d}\int f(x)^*(\int \exp(-ixz)F(g)(z)dz)dx =$$

$$(2\pi)^{-d}\int F(f)^*(z)F(g)(z)dz.$$

♣

6.5.2 Литературные комментарии

С математической точки зрения теория распределений -это специальный раздел теории линейных топологических пространств, в рамках которой результаты теории распределений приобретают естественный и законченный вид. Введение в теорию линейных топологических пространств есть в книгах [30], [41],[40]. Доступное для начинающих учебное пособие по теории распределений -книга [39].

Приложение A

Приложение

A.1 Преобразование Вейля.

Преобразование Вейля (по другой терминологии -отображение Вейля или вейлевское квантование) было введено в ранних работах по квантовой механике как алгоритм, который функции на фазовом прстранстве (классической наблюдаемой) ставит в соответствие оператор в гильбертовом пространстве (квантовую наблюдаемую). Вейлевское квантование обратимо: каждый оператор Гильберта-Шмидта в гильбертовом пространстве есть преобразование Вейля функции на фазовом пространстве (эта функция обычно называется вейлевским символом оператора). Это обстоятельство лежит в основе метода фазового пространства в квантовой механике, при котором операторные уравнения движения в форме Гейзенберга заменяются уравнениями (обычно интегродифференциальными) для вейлевских символов операторов. Метод фазового пространства и его модификации широко используются в задачах статистической физики, физике твердого тела, квантовой оптике, теории столкновений и т. д. Связанный с преобразованием Вейля математический аппарат получил применения в теории представлений групп, теории вейвлет преобразования, теории дифференциальных уравнений и вычислительной математике.

В теории преобразование Вейля исходным объектом является фазовое пространство, которое в простейшем случае есть прямая сумма линейного пространства L и его сопряженного $L^{\star}$. Мы рассмотрим случай, когда линейное пространство есть $\mathbb{R}^d$ и его сопряженное отождествлено с $\mathbb{R}^d$. Таким образом, в рассматриваемом нами случае фазовое пространство есть пространство

$$\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d. \tag{A.1}$$

Второе слагаемое в (A.1) рассматривается как пространство, сопряженное к первому слагаемому, поэтому в рассматриваемом нами случае переход от одного ортонормированного базиса к другому в фазовом пространстве пространстве осуществляется с помощью матрицы вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_d & 0 \\ 0 & \lambda_d \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

где λ_d -ортогональная матрица размера $d \times d$.

Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^d$ мы обозначим символом

$$a \cdot b = \sum_{1 \le j \le d} a_j b_j.$$

Пусть

$$\sigma \colon \mathbb{R}^{2d} \mapsto \mathbb{R}^1$$

-билинейная форма вида

$$\sigma(q_1 \oplus p_1\,,\, q_2 \oplus p_2) = q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1. \tag{A.3}$$

Форма (A.3) кососимметрична:

$$\sigma(q_1 \oplus p_1\,,\, q_2 \oplus p_2) = -\sigma(q_2 \oplus p_2\,,\, q_1 \oplus p_1), \tag{A.4}$$

невырождена:

$$(\forall q_1 \oplus p_1 \colon\ \sigma(q_1 \oplus p_1\,,\, q_2 \oplus p_2) = 0) \Rightarrow (q_2 \oplus p_2 = 0) \tag{A.5}$$

и инвариантна относительно преобразований вида (A.2):

$$\sigma(\Lambda(q_1 \oplus p_1)\,,\, \Lambda(q_2 \oplus p_2)) \equiv \sigma(q_1 \oplus p_1\,,\, q_2 \oplus p_2).$$

Удовлетворяющая условиям (A.4)-(A.5) билинейная форма называется симплектической формой. Можно доказать, что при соответствующем выборе базиса в линейном пространстве L любая симплектическая форма на пространстве $L \oplus L^\star$ в координатах имеет вид (A.3).

На функциях из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$ определим симплектическое преобразование Фурье:

$$F_\sigma(\phi)(\xi \oplus \eta) = (2\pi)^{-d} \int \exp(-i\sigma(\xi \oplus \eta\,,\, q \oplus p))\phi(q \oplus p)\, dq dp.$$

Обратное симплектическое преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$F_\sigma^{-1} \colon\ \phi(q \oplus p) = (2\pi)^{-d} \int \exp(i\sigma(\xi \oplus \eta\,,\, q \oplus p)) F_\sigma(\phi)(\xi \oplus \eta)\, d\xi d\eta.$$

Равенство Парсеваля для симплектического преобразования Фурье имеет вид:

$$\int |\phi(q \oplus p)|^2 \, dqdp = \int |F_\sigma(\phi)(\xi \oplus \eta)|^2 \, d\xi d\eta.$$

Следует отметить, что в теории преобразования Вейля возможен иной выбор знаков у множителей i в экспонентах и степеней множителя 2π перед интегралами.

Вейлевское квантование состоит в том, что по аналогии с формулой обращения преобразования Фурье каждой функции на фазовом пространстве ставится в соответствие оператор в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\phi(Q\,,\,P) = (2\pi)^{-d} \int \exp(i(\xi \cdot P - \eta \cdot Q))F_\sigma(\phi)(\xi \oplus \eta) \, d\xi d\eta,$$

где $Q\,,\,P$ -операторы координаты и импульса (математически строгое определение оператора $(\xi \cdot P - \eta \cdot Q)$ дано ниже).

Переходим к построению отображения (квантования) Вейля.

В пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$ определим операторы

$$\forall (p \in \mathbb{R}^d) : \; V(p)\psi(x) = \exp(-ip \cdot x)\psi(x),$$
$$\forall (q \in \mathbb{R}^d) : \; U(q)\psi(x) = \psi(x - q).$$

Лемма A.1.1. *Операторы $V(p)$ и $U(p)$ унитарно эквивалентны: если F -преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^d)$, то*

$$FU(p) = V(p)F.$$

Доказательство проводится прямой выкладкой. Имеем:

$$FU(p)\psi(\xi) = \int \exp(-i\xi \cdot x)\psi(x - p) \, dx = \exp(-i\xi \cdot p) \int \exp(-i\xi \cdot x)\psi(x) \, dx =$$
$$V(p)F\psi(\xi).$$

Лемма A.1.2. *1. Справедливы соотношения:*

$$\forall (p_1 \in \mathbb{R}^d\,,\, p_2 \in \mathbb{R}^d) \colon \; V(p_1)V(p_2) = V(p_1 + p_2), \tag{A.6}$$
$$\forall (q_1 \in \mathbb{R}^d\,,\, q_2 \in \mathbb{R}^d) \colon \; U(q_1)U(q_2) = U(q_1 + q_2), \tag{A.7}$$
$$U(q)V(p) = \exp(iq \cdot p)V(p)U(q). \tag{A.8}$$

2. Для любого элемента $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ функции

$$\mathbb{R}^d \ni q \mapsto V(p)\psi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$
$$\mathbb{R}^d \ni q \mapsto U(q))\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

непрерывны в метрике пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$.

3. Операторы $V(p)$ и $U(q)$ унитарны и справедливы равенства:

$$V^*(p) = V(-p)\ ,\ U^*(q) = U(-q). \tag{A.9}$$

Доказательство. Равенства (A.6)-(A.7) очевидны. Далее имеем:

$$U(q)V(p)\psi(x) = U(q)(\exp(-ip\cdot x)\psi(x)) = \exp(-ip\cdot(x-q))\psi(x-q) = \\ \exp(iq\cdot p)\exp(-ip\cdot x)\psi(x-q) = \exp(iq\cdot p)V(p)U(q)\psi(x).$$

Соотношение (A.8) доказано.

Сотношения (A.6)-(A.8) называются каноническими перестановочными соотношениями в форме Вейля.

Для доказательства второго утверждения леммы силу равенства (A.6) и леммы A.1.1 достаточно доказать непрерывность функции $p \mapsto V(p)\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ в точке $p = 0$. Имем:

$$\|\psi - V(p)\psi\|^2 = \int |1 - \exp(-ip\cdot x)|^2 |\psi(x)|^2\, dx \to 0\, ,\ |p| \to 0.$$

Второе утверждение леммы доказано. Третье утверждение очевидно.

Следствие A.1.1. *В пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$ функции*

$$t \mapsto V(tp)\ ,\ t \mapsto U(tq)$$

образуют полугруппу унитарных операторов класса C_0.

Из теоремы Стоуна следует, что операторы

$$p\cdot Q := i\partial_t V(tp)\big|_{t=0}\ ,\ q\cdot P := i\partial_t U(tq)\big|_{t=0} \tag{A.10}$$

самосопряжены.

На функции из C_0^∞ эти операторы действуют по формулам:

$$(p\cdot Q)\psi(x) = (p\cdot x)\psi(x)\ ,\ (q\cdot P)\psi(x) = -iq\cdot\partial_x\psi(x).$$

Следует помнить, что область опеределения суммы двух неораниченных операторов может отличаться от области определения слагаемых.

Определим оператор

$$W(q\, ,\, p) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\frac{i}{2}q\cdot p)U(-q)V(p). \tag{A.11}$$

Лемма A.1.3. *1. Справедливы равенства*

$$W(q\,,\,p)=\exp(-\frac{i}{2}q\cdot p)V(p)U(-q). \tag{A.12}$$

$$W(q\,,\,p)\psi(x)=\exp(-\frac{i}{2}q\cdot p-ip\cdot x)\psi(x+q). \tag{A.13}$$

$$W(q_1\,,\,p_1)W(q_2\,,\,p_2)=\exp(-\frac{i}{2}\sigma(q_1\oplus p_1\,,\,q_2\oplus p_2))W(q_1+q_2\,,\,p_1+p_2). \tag{A.14}$$

$$W(q\,,\,p)^*=W(-q\,,\,-p). \tag{A.15}$$

2. В пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$ функция

$$t\mapsto W(tq\,,\,tp)$$

есть полугруппа унитарных операторов класса C_0.

Доказательство. Для доказательства превого равенства мы используем равенство (A.8)и получаем:

$$W(q\,,\,p)=\exp(\frac{i}{2}q\cdot p-iq\cdot p)V(p)U(-q)=$$
$$\exp(-i\frac{i}{2}q\cdot p)V(p)U(-q).$$

Второе равенство доказывается вычислением на основе равенства (A.12) и определений операторов $V(p)$ и $U(q)$.

Для доказательства третьего равенства мы используем равенство (A.12):

$$W(q_1\,,\,p_1)W(q_2\,,\,p_2)=\exp(\frac{i}{2}(q_1\cdot p_1-q_2\cdot p_2))U(-q_1)V(p_1)V(p_2)U(-q_2)=$$
$$\exp(\frac{i}{2}(q_1\cdot p_1-q_2\cdot p_2))U(-q_1)V(p_1+p_2)U(-q_2)=$$
$$\exp(\frac{i}{2}(q_1\cdot p_1-q_2\cdot p_2)-iq_1(p_1+p_2)+\frac{i}{2}(p_1+p_2)(q_1+q_2))W(q_1+q_2\,,\,p_1+p_2)=$$
$$\exp(-\frac{i}{2}(q_1\cdot p_2-q_2\cdot p_1))W(q_1+q_2\,,\,p_1+p_2).$$

Остальные утверждения леммы очевидны.

Пусть

$$L=i\partial_t W(tq\,,\,tp)\big|_{t=0}$$

-инфинитезимальный оператор полугруппы $t\mapsto W(tq\,,\,tp)$. Из теоремы Стоуна следует, что оператор L самосопряжен. На финитные функции оператор L действует по формуле

$$L\psi(x)=i\partial_t V(tp)\big|_{t=0}+i\partial_t U(-tq)\big|_{t=0}=(p\cdot x)\psi(x)+iq\cdot\partial_x\psi(x),$$

поэтому

$$W(q\,,\,p)=\exp(i(q\cdot P-p\cdot Q)).$$

Положим

$$Z(\phi\,,\,\psi\mid\xi\,,\,\eta)=(2\pi)^{-d/2}<\phi\,,\,W(\xi\,,\,\eta)\psi>.$$

Лемма А.1.4. *Справедливо равенство*

$$\int Z(\phi_1\,,\,\psi_1\mid\xi\,,\,\eta)^*Z(\phi_2\,,\,\psi_2\mid\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta=<\phi_2\,,\,\phi_1><\psi_1\,,\,\psi_2>.$$

Доказательство. Имеем:

$$<\phi\,,\,W(\xi\,,\,\eta)\psi>=\int\phi(x)^*\exp(-\frac{i}{2}\xi\cdot\eta-i\eta\cdot x)\psi(x+\xi)dx=$$
$$\int\phi(x-\frac{1}{2}\xi)\exp(-i\eta\cdot x)\psi(x+\frac{1}{2}\xi)dx.$$
$$\int Z(\phi_1\,,\,\psi_1\mid\xi\,,\,\eta)^*Z(\phi_2\,,\,\psi_2\mid\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta=$$
$$(2\pi)^{-d}\int\exp(i\eta\cdot(x-y))\phi_1(x-\frac{1}{2}\xi)\psi_1(x+\frac{1}{2}\xi)^*\phi_2(y-\frac{1}{2}\xi)^*\times$$
$$\times\,\psi_2(y+\frac{1}{2}\xi)dxdyd\eta d\xi=$$
$$\int\phi_1(x-\frac{1}{2}\xi)\psi_1(x+\frac{1}{2}\xi)^*\phi_2(x-\frac{1}{2}\xi)^*\psi_2(x+\frac{1}{2}\xi)dxd\xi=$$
$$<\psi_1\,,\,\psi_2><\phi_2\,,\,\phi_1>.$$

Следствие А.1.2. *Если функции* $e_j(x)\,,\,1\le j<\infty$ *образуют полную ортонормированную систему в пространстве* $L^2(\mathbb{R}^d)$, *то функции*

$$z_{i\,,\,j}(\xi\,,\,\eta):=(2\pi)^{-d/2}<e_i\,,\,W(\xi\,,\,\eta)e_j>\ \ 1\le i<\infty\,,\ 1\le j<\infty$$

образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{2d}\,,\,d\xi d\eta)$.

Доказательство. Докажем полноту системы $z_{i\,,\,j}(\xi\,,\,\eta)$. Имеем:

$$\int z_{i\,,\,j}(\xi\,,\,\eta)^*h(\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta=$$
$$(2\pi)^{-d/2}\int e_i(x-\frac{1}{2}\xi)e_j(x+\frac{1}{2}\xi)\exp(i\eta\cdot x)h(\xi\,,\,\eta)dxd\xi d\eta.$$

Функции $e_i(x-\frac{1}{2}\xi)e_j(x+\frac{1}{2}\xi)$ образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{2d}\,,\,dxd\xi)$, поэтому из равенства

$$\forall(i\,,\,j):\ \int z_{i\,,\,j}(\xi\,,\,\eta)^*h(\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta=0$$

следует равенство
$$\int \exp(i\eta\cdot x)h(\xi\,,\,\eta)d\eta \equiv 0,$$
и
$$h(\xi\,,\,\eta)\equiv 0.$$
Полнота системы $z_{i\,,\,j}(\xi\,,\,\eta)$ доказана. Ортонормированность системы $z_{i\,,\,j}(\xi\,,\,\eta)$ следует из предыдущей леммы.

Определение А.1.1. На функциях из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$ преобразование Вейля определено как отображение, которое функции $a(q\,,\,p)\in S(\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d)$ ставит в соответствие оператор $T_w(a)$ на пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$:
$$\forall (a\in S(\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d)):\; T_w(a) = (2\pi)^{-d}\int F_\sigma(a)(\xi\oplus\eta)W(\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta, \quad (\text{A.16})$$
где
$$F_\sigma(a)(\xi\oplus\eta) = (2\pi)^{-d}\int \exp(-i\sigma(\xi\oplus\eta\,,\,q\oplus p))a(q\oplus p)\,dqdp. \quad (\text{A.17})$$

Интеграл в формуле (А.16) понимается как интеграл Бохнера в банаховом пространстве $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d)\mapsto L^2(\mathbb{R}^d))$. В формуле (А.16)
$$F_\sigma(a)(\xi\oplus\eta)\in S(\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d)\,,\;\|W(\xi\,,\,\eta)\mid \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d)\mapsto L^2(\mathbb{R}^d))\|\equiv 1,$$
поэтому сходимость интеграла сомнений не вызывает.

Теорема А.1.1. *На функциях из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d)$ преобразование Вейля удовлетворяет условиям:*

1. $T_w(a)^* = T_w(a^*)$. (А.18)
2. $\forall (a\in S(\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d)):\; T_w(a)\in HS\,,\;\|T_w(a)\mid HS\|^2 = (2\pi)^{-d}\|a\mid L^2(\mathbb{R}^d\oplus\mathbb{R}^d)\|^2.$ (А.19)
3. $\forall(\psi\in S(\mathbb{R}^d)): T_w(a)\psi(x) = (2\pi)^{-d}\displaystyle\int \exp(ip\cdot(x-\xi))a\left(\frac{x+\xi}{2}\,,\,p\right)\psi(\xi)dpd\xi.$ (А.20)

Доказательство. Имеем:
$$T_w(a)^* =$$
$$(2\pi)^{-d}\int F_\sigma(a)(\xi\,,\,\eta)^*W(\xi\,,\,\eta)^*d\xi d\eta = (2\pi)^{-d}\int F_\sigma(a)(\xi\,,\,\eta)^*W(-\xi\,,\,-\eta)d\xi d\eta =$$
$$(2\pi)^{-d}\int F_\sigma(a)(-\xi\,,\,-\eta)^*W(\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta = (2\pi)^{-d}\int F_\sigma(a^*)(\xi\,,\,\eta)W(\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta.$$

Первое утверждение теоремы доказано. Докажем второе утверждение. Пусть $e_j(x)$, $1 \leq j < \infty$ -произвольная полная ортонормированная система в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$. С учетом следствия A.1.2 и равенства Парсеваля, мы имеем:

$$\|T_w(a) \mid HS\|^2 = \sum_{i\,,\,j} |< e_i\,,\, T_w(a)e_j >|^2 =$$
$$\sum_{i\,,\,j} (2\pi)^{-2d} |\int F_\sigma(a)(\xi\,,\,\eta) < e_i\,,\, W(\xi\,,\,\eta)e_j > d\xi d\eta|^2 =$$
$$(2\pi)^{-d}\|F_\sigma(a) \mid L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)\|^2 = (2\pi)^{-d}\|a \mid L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)\|^2.$$

Докажем третье утверждение теоремы. Воспользовавшись равенством (A.13), мы имеем:

$$T_w(a)\psi(x) = (2\pi)^{-d}\int F_\sigma(a)(\xi\,,\,\eta) \exp\left(-\frac{i}{2}\eta\cdot\xi - i\eta\cdot x\right)\psi(x+\xi)d\xi d\eta =$$
$$(2\pi)^{-2d}\int a(q\,,\,p)\exp\left(-\frac{i}{2}\eta\cdot\xi - i\eta\cdot x - i\xi\cdot p + i\eta\cdot q\right)\psi(x+\xi)dqdpd\xi d\eta =$$
$$(2\pi)^{-2d}\int \exp\left(-\frac{i}{2}\eta\cdot(\xi-x) - i\eta\cdot x - i(\xi-x)\cdot p + i\eta\cdot q\right)a(q\,,\,p)\psi(\xi)dqdpd\xi d\eta =$$
$$(2\pi)^{-2d}\int \exp\left(i\eta\cdot\left(q-\frac{x+\xi}{2}\right) + ip\cdot(x-\xi)\right)a(q\,,\,p)\psi(\xi)dqdpd\xi d\eta =$$
$$(2\pi)^{-d}\int \delta\left(q-\frac{x+\xi}{2}\right)\exp(ip\cdot(x-\xi))a(q\,,\,p)\psi(\xi)dqdpd\xi =$$
$$(2\pi)^{-d}\int \exp(ip\cdot(x-\xi))a\left(\frac{x+\xi}{2}\,,\,p\right)\psi(\xi)dpd\xi.$$

Теорема доказана.

Так как пространство $S(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$, то из (A.19) вытекает

Следствие A.1.3. *Отображение*

$$S(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d) \ni a \mapsto T_w(a) \in HS$$

продолжается по непрерывности до отображения

$$L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d) \ni a \mapsto T_w(a) \in HS.$$

Отображение

$$L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d) \ni a \mapsto (2\pi)^{d/2}T_w(a) \in HS$$

унитарно:

$$\forall(a \in L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)\,,\, b \in L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)):\ \ < a\,,\, b >= \tag{A.21}$$

$$(2\pi)^d < T_w(a)\,,\, T_w(b) >= (2\pi)^d \sum_{1 \leq j < \infty} < T_w(a)e_j\,,\, T_w(b)e_j > . \tag{A.22}$$

В левой части равенства (A.21) стоит скалярное поизведение в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$, в левой части равенства (A.22) стоит скалярное произведение в пространстве операторов Гильберта-Шмидта HS, в правой части равенства (A.22) стоит скалярное произведение в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$ и $e_j(x)\,,\, 1 \leq j < \infty$ -произвольная полная ортонормированная система в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Формула (A.19) позволяет оснащение пространства $L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$ переносить на оснащение пространства операторов Гильберта-Шмидта HS и расширять преобразование Вейля на функции, которые не принадлежат пространству $L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$.

Операторы $T_w(a)$ вида (A.20) в теории дифференциальных уравнений называются псевдодифферециальными операторами, а функция a в (A.20) -называется вейлевским символом оператора $T_w(a)$. Можно доказать, что формула (A.20) корректно определяет оператор на пространстве C_0^∞ в том случае, если функция a растет не быстрее полинома. В качестве примера вычислим оператор с вейлевским символом

$$a(q\,,\, p) = \frac{1}{2}p^2 + v(q)\ ,\ v(q) \in C_0^\infty.$$

Имеем:

$$T_w(a)\psi(x) = (2\pi)^{-d} \int \exp(ip \cdot (x - \xi)) \left(\frac{1}{2}p^2 + v\left(\frac{x+\xi}{2} \right) \right) \psi(\xi) d\xi dp =$$
$$- \frac{1}{2}\Delta_x \psi(x) + \int \delta(x - \xi) v \left(\frac{x+\xi}{2} \right) \psi(\xi) d\xi =$$
$$- \frac{1}{2}\Delta_x \psi(x) + v(x)\psi(x).$$

Мы видим что в рассматриваемом случае отображение Вейля совпдает с вейлевским квантованием.

Докажем, что отображение Вейля обратимо.

Теорема A.1.2. *Пусть T -оператор Гильберта-Шмидта в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$. Тогда существует такая функция $a \in L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$, что $T = T_w(a)$. Эта функция оперделена равенствами* (A.23)-(A.24).

Доказательство. Пусть $e_j(x)\,,\ 1 \le j < \infty$ -произвольная полная ортонормированная система в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d)$. Согласно следствию A.1.2 функции

$$z^*_{i\,,j}(\xi\,,\,\eta) = (2\pi)^{-d/2} < e_i\,,\, W(\xi\,,\,\eta)e_j >^*$$

образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$. Так как T -оператор Гильберта-Шмидта, то

$$\sum_{i\,,j} | < e_i\,,\, Te_j > |^2 < \infty,$$

поэтому ряд

$$\omega(\xi\,,\,\eta) := (2\pi)^{d/2} \sum_{i\,,j} < e_i\,,\, Te_j > z^*_{i\,,j}(\xi\,,\,\eta) \tag{A.23}$$

сходится в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$ и функция

$$a(q\,,\,p) := F_\sigma^{-1}(\omega)(q\,,\,p) \tag{A.24}$$

принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$. Имеем:

$$\forall (i\,,\,j): \ \ < e_i\,,\, T_w(a)e_j >= (2\pi)^{-d} \int \omega(\xi\,,\,\eta) < e_i\,,\, W(\xi\,,\,\eta)e_j > d\xi d\eta =$$
$$(2\pi)^{-d/2} < z^*_{i\,,j}\,,\,\omega >=< e_i\,,\, Te_j > .$$

Следовательно,

$$T = T_w(a).$$

Теорема доказана.

Если оператор T ядерный, то формулы (A.23)-(A.24) можно преобразовать к более привычному для физика виду. Имеем:

$$a(q\,,\,p) := (2\pi)^{d/2} F_\sigma^{-1}\left(\sum_{i\,,j} < e_i\,,\, Te_j > z^*_{i\,,j}(\xi\,,\,\eta)\right)(q\,,\,p) =$$
$$F_\sigma^{-1}\left(\sum_{i\,,j} < e_i\,,\, Te_j >< W(\xi\,,\,\eta)e_j\,,\, e_i >\right)(q\,,\,p) =$$
$$F_\sigma^{-1}\left(\sum_{j} < W(\xi\,,\,\eta)e_j\,,\, Te_j >\right)(q\,,\,p) =$$
$$F_\sigma^{-1}\left(\sum_{j} < e_j\,,\, W(\xi\,,\,\eta)^* Te_j >\right)(q\,,\,p) = F_\sigma^{-1}(Sp(W^*(\xi\,,\,\eta)T))(q\,,\,p).$$

Изучим связь между композицией операторов Гильберта-Шмидта и их вейлевскими символами. Пусть

$$a \in S(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)\ ,\ b \in S(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d). \tag{A.25}$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
&T_w(a) \cdot T_w(b) = \\
&\int F_\sigma(a)(\xi_1 \oplus \eta_1) F_\sigma(b)(\xi_2 \oplus \eta_2) W(\xi_1\,,\, \eta_1) W(\xi_2\,,\, \eta_2) d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 = \\
&\int F_\sigma(a)(\xi_1 \oplus \eta_1) F_\sigma(b)(\xi_2 \oplus \eta_2) \exp(-i\frac{1}{2}\sigma(\xi_1 \oplus \eta_1\,,\, \xi_2 \oplus \eta_2)) \times \\
&W(\xi_1 + \xi_2\,,\, \eta_1 + \eta_2) d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 = \\
&\int F_\sigma(a)(\xi_1 \oplus \eta_1) F_\sigma(b)(\xi_2 - \xi_1 \oplus \eta_2 - \eta_1) \exp(-i\frac{1}{2}\sigma(\xi_1 \oplus \eta_1\,,\, \xi_2 \oplus \eta_2)) \times \\
&W(\xi_2\,,\, \eta_2) d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 = T_w(a \odot b),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&a \odot b(q\,,\, p) := F_\sigma^{-1}(F_\sigma(a) \diamond F_\sigma(b))(q\,,\, p), \\
&F_\sigma(a) \diamond F_\sigma(b)(\xi \oplus \eta) = \\
&\int F_\sigma(a)(\xi_1 \oplus \eta_1) F_\sigma(b)(\xi - \xi_1 \oplus \eta - \eta_1) \exp(-i\frac{1}{2}\sigma(\xi_1 \oplus \eta_1\,,\, \xi \oplus \eta)) d\xi_1 d\eta_1.
\end{aligned}$$

Если выполнено условие (A.25), то $a \odot b \in S(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$. Из равенства

$$T_w(a) \cdot T_w(b) = T_w(a \odot b)$$

следует, что бинарная операция

$$(a\,;\, b) \mapsto a \odot b$$

ассоциативна (что можно проверить и прямой выкладкой) и линейна по каждому аргументу, а линейное пространство $S(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d)$ вместе с бинарной операцией $\odot$ есть (некоммутативная) алгебра. Отображение

$$a \mapsto T_w(a)$$

есть представление этой алгебры операторами Гильберта-Шмидта.

A.2 Теорема Дж. фон Неймана о единственности
представления КПС в форме Вейля

Мы задали операторы $U(q)$, $V(p)$ явными формулами и потом доказали, что построенный на их основе оператор $W(q\,,\,p)$ унитарен и удовлетворяет соотношениям (A.14)-(A.15), которые, очевидно, эквивалентны каноническим перестановочным соотношениями в форме Вейля (A.6)-(A.8). Оказывается, что соотношения (A.14)-(A.15) определяют операторную функцию $W(q\,,\,p)$ (а потому и операторы $U(q)$, $V(p)$) с точностью до унитарной эквивалентности. Соответствующее утверждение доказано Дж. фон Нейманом в 1931 году (Johann von Neumann (1903-1957), современное произношение этой фамилии на русском язые -Нойман, американское написание имени: John Von). В математическом фольклоре соответствующая теорема называется теоремой Дж. фон Неймана (Ноймана) о единственности шредингеровсого представления КПС (канонических перестновочных соотношений) в форме Вейля. Приведем одну из редакций этого утверждения.

Теорема A.2.1. *Пусть в гильбертовом пространстве H задана операторная функция*

$$\widetilde{W}\colon\ \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d \ni q \oplus p \mapsto \widetilde{W}(q\,,\,p) \in \mathcal{L}(H \mapsto H),$$

которая удовлетворяет условиям:

1. Операторы $\widetilde{W}(q\,,\,p)$ унитарны и

$$\widetilde{W}(q\,,\,p)^* = \widetilde{W}(-q\,,\,-p).$$

2. Операторная функция $\widetilde{W}(q\,,\,p)$ непрерывна в сильной операторной топологии. Это означает, что $\forall(\psi \in H)$ функция

$$\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d \ni q \oplus p \mapsto \widetilde{W}(q\,,\,p)\psi \in H$$

непрерывна в норме пространства H.

3. Выполнено тождество:

$$\forall(q_1 \oplus p_1 \in \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d\,,\,,q_2 \oplus p_2 \in \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d):$$
$$\widetilde{W}(q_1\,,\,p_1)\widetilde{W}(q_2\,,\,p_2) = \exp(-\frac{i}{2}\sigma(q_1 \oplus p_1\,,\,q_2 \oplus p_2))\widetilde{W}(q_1+q_2\,,\,p_1+p_2).$$

4. Пространство H -наименьшее нетривиальное пространство, которое инвариантно относительно всех операторов $\widetilde{W}(q\,,\,p)$.

Тогда существует такой унитарный оператор U:

$$U\colon\ H \mapsto L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx),$$

что

$$\forall (q\,,\,p)\colon W(q\,,\,p)U = U\widetilde{W}(q\,,\,p).$$

Доказательство этой теоремы потребует от нас только умения вычислять гауссовы интегралы и основано на следующей лемме Неймана.

Лемма А.2.1. *Если выполнены условия теоремы, то оператор*

$$P := (2\pi)^{-d}\int \exp(-(\xi^2+\eta^2)/4)\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta$$

удовлетворяет условиям:

$$1.\ P^* = P. \tag{A.26}$$

$$2. P \neq 0. \tag{A.27}$$

$$3.\ \forall (q\,,\,p)\ :\ P\widetilde{W}(q\,,\,p)P = \exp(-(q^2+p^2)/4)P. \tag{A.28}$$

$$4.\ P^2 = P. \tag{A.29}$$

Доказательство леммы проводится прямой выкадкой. Доказываем первое утверждение. Имеем:

$$P^* = (2\pi)^{-d}\int \exp(-(\xi^2+\eta^2)/4)\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)^* d\xi d\eta =$$

$$(2\pi)^{-d}\int \exp(-(\xi^2+\eta^2)/4)\widetilde{W}(-\xi\,,\,-\eta)d\xi d\eta =$$

$$(2\pi)^{-d}\int \exp(-(\xi^2+\eta^2)/4)\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta = P.$$

Доказываем второе утверждение. Имеем:

$$\widetilde{W}(q\,,\,p)P = (2\pi)^{-d}\int \exp(-(\xi^2+\eta^2)/4)\widetilde{W}(q\,,\,p)\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta =$$

$$(2\pi)^{-d}\int \exp(-(\xi^2+\eta^2)/4 - i\sigma(q\oplus p\,,\,\xi\oplus\eta)/2)\widetilde{W}(\xi+q\,,\,\eta+p)d\xi d\eta.$$

Делаем замену переменных в интеграле и учитываем кососимметричность билинейной формы σ:

$$\xi \to \xi - q\,,\ \eta \to \eta - p$$
$$\sigma(q\oplus p\,,\,\xi\oplus\eta) \to \sigma(q\oplus p\,,\,\xi - q\oplus \eta - p) = \sigma(q\oplus p\,,\,\xi\oplus\eta).$$

Получаем:

$$\widetilde{W}(q\,,\,p)P = (2\pi)^{-d}\int \exp(-Q)\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta \tag{A.30}$$

где

$$Q = ((\xi - q)^2 + (\eta - p)^2)/4 + i\sigma(q\oplus p\,,\,\xi\oplus\eta)/2). \tag{A.31}$$

Если

$$P = 0,$$

то

$$\forall(q\oplus p\,,\,\phi\,,\,\psi\in H):\ \ <\phi\,,\,\widetilde{W}(q\,,\,p)P\psi>\equiv 0$$

и

$$J_{\phi\psi}(q\,,\,p) := (2\pi)^{-d}\int \exp(-Q) <\phi\,,\,\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)\psi> d\xi d\eta \equiv 0.$$

Преобразуем интеграл

$$J_{\phi\psi}(q\,,\,p) = (2\pi)^{-d}\exp(-\frac{1}{4}(q^2+p^2))\times$$
$$\int \exp(-\frac{\xi^2+\eta^2}{4} + \frac{1}{2}\xi(q-ip) + \frac{1}{2}\eta(p-iq)) <\phi\,,\,\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)\psi> d\xi d\eta \tag{A.32}$$

Так как функция

$$(\xi\,,\,\eta)\mapsto <\phi\,,\,\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)\psi> \tag{A.33}$$

непрерывна и оганичена, то интеграл $J_{\phi\psi}(q\,,\,p)$ сходится при всех комплексных $q\in\mathbb{C}^d\,,\,p\in\mathbb{C}^d$, в частности и на многообразии

$$(q-ip)\in\mathbb{R}^d\,,\,(p-iq))\in\mathbb{R}^d.$$

Отсюда следует, что преобразование Фурье функции

$$(\xi\,,\,\eta)\mapsto \exp(-\frac{\xi^2+\eta^2}{4}) <\phi\,,\,\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)\psi>$$

тождественно равно нулю и поэтому функция (A.33) тождественно равна нулю $\forall(\phi\,,\,\psi\in H)$, чего быть не может, если оператор $\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)$ не есть оператор умножения на 0. Утверждение 2 доказано.

Переходим к доказательству третьего утверждения. Имем:

$$P\widetilde{W}(q\,,\,p)P =$$
$$(2\pi)^{-2d}\int \exp(-Q)\widetilde{W}(\xi'\,,\,\eta')\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta)d\xi d\eta d\xi' d\eta'$$

где

$$Q = ((\xi - q)^2 + (\eta - p)^2)/4 + i\sigma(q \oplus p\,,\,\xi \oplus \eta)/2) + (\xi'^2 + \eta'^2)/4.$$

Но

$$\widetilde{W}(\xi'\,,\,\eta')\widetilde{W}(\xi\,,\,\eta) = \exp(-i\sigma(\xi' \oplus \eta'\,,\,\xi \oplus \eta)/2)\widetilde{W}(\xi' + \xi\,,\,\eta' + \eta),$$

поэтому

$$P\widetilde{W}(q\,,\,p)P = (2\pi)^{-2d}\int\left(\int \exp(-Q)d\xi d\eta\right)\widetilde{W}(\xi'\,,\,\eta')d\xi' d\eta',$$

где

$$Q = ((\xi - q)^2 + (\eta - p)^2))/4 + i\sigma(q \oplus p\,,\,\xi \oplus \eta)/2) +$$
$$((\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2)/4 + i\sigma(\xi' \oplus \eta'\,,\,\xi \oplus \eta)/2.$$

В квадратичной форме Q собираем слагаемые с одинаковыми степенями. Получаем:

$$\begin{aligned}
\xi^2 &: \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^2 = \frac{1}{2}\xi^2,\\
\xi &: -\frac{1}{2}\xi q - \frac{1}{2}\xi\xi' - i\frac{1}{2}\xi p - i\frac{1}{2}\xi\eta' =\\
&\frac{1}{2}\xi(-q - \xi' - ip - i\eta) = \frac{1}{2}\xi a\,,\; a = (-q - \xi' - ip - i\eta');\\
\eta^2 &: \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{4}\eta^2 = \frac{1}{2}\eta^2,\\
\eta &: -\frac{1}{2}\eta p - \frac{1}{2}\eta\eta' + i\eta\xi' + i\eta q = \frac{1}{2}\eta b\,,\; b = -p - \eta' + i\xi + iq\,,
\end{aligned}$$
$$Q(\xi = 0\,,\,\eta = 0) = \frac{1}{4}(q^2 + p^2 + \xi'^2 + \eta'^2).$$

Замечаем, что в полученых равенствах

$$a^2 = -b^2.$$

Вычисляем интеграл по $d\xi d\eta$. Получаем:

$$\int \exp(-Q)d\xi d\eta = (2\pi)^d \exp(-Q(0\,,\,0)) =$$
$$(2\pi)^d \exp(-\frac{1}{4}(q^2 + p^2 + \xi'^2 + \eta'^2)).$$

Третье утверждение доказано. Положив в нем $q = 0\,,\, p = 0$, получаем последнее утверждение.

Лемма доказана.

Положим

$$e_0(x) = (\pi)^{-d/4} \exp(-x^2/2)\ ,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{A.34}$$

Пусть операторы $W(q\,,\,p)$ определены формулой (A.11).

Справедлива

Лемма A.2.2. *1. Для любого набора точек векторы*

$$W(q_j\,,\,p_j)e_0\ ,\ q_j \oplus p_j \in \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d\ ,\ 1 \leq j \leq N$$

линейно независимы в $L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$.

2. Справедливы равенства

$$< e_0\,,\, W(q\,,\,p)e_0 >= \exp(-(q^2 + p^2)/4); \tag{A.35}$$

$$< W(q_k\,,\,p_k)e_0\,,\, W(q_j\,,\,p_j)e_0 >=$$
$$\exp(-((q_j - q_k)^2 + (p_j - p_k)^2)/4 - i\sigma(q_j \oplus p_j\,,\, q_k \oplus p_k)/2). \tag{A.36}$$

3. Если

$$\sum_{1\leq j\leq N} |\alpha_j|^2 > 0\,,\ q_j \oplus p_j \neq q_k \oplus p_k\ j \neq k \tag{A.37}$$

то

$$\sum_{1\leq j\,,\,k\leq N} \alpha_k^* \alpha_j \exp(-((q_j - q_k)^2 + (p_j - p_k)^2)/4 - i\sigma(q_j \oplus p_j\,,\, q_k \oplus p_k)/2) > 0. \tag{A.38}$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Второе утворждение следует из формулы (A.13) и формулы

$$< W(q_k\,,\,p_k)e_0\,,\, W(q_j\,,\,p_j)e_0 >=< e_0\,,\, W(q_k\,,\,p_k)^* W(q_j\,,\,p_j)e_0 >=$$
$$< e_0\,,\, W(-q_k\,,\,-p_k)W(q_j\,,\,p_j)e_0 >=$$
$$\exp(-i\sigma(q_j \oplus p_j\,,\, q_k \oplus p_k)/2) < e_0\,,\, W(q_j - q_k\,,\,p_j - p_k)e_0 > .$$

Третье утверждение леммы следует из перого утверждения и равества

$$\|\sum \alpha_j W(q_j\,,\,p_j)e_0\|^2 = \\ \sum_{1\le j\,,\,k\le N} \alpha_k^*\alpha_j \exp(-((q_j-q_k)^2+(p_j-p_k)^2)/4 - i\sigma(q_j\oplus p_j\,,\,q_k\oplus p_k)/2).$$

Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы.

Пусть $a_0\in H$ -такой вектор, что

$$a_0 = Pa_0\ ,\ \|a_0\| = 1.$$

Такой вектор обязательно существует, так как P -не равный нулю проектор. Пусть $\widetilde{L}$ -множество всех конечных линейных комбинаций векторов $\widetilde{W}(q_j\,,\,p_j)a_0$. Множество $\widetilde{L}$ -это линейное подпространство в H, которое инвариантно относительно операторов $\widetilde{W}(q\,,\,p)$ и состоит из векторов вида

$$a = \sum_j \alpha_j \widetilde{W}(q_j\,,\,p_j)a_0. \tag{A.39}$$

В силу утверждения 3 предыдущей леммы векторы $\widetilde{W}(q_j\,,\,p_j)a_0$ линейно независимы и для каждого вектора $a\in\widetilde{L}$ представление (A.39) единственно.

Определим линейный оператор

$$U:\widetilde{L}\mapsto L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)$$

равенством

$$U\widetilde{W}(q_j\,,\,p_j)a_0 = W(q_j\,,\,p_j)e_0. \tag{A.40}$$

Это определение корректно в силу линейной независимости векторов $\widetilde{W}(q_j\,,\,p_j)a_0$.

Прямой выкладкой проверяется, что отображение U удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}
&\forall(a\in\widetilde{L}):\|Ua\mid L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx)\| = \|a\mid H\|,\\
&U\widetilde{W}(q\,,\,p)a = W(q\,,\,p)Ua\,,\\
&\mathbf{Cl}(U\widetilde{L}) = L^2(\mathbb{R}^d\,,\,dx).
\end{aligned}$$

Пусть

$$H_0 = \mathbf{Cl}(\widetilde{L}).$$

Пространство H_0 -нетривиальное подпространство в H, которое удовлетворяет условию:

$$\forall (q \oplus p)\ :\ \widetilde{W}(q\,,\,p)H_0 = H_0,$$

поэтому

$$H_0 = H.$$

Пусть U -продолжение по непрерывности на пространство H оператора, заданного формулой (A.40) н пространстве $\widetilde{L}$. Это -искомое отображение.

Теорема доказана.

Если не делать предположения 4, но предположить, что пространство H сепарабельно, то тогда предыдущая конструкция приведет к разложению пространства H в прямую сумму:

$$H = \oplus \sum_{0 \le j \le \infty} H_j.$$

В пространстве H_0 оператор $\widetilde{W}(q\,,\,p)$ есть оператор аннулирования, а в постранствах $H_j\,,\ j > 1$ оператор $\widetilde{W}(q\,,\,p)$ унитарно эквивалентен оператору $W(q\,,\,p)$.

A.3 Указатель обозначений.

Обозначения, связанные с теорией множеств.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями теории множеств в объеме первых глав книг [1], [2].

Символ $A\bigcap B$ обозначает пересечение множеств A и B.

Символ $A\bigcup B$ обозначает объединение множеств A и B.

Если $A \subset X$, то дополнение множества A в X мы обозначаем символм

$$\mathbf{C}(A) := X \setminus A.$$

Формулы де Моргана в этих обозначениях имеют вид

$$\mathbf{C}(\bigcup A_\alpha) = \bigcap \mathbf{C}(A_\alpha)\ ,\ \mathbf{C}(\bigcap A_\alpha) = \bigcup \mathbf{C}(A_\alpha). \tag{A.41}$$

Символ $\{x\}$ означает множество, общий элемент которого обозначен символом x.

Символ

$$\{x \mid b1(x)\, ,\, b2(x)\ \ldots\},$$

где $b1(x)\, ,\, b2(x)\ldots$ -булевские выражения, означает множество всех x, для которых булевские выражения $b1(x)\, ,\, b2(x)\ldots$ принимают значение "истина".

Символ

$$\{f(x) \mid b1(x)\, ,\, b2(x), \ldots\}$$

обозначает множество всех тех значений функции $f(x)$, которые она принимает при тех x, для которых все булевские выражения $b1(x)\, ,\, b2(x), \ldots$ принимают значения “истина”.

Символ

$$a = \sup\{f(x) \mid b1(x)\, ,\, b2(x)\, ,\, \ldots\}$$

означает, что точная верхняя грань вычисляется по тем значениям переменной x, для которых булевские выражения $b1(x)\, ,\, b2(x)\, ,\, \ldots$ принимают значения “истина”. Аналогичное правило применяется при указании области изменения переменных при вычислении точной нижней грани и т.д.

Характеристическую функцию множества A мы обозначаем символом

$$\mathbb{I}(A \mid x) = \begin{cases} 1\ ,\ x \in A; \\ 0\ ,\ x \notin A. \end{cases}$$

Мы исползуем это же обозначение для того случая, когда множество A задано булевским выражением $b1(x)$:

$$\mathbb{I}(b1(x) \mid x) = \begin{cases} 1\ ,\ b1(x) = truth; \\ 0\ ,\ b1(x) = false. \end{cases}$$

Если A и B -булевские выражения, то выражение

$$A \Rightarrow B$$

используется для обозначения утверждения: из A следует B, а выражение

$$A \iff B$$

используется для обозначения утверждения: A истино в том и только том случае, если истино B.

Символы $:=$, $\stackrel{\text{def}}{=}$ обозначают равенство по определению.

При написании формул мы старались придерживаться следующей схемы: выписанные через запятую кванторы и булевские выражения, которые определяют область изменения переменных в высказывании, знак : , высказывание.

Строка

$$\forall (a\,,\, b\,,\, \ldots)\ ,\ \exists (c\,,\, d\,,\, \ldots)\ :$$

читается так: для всех a , b , $\ldots$ существуют такие c , d , $\ldots$, что ....

Строка

$$\forall (b1(x)\,,\, b2(y)\,,\, \ldots)\ ,\ \exists (c\,,\, d\,,\, \ldots)\ :$$

читается так: для всех тех значений переменных x , y , $\ldots$, при которых булевские выражения $b1$, $b2$, $\ldots$ принимают значение “истина”, существуют такие c , d , $\ldots$, что ...

Символы $\vee$ и $\wedge$ использованы для обозначения логического “или” и логического “и”:$A \vee B$ истино в том и только том случае, если хотя бы одно из значений A или B истино, $A \wedge B$ истино в том и только том случае, если истины оба значения: A и B.

Символ $f(x)$ в зависимости от контекста означает имя функции или значение функции в точке.

Обозначения, связанные с теорией меры и интеграла.

$L_0(X)$ -пространство элементарных функций, см. стр. 3.

$L_+(X)$ -пополнение пространства элементарных функций, см. стр. 19.

$L(X)$ -пространство интегрируемых функций, см. стр. 24.

$L^p(X)$ -пространство функций, интегрируемых со степенью p, см. стр. 41.

$I_0(f)$ -элементарный интеграл, см. стр. 4.

$I_+(f)$ -расширение элементарного интеграла, см. стр. 21.

$I(f)$ -интеграл Даниэля, см. стр. 26.

$mes(Z) = 0$ -утверждение о том, что мера множества Z равна нулю, см. стр. 11, стр. 60.

п.в.-сокращение для утверждения "почти всюду см. стр. 13, стр. 14, стр. 60.

$\mu(A)$ -мера множества A, см. стр. 47.

$\int f(x)\,\mu(dx)$ -интеграл по мере μ, см. стр. 52.

Обозначения, связанные с теорией метрических и топологических пространств.

$d(x\,,\,y)$ -расстояние между точками x и y метрического пространства, см. стр. 99.

dist -расстояние между множествами A и B, см. стр. 100.

$b(x\,,\,\epsilon) := \{y \mid d(x\,,\,y) < \epsilon\}$, -открытый шар в метрическом пространстве, см. стр. 100.

$\mathbf{Cl}(A)$ -замыкание множества A, см. стр. 113.

$\mathcal{B}(X)$ -алгебра борелевских множеств пространства X.

Обозначения, связанные с теорией банаховых пространств.

$\mathrm{span}\{e_1\,,\,e_2\,\ldots,\,e_n\} = \{f \mid f = \sum_{1\le j\le n} \alpha_j e_j\;,\;\alpha_j \in \mathbb{C}^1\}$ -линейная оболочка векторов e_j.

$\||\quad\|\;,\;\|\quad\mid B\|$-норма в банаховом пространстве, см. стр. 149.

$\mathcal{L}(B_1 \mapsto B_2)$ -банахово пространство всех линейных непрерывных отображений банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2, см. стр. 157.

$\mathcal{K}(B_1 \mapsto B_2)$ -пространство всех компактных отображений банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2, см. стр. 227.

$\mathbf{Gr}(T)$ -график оператора T, см. стр. 169.

$\mathbf{Dom}(T)$ -область определения оператора T.

$\mathbf{Im}(T) = \{y \mid y = Tx\,,\,x \in \mathbf{Dom}(T)\}$ -область значений отображения T.

$\mathbf{Ker}(T) = \{x \mid x \in \mathbf{Dom}(T)\,,\,Tx = 0\}$ -ядро отображения T.

$B^\star$ -банахово пространство, сопряженное банахову пространству B, см.стр. 173.

$\mathcal{N}(A)$ -аннулятор множества A, см.стр. 181.

id -единичное (тождественное отображение), единица алгебры, см.стр. 182.

$R(\lambda\,,\,a) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda\cdot\mathsf{id} - a)^{-1}$ -резольвента элемента (оператора) a, см.стр. 188.

$\mathcal{O}p_a$ -определяемый интегралом Данфорда гомоморфизм алгебры аналитических функций в алгебру операторов, см.стр. 193.

Обозначения, связанные с теорией гильбертовых пространств.

$<\ \ ,\ \ >$ -скалярное произведение в гильбертовом пространстве, см. стр. 267.

$A^{\perp} = \bigcap\limits_{x\in A}\{y\,|<y\,,\,x>=0\}$ -ортогональное дополнение множества A, см. стр. 278.

A^{*} оператор, гильбертово сопряженный оператору A, см. стр. 284 , 332.

$\|\quad|\,HS\|$ -норма Гильберта-Шмидта , см. стр. 300.

$HS(A\,,\,B)$ -скалярное произведение в пространстве опрераторов Гильберта-Шмидта, см. стр. 302.

$s_j(A)$ -характеристические числа оператора A, см. стр. 296.

Ncl -банахово пространство ядерных операторов, см. стр. 306.

$\|A\,|\,Ncl\|$ -ядерная норма оператора A, см. стр. 305.

$E(\lambda\,,\,A)$ -спектральная функция оператора A, см. стр. 318.

$\mathcal{O}pb_A$ -гомоморфизм измеримых по Борелю функций на спектре самосопряженного оператора A в алгебру операторов $\mathcal{L}(H\mapsto H)$, см. стр. 318.

$\mathcal{O}p_U$ -определяемый унитарным оператором U гомоморфизм алгебры измеримых по Борелю функций $\mathcal{B}or([0\,,\,2\pi])$ в алгебру операторов $\mathcal{L}(H\mapsto H)$, см. стр. 330.

$W_{\pm}(B\,,\,A)$ -волновые операторы, см. стр. 377.

$S(B\,,\,A)$ -оператор рассеяния, см. стр. 381.

$\mathcal{M}(A)$ используемое в теории рассеяния подпространство абсолютно непрерывного подпространства оператора A, см. стр. 375.

$E_{un}(\theta\,,\,U)$ -спектральная функция унитарного оператора U.

$S(\mathbb{R}^d)$ -пространство Шварца, см. стр. 401.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ -пространство бесконечно дифференцируемых в области D функций, см. стр. 405.

$H^s(\mathbb{R}^d)$ -пространство Соболева, см. стр. 446.

$\mathring{H}^p(D)$ -пространство Соболева функций, заданных в области D, см. стр. 456.

Литература

[1] П. С. Александров. Введене в теорию множеств и общую топологию. 367 стр. Москва, Издательство Наука, 1977г.

[2] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элемнты теории функций и функционального анализа. 496 стр. Москва, Издательство Наука, 1972г.

[3] К. Куратовский, А. Мостовский. Теория множеств. 416 стр. Издательство Мир, Москва, 1970.

[4] В. И. Богачев. Основы теории меры. Том 1. 554 стр. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2003г.

[5] В. И. Богачев. Основы теории меры. Том 2. 576 стр. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2003г.

[6] П. Халмош. Теория меры. 256 стр. Москва, Факториал Пресс, 2003г.

[7] Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. Интеграл, мера и производная. 211 стр. Издательство Наука, Москва, 1964г.

[8] М. И. Дьяченко, П. Л. Ульянов. Интеграл и мера. 159 стр. Москва. Издательство Факториал, 1998г.

[9] Ж. Неве. Математические основы теории вероятностей. 309 стр. Издательство Мир, Москва, 1969г.

[10] К. Партасарати. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. 343 стр. Издательство Мир, Москва, 1983г.

[11] Г. Федерер. Геометрическая теория меры. 760 стр. Москва, "Наука Главная редакция физико-математической литературы. 1987 г.

[12] Н. Бурбаки. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. 408 стр. Москва. Издательство Наука, Главная редакция физико-математической литературы. 1975 г.

[13] Н. Бурбаки. Общая топология. Основные сруктуры. 272 стр. Москва. Издательство Наука, Главная редакция физико-математической литературы. 1968 г.

[14] Р. Энгелькинг. Общая топология. 744 стр. Москва. Издательство Мир. 1986 г.

[15] Дж. Л. Келли. Общая топология. 431 стр. Москва. Издательство Наука. 1981 г.

[16] Т. Като. Теория возмущений линейных операторов. 740 стр. Москва. Издательство Мир, 1972 г.

[17] Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. 587 стр. Москва. Издательство Мир. 1979 г.

[18] У. Рудин. Функциональный анализ. 443 стр. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар. Издательство Лань. 2005 г.

[19] А. Я. Хелемский. Лекции по функционаьному анализу. 552 стр. Издательство Московского центра непрерывного математического образования. Москва. 2004 г.

[20] В. И. Богачев, О.Г.Смолянов. Действительный и функциональный анализ. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2009г.

[21] К. Иосида. Функциональный анализ. 624 стр. Москва. Издательство Мир. 1967 г.

[22] Д.Р.Яфаев. Математическая теория рассеяния. Санкт-Птербург. Идательство С.-Петербургского университета. 1994 г.

[23] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т1. Функциональный анализ. 357 стр. Москва, Издательство Мир. 1977 г.

[24] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т2. Гармонический анализ. Самосопряженность. 395 стр. Москва, Издательство Мир. 1978 г.

[25] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т3. Теори рассеяния. 443 стр. Москва, Издательство Мир. 1982 г.

[26] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т4. Анализ операторов. 428 стр. Москва, Издательство Мир. 1982 г.

[27] Н. Данфорд и Дж. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. 895 стр. Москва. Издательство иностранной литературы. 1962 г.

[28] Н. Данфорд и Дж. Шварц. Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. 1062 стр. Москва. Издательство иностранной литературы. 1966 г.

[29] Н. Данфорд и Дж. Шварц. Линейные операторы. Спектральные операторы. 661 стр. Москва. Издательство иностранной литературы. 1974 г.

[30] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ. 741 стр. Москва. Издательство "Наука", Главная редакция физико-математической литературы. 1977 г.

[31] Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. 543 стр. Москва. Издательство Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1966 г.

[32] С. С. Кутателадзе. Основы функционального анализа. 218 стр. Новосибирск. Издательство Наука. Сибирское отделение. 1983 г.

[33] В. М. Федоров. Курс функционального анализа. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар. Издательство Лань. 2005 г.

[34] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Ленинград. Издательство Ленинградского университета. 1980 г.

[35] П. Халмош. Гильбертово пространство в задачах. 352 стр. Новокузнецк. Издательский отдел Новокузнецкого Физико-математического института. 2000 г.

[36] А. А. Кириллов, Ф. Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. 396 стр. Москва, Издательство "Наука", Главная редакция физико-математической литературы. 1988 г.

[37] У. Брателли, Д. Робинсон. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. 511 стр. Москва, Издательство "Мир", 1982 г.

[38] Иоганн фон Нейманн. Математические основы квантовой механики. 367 стр. Издательство Наука. Москва. 1964 г.

[39] В. С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике.280 стр. Москва. Издательство Наука. 1976 г.

[40] Р.Эдвардс. Функциональный анализ. Теория и приложения. 1071 стр. Издательство Мир . Москва, 1969 г.

[41] П.Н.Князев. Фукциональный анализ. 208 стр. Издательство Едиториал УРСС. 2003 г. Москва.

[42] В.И.Смирнов. Курс высшей матнматики. Том 5. Государственное издатеьство физико-математчеcкой литетатуры. Москва. 1959 г.

[43] . Vojkan Jakšić. Topics in Spectral Theory.

`http://www.ma.utexas.edu/mp_arc 05-38`

[44] К. Морен. Методы гильбертова пространства. 570 стр. Издательство Мир, Москва, 1965 г.

[45] М.А.Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. Москва, Государственное издательство научно-технической литературы, 1954 г.

[46] Andrea Posiliano and Luca Raimondi. Krein's resolvent formula for self-adjoint extensions of symmetric second-order elliptic differential operators. J. Phys. A:Math. THeor. 42 (2009)015204 (11pp).

[47] M. Gadella and F. Gómez. A Unified Mathematical Formalism for the Dirac Formulation of Quantum Mechanics. Foundation of Physics, Vol. 32, No 6, June 2002, p.815-869.

[48] M. Gadella and F. Gómez. Eigenfunction expansions and Tranformation Theory. arxiv:math.FA./0607548.

[49] R. de la Madrid, A. Bohm, M. Gadella. Rigged Hilbert Space Treatment of Continuous Spectrum.

`http://www.ma.utexas.edu/mp_arc 02-126`

[50] Barry Simon. Spectal analysis of rank one perturbatins and applications.

http://www.ma.utexas.edu/mp_arc 94-91

[51] V.Jakšić, Kritchevski, and C.-A.Pillet. Mathematical Theory of the Wigner-Weisskopf Atom.

http://www.ma.utexas.edu/mp_arc 05-333

Предметный указатель