

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Х

СБОРНИК ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Под редакцией

В. И. ДМИТРИЕВА, Н. П. ЖИДКОВА

Под общим руководством И. С. Березина

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1968

Из содержания Т.10, 1968г.,

- А.Н. Тихонов, В.И. Дмитриев.*** Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы. **3**
- В.И. Дмитриев, Г. А. Кокотушкин.*** Исследование метода расчета магнито-теллурического поля в слое переменной мощности. **16**
- В.И. Дмитриев, Г. А. Кокотушкин.*** Метод интегральных уравнений в задаче о магнито-теллурическом поле в слое переменной мощности. **25**
- Е.В. Захаров.*** Алгоритм расчета аномалий электромагнитных полей от идеально проводящей полуплоскости, погруженной в проводящее полупространство. **32**
- В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров.*** О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I рода. **49**
- В.И. Дмитриев.*** Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде. **55**
- В.И. Дмитриев, А.В. Чечкин.*** Один метод решения обратных задач теории антенн. **66**

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А. Н. ТИХОНОВ, В. И. ДМИТРИЕВ

МЕТОД РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА В СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ ВИБРАТОРОВ И ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ЭТОЙ СИСТЕМЫ

Сборник содержит результаты исследований ВЦ МГУ по разработке численных методов решения задач электродинамики и структурного анализа. Рассмотрены вопросы распространения электромагнитных волн в слоистой среде и в направляющих системах. Приведены результаты расчетов различных волноводных устройств (фазовращателей, циркуляторов и т. д.). Рассмотрены вопросы дифракции электромагнитных волн на полосе, расположенной в слоистой среде. Приведен анализ расчетов магнито-теллурического поля в неоднородных средах. Предложены алгоритмы решения прямой и обратной задачи теории антенн. Работы по структурному анализу посвящены разработке методов уточнения структур и методов минимизации функций многих переменных. Кроме того, рассмотрены вопросы, связанные с исследованиями энергетического баланса кристаллической решетки, поиска модели структуры методами алгебры логики, а также некоторые задачи газовой электрографии.

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Расчет системы линейных вибраторов имеет большое значение как для развития теории антенн, так и для прикладной антенной техники с целью создания антенной системы с требуемой диаграммой направленности. Расчет диаграммы направленности при заданных токах в вибраторах не представляет трудности и сводится к вычислению простых интегралов. Наибольшую трудность представляет расчет токов в системе линейных вибраторов с учетом их взаимного влияния. Для этой задачи до настоящего времени не существует разработанных методов решения. Дело в том, что все сводится к необходимости решения системы интегральных уравнений Фредгольма I рода, т. е. к некорректной задаче. В связи с этим даже расчет одиночного вибратора вызывает большие трудности. Некоторые результаты в этом направлении получены в работе [1]. В работе [2] сделана попытка строгого решения задачи о возбуждении одиночного вибратора, но не учтено, что данная задача некорректна, поэтому предлагаемый алгоритм численного решения задачи может приводить к большой потере точности. Развитие в последнее время методов решения некорректных задач [3—5] позволило создать устойчивый алгоритм решения задачи о возбуждении системы линейных вибраторов.

Рассмотрим систему из N параллельных линейных вибраторов, направленных вдоль оси Oz . Каждый вибратор представляет собой идеально проводящий тонкостенный цилиндр радиуса a , имеющий длину l_n , а нижний конец его оси имеет цилиндрические координаты $\{\rho_n, \varphi_n, H_n\}$. В сечение вибратора при $z = H_n + z_n$ подключена по окружности разность потенциалов U_n . При условии, что вибраторы удалены друг от друга на расстояние, много больше радиуса a_n , причем a_n много меньше длины волны в окружающем пространстве, можно считать, что ток в вибраторе направлен вдоль его оси и зависит только от z .

Электромагнитное поле вибратора в нашем случае выражается через векторный потенциал \vec{A} в виде

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}; \quad \vec{E} = \frac{i}{\omega \epsilon} \{ \text{grad div } \vec{A} + k^2 \vec{A} \}, \quad (1)$$

где ϵ — диэлектрическая постоянная, k — волновое число окружающего пространства. Временная зависимость взята в виде $e^{-i\omega t}$.

Так как векторный потенциал имеет только z -товую компоненту $\vec{A} = \{0, 0, A_z\}$, то

$$E_z = \frac{i}{\omega \epsilon} \left\{ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right\}. \quad (2)$$

На поверхности вибратора тангенциальная составляющая полного электрического поля должна быть равна нулю, т. е.

$$E_z^n = E_z + E_z^{\text{ст}} = 0 \text{ на } S_n, \quad (3)$$

где $E_z^{\text{ст}} = U_n \delta(z - H_n - z_n)$ — стороннее электрическое поле, созданное заданной на вибраторе разностью потенциалов.

Согласно (2), (3) получаем

$$\frac{i}{\omega \epsilon} \left\{ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right\} + U_n \delta(z - H_n - z_n) = 0.$$

Откуда после интегрирования по z будем иметь на поверхности вибратора условие

$$A_z = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} U_n \sin k|z - H_n - z_n| + C_n^{(1)} \sin kz + C_n^{(2)} \cos kz. \quad (4)$$

Постоянные $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ определяются в дальнейшем из дополнительных условий. Этими условиями являются равенства нулю токов на концах вибратора.

Так как векторный потенциал диполя длиной $d\zeta$, имеющего ток $j(\zeta)$, равен

$$A_z = \frac{j(\zeta) d\zeta}{4\pi R} \cdot \frac{e^{ikR}}{R},$$

где R — расстояние от диполя до точки измерения, то для нашей системы получим векторный потенциал в виде

$$A_z = \frac{a}{4\pi} \sum_{n=1}^N \int_{H_n}^{H_n+l_n} j_n(\zeta) d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikR_n}}{R_n} d\psi, \quad (5)$$

где $j_n(\zeta) = \frac{I_n(\zeta)}{2\pi a}$; $I_n(\zeta)$ — ток в сечении $z = \zeta$ n -го вибратора, а

$$R_n = \sqrt{\rho^2 + \rho_n^2 + a^2 - 2\rho\rho_n \cos(\varphi - \varphi_n) - 2a\rho \cos(\varphi - \psi) + 2a\rho_n \cos(\varphi_n - \psi) + (z - \zeta)^2}$$

— расстояние от точки на вибраторе до некоторой фиксированной точки пространства $M = \{\rho, \varphi, z\}$.

Если мы опустим точку M на поверхность некоторого m -го вибратора, то, учитывая, что радиус a много меньше расстояния между вибраторами и длины волн в окружающем пространстве, получим

$$A_z = \frac{1}{4\pi} \int_{H_m}^{H_m+l_m} I_m(\zeta) K(z - \zeta) d\zeta + \frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \int_{H_n}^{H_n+l_n} I_n(\zeta) \frac{e^{ik\sqrt{\rho_{mn}^2 + (z-\zeta)^2}}}{\sqrt{\rho_{mn}^2 + (z-\zeta)^2}} d\zeta, \quad (6)$$

где $\rho_{mn} = \sqrt{\rho_m^2 + \rho_n^2 - 2\rho_m\rho_n \cos(\varphi_n - \varphi_m)}$ — расстояние между осями m -го и n -го вибраторов, а

$$K(z - \zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{ik\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}}}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (7)$$

Подставив (6) в (4), находим систему интегральных уравнений Фредгольма I рода для токов $I_n(\zeta)$:

$$\int_{H_m}^{H_m+l_m} I_m(\zeta) K(z - \zeta) d\zeta + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \int_{H_n}^{H_n+l_n} I_n(\zeta) \frac{e^{ik\sqrt{\rho_{mn}^2 + (z-\zeta)^2}}}{\sqrt{\rho_{mn}^2 + (z-\zeta)^2}} d\zeta = 2\pi i \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} U_m \sin k|z - H_m - z_m| + A_m \sin kz + B_m \cos kz, \quad (8)$$

где

$$H_m < z < H_m + l_m \quad (m = 1, 2, \dots, N),$$

с дополнительными условиями

$$I_m(H_m) = I_m(H_m + l_m) = 0. \quad (9)$$

При расчетах удобнее перейти к безразмерным параметрам

$$\gamma_n = kl_n, \quad \eta_n = \frac{\rho_n}{l_n}, \quad \nu_n = \frac{H_n}{l_n}, \quad x_n = \frac{z_n}{l_n}, \quad d_n = \frac{2a}{l_n}, \quad \beta_n = \frac{U_n}{U_1},$$

а также ввести безразмерный ток

$$\vartheta_n(\xi) = -\frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{I_n(\xi l_n + H_n)}{U_1}. \quad (10)$$

Тогда система (8) запишется в виде

$$\int_0^1 \vartheta_m(\xi) K_m(|x - \xi|) d\xi + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^m \int_0^1 \vartheta_n(\xi) \frac{e^{i\gamma_n R_n^m(\xi, x)}}{R_n^m(\xi, x)} d\xi = \\ = \beta_m \sin \gamma_m |x - x_n| + C_m \sin \gamma_m x + D_m \cos \gamma_m x, \quad (11)$$

где

$$R_n^m = \sqrt{\eta_m^2 + \frac{\gamma_n^2}{\gamma_m^2} \eta_n^2 - 2\eta_n \eta_m \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \cos(\varphi_n - \varphi_m) + \\ + \left(x - \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \xi + v_m - \frac{\gamma_n}{\gamma_m} v_n\right)^2}, \quad (12)$$

$$K_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\gamma_m \sqrt{(x-\xi)^2 + d_m^2 \sin^2 \varphi}}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + d_m^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (13)$$

Полученная система (10) уравнений Фредгольма I рода должна решаться методом регуляризации, как некорректная задача. В нашем случае особенность ядра K_m позволяет применить наиболее простой метод регуляризации, который мы назовем естественной регуляризацией или методом саморегуляризации, так как он основан на характерных особенностях самой системы и априорных предположениях о решении.

Введем априорное предположение о решении нашей системы, считая, что производные ϑ_m ограничены:

$$|\vartheta'_m| \leq M. \quad (14)$$

Таким образом, мы выделяем компактный класс решений, где задача корректна. Следовательно, алгоритм решения системы (11) должен учитывать условие (14), тогда решение будет устойчивым. Для этого выделим особенность в ядре интегрального уравнения, т. е. представим $K_m(|t|)$ в виде

$$K_m(|t|) = G_m(|t|) + N_m(|t|), \quad (15)$$

где

$$G_m(|t|) = \begin{cases} K_m(|t|) + \frac{h^2 - t^2}{2h} K'_m(h) - K_m(h); & |t| \leq h, \\ 0; & |t| \geq h, \end{cases} \quad (16)$$

$$N_m(|t|) = \begin{cases} K_m(h) - \frac{h^2 - t^2}{2h} K'_m(h); & |t| \leq h, \\ K_m(|t|); & |t| \geq h. \end{cases} \quad (17)$$

Если параметр выделения особенности h взять таким, что выполняется условие $Mh \ll 1$, то будем иметь

$$\int_0^1 \vartheta_m(\xi) K_m(|x - \xi|) d\xi \approx \alpha_m(x) \vartheta_m(x) + \int_0^1 \vartheta_m(\xi) N_m(|x - \xi|) d\xi, \quad (18)$$

где

$$\alpha_m(x) = \int_0^1 G_m(|x - \xi|) d\xi. \quad (19)$$

Подставив (18) в (11), перейдем от системы интегральных уравнений Фредгольма I рода к системе интегральных уравнений Фредгольма II рода с ядром, имеющим непрерывную производную, т. е. к корректной задаче:

$$\alpha_m(x) \vartheta_m(x) + \int_0^1 \vartheta_m(\xi) \cdot N_m(|x - \xi|) d\xi + \\ + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \int_0^1 \vartheta_n(\xi) \frac{e^{i\gamma_n R_n^m(\xi, x)}}{R_n^m(\xi, x)} d\xi = \beta_m \sin \gamma_m |x - x_m| + C_m \sin \gamma_m x + \\ + D_m \cos \gamma_m x. \quad (20)$$

Параметром регуляризации нашей задачи является параметр выделения особенности h . При $h \rightarrow 0$ имеем $\alpha_m \rightarrow 0$, т. е. при очень малых h решение системы (20) будет неустойчивым, но уже при $h \sim a$, т. е. порядка радиуса цилиндрического вибратора, параметр α_m имеет величину порядка единицы, и мы будем получать устойчивое решение системы (20). Иначе говоря, ток на вибраторе не должен практически изменяться на расстоянии порядка радиуса вибратора.

Полученная система (20) решается обычным методом сведения к системе алгебраических уравнений. Определив из (20) ток в системе вибраторов, легко можно рассчитать диаграмму направленности.

Из (5) мы имеем диаграмму направленности по потенциалу:

$$P(\theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \{r e^{-ikr} A_z(r, \theta, \varphi)\} = \\ = i \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} U_1 \sum_{n=1}^N V_n(\theta) e^{-i\gamma_n [\eta_n \cos(\varphi - \varphi_n) + v_n \cos \theta]}, \quad (21)$$

где

$$V_n(\theta) = \int_0^1 \vartheta_n(\xi) e^{-i\gamma_n \xi \cos \theta} d\xi. \quad (22)$$

Обычно рассчитывается нормированная диаграмма направленности по полю, равная

$$P_0(\theta, \varphi) = \sin \theta \sum_{n=1}^N V_n(\theta) e^{-i v_n \Gamma_n \cos(\varphi - \varphi_n) \sin \theta + v_n \cos \theta}. \quad (23)$$

Разработанный алгоритм позволяет проводить расчеты диаграммы направленности многовibratorной антенной системы, состоящей из тонких линейных цилиндрических вибраторов, с учетом их взаимного влияния при заданных ЭДС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Говорун Н. Н. О единственности решения интегральных уравнений теории антенн. ДАН СССР, 1960, т. 132, № 1.
2. Капица П. Л., Фок В. К., Вайнштейн Л. А. Симметричные электрические колебания идеально проводящего полого цилиндра конечной длины. ЖТФ, 1959, т. XXIX, № 10.
3. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач. ДАН СССР, 1943, т. 39, № 5.
4. Тихонов А. Н. Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации. ДАН СССР, 1963, т. 151, № 3.
5. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. ДАН СССР, 1963, т. 153, № 1.

А. Б. БАКУШИНСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО «СЛАБОЙ» ОСОБЕННОСТЬЮ

1°. В этом параграфе нас будет интересовать приближенное решение интегрального уравнения¹

$$x(\tau) - \int_0^1 \omega(\tau, s) \ln |\tau - s| x(s) ds = f(\tau) \quad (x - Ax = f). \quad (1)$$

Причем будем считать, что функции $\omega(\tau, s)$ и $f(\tau)$ обладают достаточной степенью гладкости. Давно предложены методы приближенного решения уравнения (1) (без исследования сходимости), основанные на замене интеграла в (1) по какой-либо квадратурной формуле с «обходом» особенности в ядре при $\tau = s$. Ниже мы исследуем два таких способа.

По первому способу (блочный метод) уравнение (1) заменяют функциональным уравнением типа

$$\tilde{x}(\tau) - \sum_{i=1}^n \int_{s_{i-1}}^{s_i} \omega(\tau, s) \ln |\tau - s| ds \tilde{x}(s_{i-\frac{1}{2}}) = f(\tau), \quad (2)$$

$$\tilde{x} - A_n^{(1)} \tilde{x} = f,$$

$$s_i = \frac{i}{n}, \quad s_{i-\frac{1}{2}} = \frac{i}{n} - \frac{1}{2n}.$$

Для решения уравнения (2) необходимо и достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений, которая получается, если в (2) положить $\tau = s_{j-\frac{1}{2}} = (j, n)$. По второму способу интеграл в (1) заменяют обычной квадратурной формулой (напри-

¹ Всю излагаемую ниже схему можно перенести и на многомерные уравнения с аналогичной особенностью.

В. И. ДМИТРИЕВ, Г. А. КОКОТУШКИН
**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА РАСЧЕТА
 МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СЛОЕ
 ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ**

Одним из важнейших вопросов теории методов электроразведки, использующих магнито-теллурическое поле, является изучение особенностей распространения этого поля в горизонтальных неоднородных средах.

В настоящей работе реализуется расчет магнито-теллурического поля в горизонтальном слое с произвольным изгибом нижней поверхности по методу нерегулярных волноводов, использованный в работе [1].

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть дан неоднородный слой (рис. 1). Верхняя граница слоя представляет собой плоскость $z=0$. При $z < 0$ имеем изолятор (воздух). Нижняя граница представляет собой поверхность вида $z=\varphi(y)$, где

$$\varphi(y) = \begin{cases} h_2, & y < 0, \\ \varphi^*(y), & 0 \leq y \leq d, \\ h_1, & y > d. \end{cases}$$

Причем $\varphi(y)$ непрерывна при $-\infty < y < +\infty$ и $\varphi^*(y)$, имеет 2 непрерывные производные в интервале $(0, d)$. При $z > \varphi(y)$ также имеем изолятор (фундамент). Проводимость $\sigma = \sigma(y)$ может изменяться внутри слоя по закону, аналогичному изменению функции $\varphi(y)$. Причем допускается разрыв функции $\sigma(y)$ в точках $y=0$ и $y=d$.

Рассматривается случай магнитной поляризации:

$$\vec{H} = \{H_x, 0, 0\}; \quad \vec{E} = \{0, E_y, E_z\}.$$

Поля рассматриваются в квазистационарной зоне, т. е. токами смещения пренебрегаем. Тогда можно считать, что на верхней границе ($z=0$) $H_x = \text{const}$, а на нижней ($z=\varphi(y)$) $H_x = 0$. (Не

уменьшая общности задачи, H_x на верхней границе можно положить равной 1.)

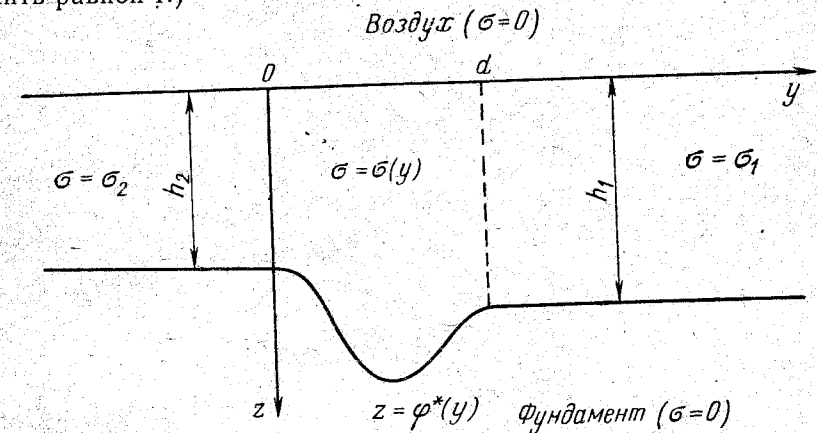


Рис. 1

Используя уравнения Максвелла, получим

$$E_y = \frac{c}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}; \quad E_z = -\frac{c}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y}; \quad 0 \leq z \leq \varphi(y) \quad (1)$$

и

$$\text{div} \left[\frac{1}{\sigma(y)} \cdot \text{grad} H_x(y, z) \right] + i \frac{4\pi\omega}{c^2} H_x(y, z) = 0 \quad (2)$$

при $0 \leq z \leq \varphi(y)$, $-\infty < y < \infty$

с граничными условиями

$$H_x = 1 \text{ при } z = 0; \quad H_x = 0 \text{ при } z = \varphi(y) \quad (3)$$

и условием на бесконечности

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \pm \infty. \quad (4)$$

Существование решения полученной задачи следует из общей теоремы существования. Единственность решения подробно доказана в работе [1].

§ 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ПОЛУЧЕННОЙ ЗАДАЧИ

Ввиду того что задача решалась на ЭЦВМ для частного случая $\sigma = \text{const}$, все формулы выписаны именно для этого случая.

Вначале перейдем от однородного уравнения (2) с неоднородными граничными условиями (3) к неоднородному уравнению с однородными граничными условиями.

Для этого введем функцию

$$u(y, z) = H_x(y, z) - \frac{\sin \sqrt{i} \kappa [\varphi(y) - z]}{\sin \sqrt{i} \kappa \varphi(y)}, \quad (5)$$

где

$$\kappa = \frac{\sqrt{4\pi\sigma\omega}}{c}.$$

Данная функция будет удовлетворять уравнению

$$\Delta u + i\kappa^2 u = f(y, z), \quad (6)$$

где

$$f(y, z) = \sin \sqrt{i} \kappa z \frac{2i\kappa^2 [\varphi'(y)]^2 \cos \sqrt{i} \kappa \varphi - \sqrt{i} \kappa \varphi'' \sin \sqrt{i} \kappa \varphi}{\sin^3 \sqrt{i} \kappa \varphi},$$

однородным граничным условиями $u = 0$ при $z = 0$ и $z = \varphi(y)$ и условию на бесконечности $\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm \infty$.

Тогда при $y \geq d$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{-\gamma_n y} \sin \frac{n\pi}{h_1} z, \quad (7)$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_1}\right)^2 - i\kappa^2}, \quad \text{Re } \gamma_n > 0,$$

при $y \leq 0$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{\Gamma_n y} \sin \frac{n\pi}{h_2} z, \quad (8)$$

где

$$\Gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{h_2}\right)^2 - i\kappa^2}, \quad \text{Re } \Gamma_n > 0.$$

Рассматривая (7) — (8), получим:

при $y \geq d$

$$\int_0^{h_1} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_m u \right\} \sin \frac{m\pi z}{h_1} dz = 0 \quad (9)$$

и при $y \leq 0$

$$\int_0^{h_2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} - \Gamma_m u \right\} \sin \frac{m\pi z}{h_2} dz = 0. \quad (10)$$

Таким образом, эти условия имеют место при $y = 0$ и $y = d$, если u и $\frac{\partial u}{\partial y}$ берутся как пределы со стороны однородного слоя, т. е. при $y = -0$ и $y = d + 0$. Для того чтобы взять в граничных условиях u и $\frac{\partial u}{\partial y}$ при $y = +0$ и $y = d - 0$, необходимо учесть, что из условия непрерывности магнитного поля H_x и функции $\varphi(y)$ имеем

$$u(y = -0) = u(y = +0) \text{ и } u(y = d + 0) = u(y = d - 0), \quad (11)$$

а из условий непрерывности электрического поля E_z имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=d+0} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{i} \kappa \varphi'(y) \frac{\sin \sqrt{i} \kappa z}{\sin^2 \sqrt{i} \kappa \varphi(y)} \right\} \Big|_{y=d-0}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=-0} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{i} \kappa \varphi'(y) \frac{\sin \sqrt{i} \kappa z}{\sin^2 \sqrt{i} \kappa \varphi(y)} \right\} \Big|_{y=+0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя теперь (9) — (12), получим интегральные граничные условия при $y = d$

$$\int_0^{h_1} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_m u \right\} \sin \frac{m\pi}{h_1} z dz = (-1)^m \frac{\sqrt{i} \kappa m \varphi'(d)}{h_1 \gamma_m^2 \sin \sqrt{i} \kappa h_1}, \quad (13)$$

при $y = 0$

$$\int_0^{h_2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} - \Gamma_m u \right\} \sin \frac{m\pi}{h_2} z dz = (-1)^m \frac{\sqrt{i} \kappa m \varphi'(0)}{h_2 \Gamma_m^2 \sin \sqrt{i} \kappa h_2}. \quad (14)$$

Таким образом, мы получили уравнение (6) с граничными условиями (13) — (14).

Данная задача решается следующим образом.

Сделаем замену переменных:

$$y = \xi; \quad z = \zeta \varphi(\xi) \text{ и } u(y, z) = v(\xi, \zeta).$$

Тогда для $v(\xi, \zeta)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_{y,z} v + i\kappa^2 v &= v_{\xi\xi} - 2l \cdot \zeta v_{\xi\zeta} + \left[\frac{1}{\varphi^2} + l^2 \cdot \zeta^2 \right] v_{\zeta\zeta} + \\ &+ \left[2l^2 - \frac{\varphi''}{\varphi} \right] v_{\xi} + i\kappa^2 v = \\ &= \frac{2i\kappa^2 [\varphi']^2 \cos \sqrt{i} \kappa \varphi - \sqrt{i} \kappa \varphi'' \cdot \sin \sqrt{i} \kappa \varphi}{\sin^3 \sqrt{i} \kappa \varphi} \sin(\sqrt{i} \kappa \varphi \zeta) \end{aligned} \quad (15)$$

с граничными условиями:

$$v = 0 \text{ при } \zeta = 0 \text{ и } \zeta = 1, \quad 0 \leq \xi \leq d,$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial v}{\partial \xi} - \zeta l \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \gamma_m v \right\} \sin m\pi \zeta d\zeta = (-1)^m \frac{\sqrt{i} \kappa m \pi \varphi'(d)}{h_1 \gamma_m^2 \sin \sqrt{i} \kappa h_1} \quad (16)$$

при $\xi = d$, $0 \leq \zeta \leq 1$,

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial v}{\partial \xi} - \zeta l \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \Gamma_m v \right\} \sin m\pi \zeta d\zeta = (-1)^m \frac{\sqrt{i} \kappa m \pi \varphi'(0)}{h_2 \Gamma_m^2 \sin \sqrt{i} \kappa h_2} \quad (17)$$

при $\xi = 0$, $0 \leq \zeta \leq 1$,
где

$$l(\xi) = \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}$$

При любом фиксированном ξ функция $v(\xi, \zeta)$ может быть разложена по теореме Дирихле—Жордана в равномерно сходящийся ряд:

$$v(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\xi) \sin n\pi \zeta, \quad (18)$$

где

$$a_n(\xi) = 2 \int_0^1 v(\xi, \zeta) \sin n\pi \zeta d\zeta. \quad (19)$$

Коэффициенты $a_n(\xi)$ являются решением бесконечной системы дифференциальных уравнений, которая получается из условия

$$\int_0^1 [\Delta_{y,x} v + i\kappa^2 v] \sin m\pi \zeta d\zeta = \int_0^1 F(\xi, \zeta) \sin m\pi \zeta d\zeta. \quad (20)$$

Подставив (15) в (20), получим:

$$\begin{aligned} & a_m''(\xi) + l[a_m'(\xi) + 4m(-1)^m \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} a_n'(\xi) \frac{(-1)^n n}{m^2 - n^2}] + \\ & + a_m(\xi) \left[\frac{1}{2} l' - \gamma_m^2(\xi) - \frac{(m\pi)^2}{3} l^2 \right] + \\ & + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} a_n(\xi) \frac{2mn}{m^2 - n^2} (-1)^{m+n} \left[l' - l^2 - l^2 \frac{4n^2}{m^2 - n^2} \right] = \\ & = \frac{2(-1)^{m+1} m \pi}{\gamma_m^2(\xi)} \frac{2i\kappa^2 l^2 \cos \sqrt{i} \kappa \varphi - \sqrt{i} \kappa \frac{\varphi''}{\varphi^2} \sin \sqrt{i} \kappa \varphi}{\sin^2 \sqrt{i} \kappa \varphi}, \quad (21) \end{aligned}$$

где

$$\gamma_m(\xi) = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{\varphi(\xi)} \right)^2 - i\kappa^2}.$$

Полученная бесконечная система дифференциальных уравнений задана при $0 \leq \xi \leq d$ и удовлетворяет граничным условиям: при $\xi = d$

$$\begin{aligned} & a_m' + \left[\gamma_m + \frac{1}{2} l(d) \right] a_m + l(d) \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} a_n \frac{2mn(-1)^{m+n}}{m^2 - n^2} = \\ & = (-1)^m \frac{2\sqrt{i} \kappa m \pi l(d)}{h_1 \gamma_m^2 \sin \sqrt{i} \kappa h_1}, \quad (22) \end{aligned}$$

при $\xi = 0$

$$\begin{aligned} & a_m' - \left[\Gamma_m - \frac{1}{2} l(0) \right] a_m + l(0) \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} a_n \frac{2mn(-1)^{m+n}}{m^2 - n^2} = \\ & = (-1)^m \frac{2\sqrt{i} \kappa m \pi l(0)}{h_2 \Gamma_m^2 \sin \sqrt{i} \kappa h_2}. \quad (23) \end{aligned}$$

На однородных участках слоя решение получается следующим образом: учитывая непрерывность H_x и (5), (7), (8) и (18), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{-\gamma_n d} \sin \frac{n\pi}{h_1} z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(1) \sin \frac{n\pi}{h_1} z, \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \frac{n\pi}{h_2} z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin \frac{n\pi}{h_2} z. \quad (25)$$

Отсюда для r_n и p_n получим

$$r_n = e^{\gamma_n d} a_n(1) \quad \text{и} \quad p_n = a_n(0) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

и тем самым решение на однородных участках. В качестве окончательного результата необходимо вычисление E_y на поверхности Земли, т. е. при $z=0$

$$\begin{aligned} & E_y|_{z=0} = \frac{c}{4\pi\sigma} \left. \frac{\partial H_x}{\partial z} \right|_{z=0}, \\ & \left. \frac{\partial H_x}{\partial z} \right|_{z=0} = -\sqrt{i} \kappa \operatorname{ctg} \sqrt{i} \kappa \varphi(y) + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (26) \end{aligned}$$

§ 3. ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ПРИ РЕШЕНИИ ДАННОЙ ЗАДАЧИ

При фактическом решении задачи система (21) с граничными условиями (22)—(23) заменяется укороченной системой уравнений, которую мы получаем, положив

$$a_{N+1} \equiv a_{N+2} \equiv \dots \equiv 0.$$

При достаточно большом n диагональные элементы матриц близки к 1. При применении этого метода к данной задаче также приходится решать $2N+1$ задачу Коши с $4N+1$ неизвестной функцией. Задачи Коши (31)–(32) решались методом Рунге–Кутты [3].

Точность, задаваемая стандартной программой метода Рунге–Кутты, и число точек разбиения (n) были подобраны при методических просчетах. Время счета задачи несколько возросло для благоприятных параметров и существенно уменьшилось для плохих. Существенно расширилась область изменения входных параметров

$$(\min_{d=1} (h_1, h_2) \geq \frac{1}{2} \text{ и } \kappa \leq 6).$$

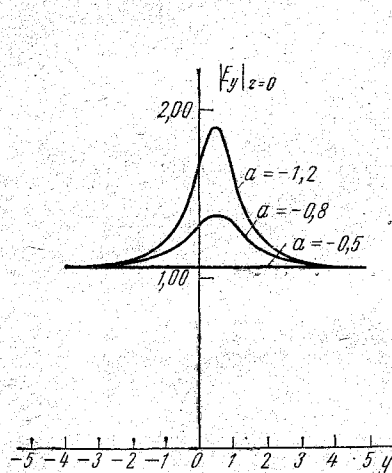


Рис. 2

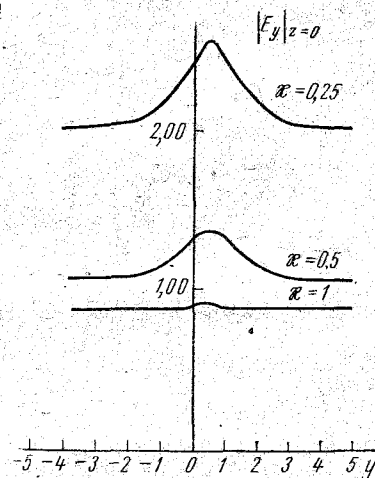


Рис. 3

Кроме того, стало возможным получение решения задачи для произвольных функций $\varphi^*(y)$.

На рисунках 2 и 3 приведены графики $|E_y|_{z=0}$ на слое с $\varphi^*(y) = h + a[4y(1-y)]^3$ для различных значений κ при постоянных h и a , и различных a при постоянных h и κ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Метод расчета магнито-теллурического поля в неоднородном слое с произвольным изгибом нижней поверхности. «Прикладная геофизика», 1965, вып. 41.
2. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
3. Гайсарян С. С. Стандартная программа решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты с видоизменением Гилла, вып. 15. Изд-во МГУ, 1965.

В. И. ДМИТРИЕВ, Г. А. КОКОТУШКИН МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОМ ПОЛЕ В СЛОЕ ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ

Рассматривается задача, поставленная в работе [1]. Дан переменный слой (рис. 1). Верхней границей слоя является плоскость $z=0$. Нижняя граница представляет собой поверхность вида

$$z = \varphi(y) = \begin{cases} h_2, & y < 0, \\ \varphi^*(y), & 0 \leq y \leq d, \\ h_1, & y > d, \end{cases}$$

где $\varphi(y)$ непрерывна при $-\infty < y < +\infty$ и имеет две непрерывные производные при $0 < y < d$.

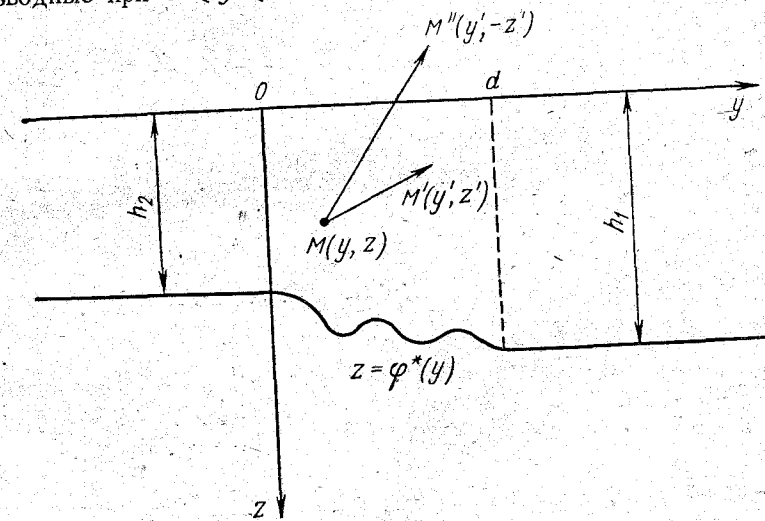


Рис. 1

Сходимость метода при $N \rightarrow \infty$ доказана в работе [1]. Введя функции $b_j(\xi) = a'_j(\xi)$, получим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с краевыми граничными условиями:

$$W' = A(\xi)W + f(\xi), \quad (27)$$

$$\begin{cases} BW(0) = \beta, \\ CW(d) = \gamma, \end{cases} \quad (28)$$

где $A(\xi)$ — квадратная матрица порядка $m=4N$, а B и C — прямоугольные матрицы порядка $m \cdot n$, $n=2N$.

Первоначально полученная система решалась методом дифференциальной прогонки [2]. Обычно количество коэффициентов ряда Фурье функции $v(\xi, \zeta)$ (N) бралось равным 6, так как увеличение их числа приводит к резкому увеличению времени счета, что связано с увеличением порядка решаемых систем (он равен $4N+1$) и увеличением числа этих систем (оно равно $2N$). Так, для $N=6$ время счета ≈ 30 мин, для $N=8 \approx 80$ мин, а для $N=10 \approx 400$ мин. Эти цифры приведены для благоприятных параметров задачи.

Очень большое влияние на точность получаемых результатов и время счета оказывают параметры задачи. Практически хороший результат может быть получен лишь в следующем случае: $\min(h_1, h_2) \geq 1,5$, $\kappa \leq 2$ (для крайних значений время счета в 2,5 раза больше приведенного выше) и $\varphi^*(y) = ay + b$. Это происходит вследствие того, что при малых h и больших κ элементы прогоночных матриц сильно растут. Для расширения диапазона входных параметров (практически большой интерес представляют собой слои с небольшим h и куполообразным поведением функции $\varphi^*(y)$) было решено воспользоваться методом прогонки с ортогонализацией и нормализацией.

Суть этого метода состоит в следующем. Дана система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с краевыми граничными условиями:

$$W' = A(\xi)W + f(\xi), \quad (29)$$

$$\begin{cases} BW(0) = 0, \\ CW(1) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Найдем полную линейно независимую систему векторов W_1, W_2, \dots, W_k , удовлетворяющую граничному условию на левом конце: $BW_i = 0$ ($i=1, \dots, k$). Разбиваем затем участок интегрирования на n частей точками $\xi_0=0, \xi_1, \dots, \xi_n=1$. На отрезке $[\xi_0, \xi_1]$ решаем задачу Коши:

$$W'_0 = AW_0 + f; \quad W_0(0) = 0 \quad (31)$$

и

$$W' = AW; \quad W(0) = W_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (32)$$

Полученные решения в точке $\xi_1 - W_0(\xi_1), W_1(\xi_1), \dots, W_k(\xi_1)$ ортогонализуем и нормализуем по следующим формулам:

$$\omega_{11} = \sqrt{(W_1, W_1)}, \quad \bar{W}_1 = \frac{W_1}{\omega_{11}};$$

$$\omega_{21} = (W_2, \bar{W}_1); \quad \omega_{22} = \sqrt{(W_2, W_2) - \omega_{21}^2}; \quad \bar{W}_2 = \frac{1}{\omega_{22}}(W_2 - \omega_{21}\bar{W}_1),$$

$$\omega_{ki} = (W_k, \bar{W}_i); \quad \omega_{kk} = \sqrt{(W_k, W_k) - \sum_{i=1}^{k-1} \omega_{ki}^2};$$

$$\bar{W}_k = \frac{1}{\omega_{kk}} \left(W_k - \sum_{i=1}^{k-1} \omega_{ki} \bar{W}_i \right),$$

$$\omega_{0i} = (W_0, \bar{W}_i); \quad \bar{W}_0 = W_0 - \sum_{i=1}^k \omega_{0i} \bar{W}_i.$$

В результате такого преобразования получим матрицу Ω :

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} \omega_{11}^{(1)} & \omega_{21}^{(1)} & \dots & \omega_{k1}^{(1)} & \omega_{01}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 0 & \omega_{kk}^{(1)} & \omega_{0k}^{(1)} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Интегрируем теперь системы (31) — (32) на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$, взяв в качестве начальных условий векторы \bar{W}_i ($i=0, 1, 2, \dots, k$). В точке ξ_2 решения снова ортогонализуются и нормализуются. При этом получим матрицу $\Omega^{(2)}$.

Таким образом мы дойдем до точки $\xi_n=1$ и получим $\Omega^{(n)}$. Теперь получим истинное $W(1)$:

$$W(1) = \bar{W}_0(\xi_n) + \sum_{i=1}^k \beta_i^{(n)} \bar{W}_i(\xi_n),$$

где $\beta_i^{(n)}$ находится из условия $CW(1) = 0$.

Решения в точке ξ_s получим таким образом:

$$W(\xi_s) = \bar{W}_0(\xi_s) + \sum_{i=1}^k \beta_i^{(s)} \bar{W}_i(\xi_s),$$

где $\beta_i^{(s)}$ определяется из условия

$$\Omega^{(s+1)} \beta^{(s)} = \beta^{(s+1)},$$

причем $\Omega^{(i)}$ — треугольные матрицы.

При достаточно большом n диагональные элементы матриц близки к 1. При применении этого метода к данной задаче также приходится решать $2N+1$ задачу Коши с $4N+1$ неизвестной функцией. Задачи Коши (31)–(32) решались методом Рунге–Кутты [3].

Точность, задаваемая стандартной программой метода Рунге–Кутты, и число точек разбиения (n) были подобраны при методических просчетах. Время счета задачи несколько возросло для благоприятных параметров и существенно уменьшилось для плохих. Существенно расширилась область изменения входных параметров

$$(\min_{d=1} (h_1, h_2) \geq \frac{1}{2} \text{ и } \kappa \leq 6).$$

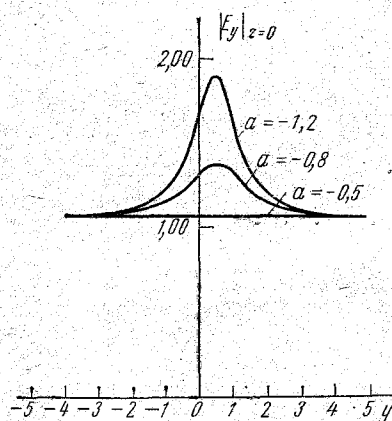


Рис. 2

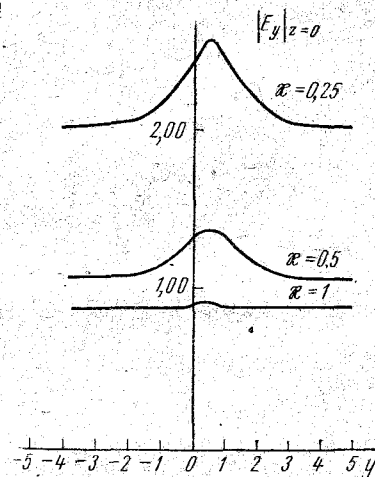


Рис. 3

Кроме того, стало возможным получение решения задачи для произвольных функций $\varphi^*(y)$.

На рисунках 2 и 3 приведены графики $|E_y|_{z=0}$ на слое с $\varphi^*(y) = h + a[4y(1-y)]^3$ для различных значений κ при постоянных h и a , и различных a при постоянных h и κ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Метод расчета магнито-теллурического поля в неоднородном слое с произвольным изгибом нижней поверхности. «Прикладная геофизика», 1965, вып. 41.
2. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
3. Гайсарян С. С. Стандартная программа решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты с видоизменением Гилла, вып. 15. Изд-во МГУ, 1965.

В. И. ДМИТРИЕВ, Г. А. КОКОТУШКИН МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОМ ПОЛЕ В СЛОЕ ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ

Рассматривается задача, поставленная в работе [1]. Дан переменный слой (рис. 1). Верхней границей слоя является плоскость $z=0$. Нижняя граница представляет собой поверхность вида

$$z = \varphi(y) = \begin{cases} h_2, & y < 0, \\ \varphi^*(y), & 0 \leq y \leq d, \\ h_1, & y > d, \end{cases}$$

где $\varphi(y)$ непрерывна при $-\infty < y < +\infty$ и имеет две непрерывные производные при $0 < y < d$.

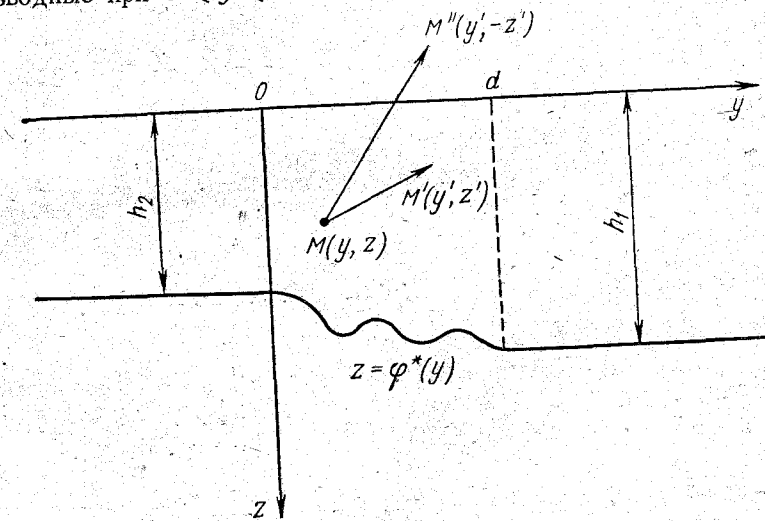


Рис. 1

Внутри слоя имеется уравнение

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{при } 0 \leq z \leq \varphi(y), \quad (1)$$

$$-\infty < y < +\infty,$$

где

$$k = \sqrt{i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}} = \text{const}; \quad \text{Re } k > 0$$

с граничными условиями

$$u = 1 \quad \text{при } z = 0, \quad (2)$$

$$u = 0 \quad \text{при } z = \varphi(y),$$

и условием на бесконечности

$$\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \pm \infty.$$

Данную задачу будем решать методом интегральных уравнений. Введем следующую функцию Грина:

$$G = \frac{i}{4} \{H_0^{(1)}(kr) - H_0^{(1)}(kr_1)\},$$

где

$$r = r_{MM'} = \sqrt{(y' - y)^2 + (z' - z)^2},$$

$$r_1 = r_{MM'} = \sqrt{(y' - y)^2 + (z' + z)^2}.$$

Так как при $r = 0$ функция G имеет особенность $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$, из [2] получаем

$$u(y, z) = \oint_C \left\{ u(y', z') \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial u(y', z')}{\partial n'} \right\} dl' - \iint_S GLu \, dS,$$

где C — контур, ограничивающий слой, S — поверхность, ограниченная контуром C , L — оператор $\Delta + k^2$, n' — внутренняя нормаль в точке $M'(y', z')$.

Учитывая (1) — (2), получим

$$u(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0} dy' - \int_{-\infty\varphi}^{+\infty} \frac{\partial u(y', z')}{\partial n'} G dl'. \quad (3)$$

(Второй интеграл берется по нижней границе слоя.) Устремим теперь точку $M(y, z)$ на нижнюю границу. Дифференцируя уравнение (3) в этой точке по внутренней нормали, получим [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + 2 \int_{-\infty\varphi}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial n'} \frac{\partial G}{\partial n} dl' = 2 \frac{\partial}{\partial n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0} dy'. \quad (4)$$

Выделим теперь, как и в работе [1], главную часть решения (она равна точному решению при $\varphi(y) \equiv \text{const}$)

$$u = v + \frac{\sin k(\varphi(y) - z)}{\sin k\varphi(y)}. \quad (5)$$

Для $\frac{\partial v}{\partial n}$ получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial n} + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial n'} \frac{\partial G}{\partial n} \lambda(y') dy' = f, \quad (6)$$

где

$$\lambda(x) = (1 + [\varphi'(x)]^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$f(y) = 2 \frac{\partial}{\partial n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0} dy' - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\sin k(\varphi(y) - z)}{\sin k\varphi(y)} \right) -$$

$$- 2 \int_{-\infty\varphi}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{\sin k(\varphi(y') - z')}{\sin k\varphi(y')} \right) \frac{\partial G}{\partial n} \lambda(y') dy'. \quad (7)$$

Благодаря замене переменных (5) в левой части (6) пределы интегрирования достаточно брать равными $-3h_2 |d$ и $(d+3h_1) |d$. (Здесь мы воспользовались численными оценками решения, полученного по методу, изложенному в [1].)

Рассмотрим теперь более внимательно правую часть уравнения. Два первых слагаемых (7) вычисляются непосредственно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial z'} \Big|_{z'=0} dy' = \frac{ikz}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_1^{(1)}(k\sqrt{(y'-y)^2 + z^2})}{\sqrt{(y'-y)^2 + z^2}} dy' = e^{ikz}$$

(см. дополнение)

и

$$2 \frac{\partial}{\partial n} (e^{ikz}) \Big|_{z=\varphi(y)} = -2 \frac{ik}{\lambda(y)} e^{ik\varphi(y)}, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\sin k(\varphi(y) - z)}{\sin k\varphi(y)} \right) \Big|_{z=\varphi(y)} = -\frac{k\lambda(y)}{\sin k\varphi(y)}. \quad (9)$$

Рассмотрим интеграл в правой части:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\sin k(\varphi(y') - z')}{\sin k\varphi(y')} \right) \frac{\partial G}{\partial n} \lambda(y') dy' = k \int_{\infty\varphi}^{+\infty} \frac{\lambda^2(y')}{\sin k\varphi(y')} \frac{\partial G}{\partial n} dy', \quad (10)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \begin{cases} \frac{ik}{4\lambda} \left[H_1^{(1)}(kr) \frac{y'-y}{r} - H_1^{(1)}(kr_1) \frac{y'-y}{r_1} \right] \Phi'(y) - \\ - \left[H_1^{(1)}(kr) \frac{z'-z}{r} + H_1^{(1)}(kr_1) \frac{z'+z}{r_1} \right], & r \neq 0, \\ -\frac{ik}{4\lambda} H_1^{(1)}(2k\varphi(y)) - \frac{\Phi''(y)}{4\pi\lambda^3(y)}, & r = 0. \end{cases}$$

Преобразуем интеграл (10) следующим образом:

$$k \int_{-\infty\varphi}^{+\infty} \frac{\lambda^2(y')}{\sin k\varphi(y')} \frac{\partial G}{\partial n} dy' = \frac{k}{\sin kh_2} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z'=h_2} dy' + \\ + k \int_0^d \frac{\lambda^2(y')}{\sin k\varphi(y')} \frac{\partial G}{\partial n} dy' + \frac{k}{\sin kh_1} \int_d^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z'=h_1} dy'.$$

Область изменения y также разобьем на три части: $y < 0$, $0 \leq y \leq d$, $y > d$ и рассмотрим каждую из них. При $y < 0$ $z = \varphi(y) = h_2$,

$$f(y) = -2ike^{ikh_2} - \frac{k}{\sin kh_2} = 2k \int_{-\infty\varphi}^{+\infty} \frac{\lambda^2(y')}{\sin k\varphi(y')} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} dy' = \\ = -2ike^{ikh_2} - \frac{k}{\sin kh_2} - \frac{2k}{\sin kh_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} dy' + \\ + 2k \int_0^d \left[\frac{\lambda^2(y')}{\sin k\varphi(y')} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} - \frac{1}{\sin kh_2} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} \right] dy' - \\ - 2k \int_d^{+\infty} \left[\frac{1}{\sin kh_1} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} - \frac{1}{\sin kh_2} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} \right] dy'.$$

Учитывая, что $-2ike^{ikh_2} - \frac{k}{\sin kh_2} - \frac{2k}{\sin kh_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} dy' = 0$

(как правая часть для уравнения с $\varphi(y) \equiv \text{const}$), для f получим:

$$f(y) = -2k \left\{ \int_0^d \left[\frac{\lambda^2(y')}{\sin k\varphi(y')} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} - \frac{1}{\sin kh_2} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} \right] dy' + \right. \\ \left. + \int_d^{+\infty} \left[\frac{1}{\sin kh_1} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} - \frac{1}{\sin kh_2} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} \right] dy' \right\}. \quad (11)$$

Особенно простой результат получается при $h_1 = h_2$, когда второй интеграл в (11) обращается в нуль.

В общем случае этот интеграл равен

$$\frac{\sin k(2h_2 - h_1)}{4\sin kh_1 \cdot \sin kh_2} - \int_y^d \left[\frac{1}{\sin kh_1} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} - \frac{1}{\sin kh_2} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} \right] dy'$$

и окончательно

$$f(y) = -2k \left\{ \int_0^d \left[\frac{\lambda^2(y')}{\sin k\varphi(y')} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} - \frac{1}{\sin kh_1} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} \right] dy' + \right. \\ \left. + \int_y^0 \left[\frac{1}{\sin kh_2} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} - \frac{1}{\sin kh_1} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_1} \right] + \frac{\sin k(2h_2 - h_1)}{4\sin kh_1 \sin kh_2} \right\} \quad (12)$$

при $y > d$, $z = \varphi(y) = h_1$.

Аналогично предыдущему имеем

$$f(y) = -2k \left\{ \int_0^d \frac{\lambda^2(y')}{\sin k\varphi(y')} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_1} - \frac{1}{\sin kh_2} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_2} \right\} dy' + \\ + \int_d^y \left[\frac{1}{\sin kh_1} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_1} - \frac{1}{\sin kh_2} \cdot \frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=h_1} \right] dy' + \frac{\sin k(2h_1 - h_2)}{4\sin kh_1 \sin kh_2}. \quad (13)$$

При $0 \leq y \leq d$, $z = \varphi^*(y)$

$$f(y) = -2k \left\{ \int_0^d \frac{\lambda^2(y')}{\sin k\varphi(y')} \cdot \frac{\partial G}{\partial n} dy' - \frac{1}{\sin kh_2} \int_0^d \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z'=h_2} dy' - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sin kh_1} \int_y^d \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{z'=h_1} dy' \right\} + \frac{ik\varphi'(y)}{2\lambda} H_0^{(1)}(k|h_2 - \varphi(y)|) - \\ - \frac{ik\varphi'(y)}{2\lambda} H_0^{(1)}(k|h_2 + \varphi(y)|) - \frac{ik\varphi'(y)}{2\lambda} H_0^{(1)}(k|h_1 - \varphi(y)|) + \\ + \frac{ik\varphi'(y)}{2\lambda} H_0^{(1)}(k|h_1 + \varphi(y)|) - \frac{k}{2\lambda} e^{ik|h_2 - \varphi(y)|} - \\ - \frac{k}{2\lambda} e^{ik(h_2 + \varphi(y))} - \frac{k}{2\lambda} e^{ik|h_1 - \varphi(y)|} - \frac{k}{2\lambda} e^{ik(h_1 + \varphi(y))} - \\ - 2 \frac{ik}{\lambda} e^{ik\varphi(y)} - \frac{k\lambda}{\sin k\varphi(y)}. \quad (14)$$

Таким образом, для $\frac{\partial v}{\partial n}$ мы получили интегральное уравнение Фредгольма второго рода (6) с правой частью, не содержащей несобственных интегралов. Воспользовавшись какой-либо квадратурной формулой, получим систему линейных алгебраических уравнений и решив ее, найдем $\frac{\partial v}{\partial n}$ на нижней границе слоя.

Зная $\frac{\partial v}{\partial n}$, можно, используя (3), найти $\frac{\partial u}{\partial z}$ на верхней поверхности слоя (при $z=0$):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = ik - \int_{-A\varphi}^{A+1} \frac{\partial v}{\partial n'} \cdot \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} dl' - k \int_{-\infty\varphi}^{+\infty} \frac{\lambda(y')}{\sin kh\varphi(y')} \cdot \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} dl'.$$

Освободившись от несобственных интегралов для $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}$, окончательно получим

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = - \int_{A\varphi}^{A+1} \frac{\partial v}{\partial n'} \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} \lambda(y) dy' + \frac{k}{\sin kh_2} \int_0^y \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} dy' + \frac{k}{\sin kh_1} \int_y^d \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} dy' - \frac{k}{2} (\operatorname{ctg} kh_2 + \operatorname{ctg} kh_1).$$

Дополнение.

Вычислим интеграл
$$\int_0^{\infty} \frac{H_v^{(1)}\{k\sqrt{t^2+z^2}\}}{(t^2+z^2)^{\frac{1}{2}v}} t^{\mu-1} dt, \quad (15)$$

где $\operatorname{Re} \mu > 0$, $|\arg k| < \frac{\pi}{2}$, $z > 0$.

Для вычисления данного интеграла воспользуемся интегральным представлением функции Ханкеля [3]:

$$H_v^{(1)}(\tau) = \frac{1}{\pi i} \int_{0 \exp i\omega}^{\infty \exp(\pi-\omega)i} u^{-v-1} \exp\left\{\frac{1}{2}\tau\left(u - \frac{1}{u}\right)\right\} du,$$

где $|\omega| < \pi$, $|\omega - \arg \tau| < \frac{\pi}{2}$.

Для интеграла (15) будем иметь

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \int_{0 \exp i\omega}^{\infty \exp(\pi-\omega)i} \frac{u^{-v-1} t^{\mu-1}}{(t^2+z^2)^{\frac{1}{2}v}} \exp\left\{\frac{1}{2}k\left(\sqrt{t^2+z^2}u - \frac{t^2+z^2}{\sqrt{t^2+z^2}u}\right)\right\} dudt =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \int_{0 \exp i\omega}^{\infty \exp(\pi-\omega)i} v^{-v-1} \exp\left\{\frac{1}{2}k\left(v - \frac{z^2}{v}\right)\right\} t^{\mu-1} \exp\left\{-\frac{k}{2v}t^2\right\} dudt.$$

Изменив порядок интегрирования и воспользовавшись формулой [4]

$$\int_0^{\infty} t^{\mu-1} e^{-\beta t^2} dt = (4\beta)^{-\frac{\mu}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)},$$

получим

$$\frac{\Gamma(\mu) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) (2k)^{\frac{\mu}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi i} \int_{0 \exp i\omega}^{\infty \exp(\pi-\omega)i} v^{-v-1 + \frac{\mu}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}k\left(v - \frac{z^2}{v}\right)\right\} dv =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) (2k)^{\frac{\mu}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi i} \int_{0 \exp i\omega}^{\infty \exp(\pi-\omega)i} v^{-\left(v - \frac{\mu}{2}\right) - 1} \exp\left\{\frac{1}{2}kz\left(\frac{v}{z} - \frac{z}{v}\right)\right\} dv.$$

Сделаем замену переменных $\omega = \frac{v}{z}$; тогда интеграл перепишем в виде

$$\frac{\Gamma(\mu) \sqrt{\pi z^{\frac{\mu}{2}}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) (2k)^{\frac{\mu}{2}}} \cdot \frac{1}{\pi i} \int_{0 \exp i\omega}^{\infty \exp(\pi-\omega)i} \omega^{-\left(v - \frac{\mu}{2}\right) - 1} \exp\left\{\frac{1}{2}kz\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)\right\} d\omega$$

и окончательно

$$\int_0^{\infty} \frac{H_v^{(1)}\{k\sqrt{t^2+z^2}\}}{(t^2+z^2)^{\frac{1}{2}v}} t^{\mu-1} dt = \frac{\Gamma(\mu) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) (2k)^{\frac{\mu}{2}}} \cdot z^{\frac{\mu}{2}-v} H_{v-\frac{\mu}{2}}^{(1)}(kz).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И., Кокотушкин Г. А. Исследование метода расчета магнито-теплического поля в слое переменной мощности (настоящий сборник).
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Гавтехиздат, 1953.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. М., ИЛ, 1949.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Е. В. ЗАХАРОВ

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА АНОМАЛИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ОТ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ПОГРУЖЕННОЙ В ПРОВОДЯЩЕЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В работе [1] дано строгое решение задачи дифракции электромагнитных волн, излучаемых произвольным источником, на идеально проводящей полуплоскости, расположенной вертикально в полупространстве. В настоящей работе решается более общая задача дифракции произвольного электромагнитного поля на идеально проводящей полуплоскости, расположенной в полупространстве под углом к вертикали. Решение данной задачи дает возможность исследовать закономерности поведения аномалий в зависимости от угла наклона полуплоскости, что представляет значительный интерес для теории геофизических методов электроразведки. Задача редуцирована к системе двух интегральных уравнений

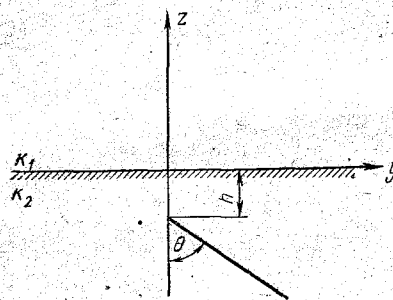


Рис. 1

на прямой, решаемой методом последовательных приближений. Исследуется сходимость метода в зависимости от глубины погружения верхней кромки полуплоскости и угла ее наклона. На основе решения системы интегральных уравнений рассматриваются алгоритмы расчета аномалий электромагнитных полей.

Пусть имеется изотропная среда, состоящая из двух полупространств, в каждом из которых параметры ϵ (диэлектрическая проницаемость), μ^0 (магнитная проницаемость) и σ (проводимость) постоянны. Выберем систему координат (x, y, z) таким образом, чтобы ось oz была направлена перпендикулярно границе раздела, а сама граница раздела совпадала с плоскостью $z=0$ (рис. 1). В нижнее полупространство ($z < 0$) на глубину h погружена идеально проводящая полуплоскость, ребро которой параллель-

но оси ox . Полуплоскость составляет с вертикалью угол θ ($\theta \leq 90^\circ$) и описывается уравнением

$$-\infty < x < \infty, y > 0, (z + h) \sin \theta = -y \cos \theta.$$

Рассмотрим гармоническое во времени электромагнитное поле (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$), которое возбуждается в данной среде произвольно расположенной системой источников любого типа. Задача состоит в том, чтобы найти напряженность электрического поля \vec{E} и напряженность магнитного поля \vec{H} , удовлетворяющие следующей системе уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = -i\omega \epsilon' \vec{E} + \vec{j}_{\text{ст}},$$

$$\text{rot } \vec{E} = i\omega \mu^0 \vec{H},$$

где $\epsilon' = \epsilon + \frac{i\sigma}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость среды, $\vec{j}_{\text{ст}}$ — плотность сторонних токов.

На границе раздела $z=0$ выполняется условие непрерывности касательных к границе компонент векторов \vec{E} и \vec{H} , т. е. непрерывны E_x, E_y, H_x, H_y . На полуплоскости касательная компонента вектора \vec{E} обращается в нуль ($E_\tau = 0$). Если проводимость среды отлична от нуля, то на бесконечности компоненты поля убывают быстрее, чем $\frac{1}{R}$ ($R \rightarrow \infty$). Потребуем также, чтобы компоненты векторов \vec{E} и \vec{H} , параллельные ребру полуплоскости, были ограничены в окрестности ребра, а остальные компоненты могут иметь на ребре особенность, но меньшую, чем $\frac{1}{r}$, где r — расстояние ребра. Можно показать, что решение поставленной задачи единственно.

Прежде чем переходить к нахождению решения, сделаем одно замечание. Будем считать, что первичные поля в среде (в отсутствие полуплоскости) известны. Имеется много работ советских, а также иностранных авторов, в которых этот вопрос изучается достаточно подробно для различных источников электромагнитных полей, например бесконечно длинного кабеля, магнитного или электрического диполя в земле или в воздухе. Поэтому в данной работе рассматриваются лишь аномалии первичных полей, вызванных присутствием полуплоскости, а слово «первичное» относится к полю в среде без жилы. При этом удобнее вместо полного электромагнитного поля рассматривать аномальное поле, которое определяется как разность полного и первичного полей

$$\vec{E}^a = \vec{E} - \vec{E}^0; \quad \vec{H}^a = \vec{H} - \vec{H}^0.$$

Если полуплоскость отсутствует, то $\vec{E}^a = 0, \vec{H}^a = 0$. Для векторов

\vec{E}^a и \vec{H}^a имеет место следующая задача (индексы «а» в дальнейшем опускаются, и под \vec{E} и \vec{H} понимаются аномальные поля):

$$\text{rot } \vec{H} = -\frac{ik^2}{\omega\mu^0} \vec{E}, \quad \text{rot } \vec{E} = i\omega\mu^0 \vec{H}, \quad (1)$$

где k — волновое число слоистой среды

$$k = \begin{cases} k_1 = \omega \sqrt{\mu_1^0 \varepsilon_1^1}, & z > 0, \\ k_2 = \omega \sqrt{\mu_2^0 \varepsilon_2^1}, & z < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Граничное условие на полуплоскости принимает вид

$$E_\tau = -E_\tau^0.$$

Поставленная задача является трехмерной векторной задачей с параметрами, не зависящими от координаты x . Это означает, что трехмерность задачи — следствие трехмерности первичного поля и не связана с геометрической структурой задачи. Оказывается, что в этом случае все компоненты векторов \vec{E} и \vec{H} могут быть выражены через две компоненты E_x и H_x , параллельные ребру полуплоскости. Выражения для компонент векторов \vec{E} и \vec{H} через E_x и H_x имеют следующий вид:

$$E_{x_m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x_m \partial \xi} N(x - \xi) d\xi - (-1)^m i\omega\mu^0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H_x}{\partial x_{m-(-1)^m}} N(x - \xi) d\xi,$$

$$H_{x_m} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x_m \partial \xi} N(x - \xi) d\xi + (-1)^m \frac{ik^2}{\omega\mu^0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_x}{\partial x_{m-(-1)^m}} N(x - \xi) d\xi,$$

$$N(x - \xi) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x-\xi|}; \quad x_1 \equiv y, \quad x_2 = z, \quad m = 1, 2.$$

Таким образом, все компоненты векторов E и H выражены через E_x и H_x .

Уравнения (1) выполняются автоматически, если компоненты E_x и H_x удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \quad (3)$$

где $U = E_x$ или H_x . В плоскости $z=0$ непрерывны E_x, H_x, E_y, H_y . На полуплоскости

$$E_x = -E_x^0; \quad \frac{\partial H_x}{\partial n} = -\frac{\partial H_x^0}{\partial n},$$

где n — нормаль к полуплоскости. Как видно, краевая задача для E_x и H_x неудобна из-за сложности граничных условий при $z=0$. Но задачу можно редуцировать к плоской задаче с простыми граничными условиями при $z=0$, если применить преобразования Фурье по координате x . Введем следующие обозначения:

$$e(t, y, z) = \frac{1}{\omega\mu^0} \int_{-\infty}^{\infty} E_x(\xi, y, z) e^{it\xi} d\xi,$$

$$h(t, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} H_x(\xi, y, z) e^{it\xi} d\xi.$$

После применения преобразования Фурье по координате x к волновым уравнениям и граничным условиям будем иметь следующую плоскую задачу для системы волновых уравнений относительно функций e и h :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + q^2 e = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + q^2 h = 0,$$

где $q^2 = k^2 - t^2$. При $z=0$ выполнены условия

$$[e] = [h] = 0,$$

$$\left[\alpha \frac{\partial e}{\partial z} \right] = \gamma \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \left[\beta \frac{\partial h}{\partial y} \right] = -\gamma \frac{\partial e}{\partial y}, \quad (5)$$

где $\alpha = \frac{k^2}{q^2}$, $\beta = \frac{1}{q^2}$, $\gamma = t \left[\frac{1}{q^2} \right]$ (квадратные скобки означают разность верхнего и нижнего предельных значений).

На полуплоскости

$$e = -e^0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{\partial h^0}{\partial n}. \quad (6)$$

Таким образом, трехмерная задача для E_x и H_x редуцирована к плоской задаче для функций e и h , зависящих от параметра t . Как видно, функции e и h связаны лишь условиями (3) при $z=0$. Если параметры таковы, что $\gamma=0$, то система для e и h распадается на два независимых уравнения. Это возможно, по крайней мере, в двух случаях: во-первых, при $t=0$ и, во-вторых, при $k_1=k_2$. Случай $t=0$ соответствует дифракции плоского $\left(\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0 \right)$ электромагнитного поля E или H поляризации вдоль ребра. При этом функции e и h являются компонентами векторов \vec{E} или \vec{H} , направленных вдоль ребра. При $k_1=k_2$ параметр γ также равен нулю (при любом t), и уравнения для e и h можно решать незави-

симо. В общем случае, решая набор задач (4) с условиями (5) и (6) для различных значений t , а затем, беря обратное преобразование Фурье, можно найти E_x и H_x , а также и остальные компоненты векторов \vec{E} и \vec{H} . Таким образом, задача сведена к нахождению функций $e(t, y, z)$ и $h(t, y, z)$ — решений краевой задачи для системы двух волновых уравнений (4) с условиями (5) и (6). Для решения задачи воспользуемся методом функции источника, для чего введем в рассмотрение тензор Грина $\hat{G}(M, M_0)$, имеющий вид

$$\hat{G}(M, M_0) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_e & g_e \\ G_m & g_m \end{pmatrix}, \quad (7)$$

компоненты которого G_{ik} являются функциями координат двух точек плоскости M и M_0 , удовлетворяют уравнению (4) и следующим граничным условиям при $z=0$:

$$[\hat{G}(M, M_0)] = 0,$$

$$\left[\hat{I}_0 \frac{\partial \hat{G}}{\partial z} \right] = \gamma \frac{\partial}{\partial y} (\hat{I}, \hat{G}),$$

где

$$\hat{I}_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \hat{I}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функции G_e и G_m имеют особенность в точке совпадения аргументов типа

$$\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}, \quad \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$$

соответственно ($r_{MM_0} = \sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$), а также условию симметрии

$$G_{e,m}(M, M_0) = G_{e,m}(M_0, M).$$

Тензор Грина (7) в явном виде можно найти, используя разложения по собственным функциям плоской двухслойной задачи. Подробно это сделано в [1]. Здесь будут выписаны необходимые для дальнейшего выражения для функций $G_{ik}(y, z, y_0, z_0)$ при $z_0 < 0$:

$z < 0$

$$G_{11} = G_e = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(q_2 r_{MM_0}) + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty e^{\mu_2(z+z_0)} \cos \lambda (y-y_0) \frac{N_e}{N} \frac{d\lambda}{\mu_2}, \quad (8)$$

$$G_{12} = G_{21} = g_e = g_m = -2\gamma \int_0^\infty e^{\mu_2(z+z_0)} \sin \lambda (y-y_0) \frac{\lambda d\lambda}{N}, \quad (9)$$

$$G_{22} = G_m = \frac{1}{\beta^2} \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(q_2 r_{MM_0}) + \frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty e^{\mu_2(z+z_0)} \cos \lambda (y-y_0) \frac{N_m}{N} \frac{d\lambda}{\mu_2}, \quad (10)$$

где

$$\mu = \sqrt{\lambda^2 - q^2}, \quad N = (\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2) (\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2) - (\gamma \lambda)^2,$$

$$N_e = (\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2) (\mu_2 \alpha_2 - \mu_1 \alpha_1) + (\gamma \lambda)^2,$$

$$N_m = (\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2) (\mu_2 \beta_2 - \mu_1 \beta_1) + (\gamma \lambda)^2,$$

при $z > 0$

$$G_{11} = G_e = 2 \int_0^\infty e^{-\mu_1 z + \mu_2 z_0} \cos \lambda (y-y_0) \frac{\beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_2}{N} d\lambda, \quad (11)$$

$$G_{12} = G_{21} = g_e = g_m = -2\gamma \int_0^\infty e^{-\mu_1 z + \mu_2 z_0} \sin \lambda (y-y_0) \frac{\lambda d\lambda}{N}, \quad (12)$$

$$G_{22} = G_m = 2 \int_0^\infty e^{-\mu_1 z + \mu_2 z_0} \cos \lambda (y-y_0) \frac{\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2}{N} d\lambda. \quad (13)$$

Отметим, что предыдущие формулы при $t=0$ дают функции Грина плоских задач E или H поляризации. Применяя далее вторую формулу Грина к тензору \hat{G} и вектору $\hat{I}_0 \vec{P} = \begin{pmatrix} \alpha & e \\ \beta & h \end{pmatrix}$, можно получить интегральные представления для функций e и h через значения этих же функций и их нормальных производных на полуплоскости

$$\vec{P}(M) = \begin{pmatrix} e \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ \hat{G}(M, M_0) \hat{I}_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial n_{M_0}} - \frac{\partial \hat{G}}{\partial n_{M_0}} \hat{I}_0 \vec{P} \right\} dt_{M_0}, \quad (14)$$

где C охватывает полуплоскость.

Для дальнейшего преобразования представления (14) введем систему координат, связанную с полуплоскостью $s_0(y_0, z_0)$, $v_0(y_0, z_0)$ (s_0 — натуральный параметр, v_0 — элемент длины), v_0 — координата, ось которой направлена по нормали:

$$y_0 = s_0 \sin \theta + v_0 \cos \theta, \quad (15)$$

$$z_0 = -s_0 \cos \theta + v_0 \sin \theta - h.$$

Используя (15), можно записать представление (14) в следующем

виде:

$$e(t, y, z) = \alpha_2 \int_0^\infty G_e j_1(s_0) ds_0 + \lim_{v_0 \rightarrow 0} \beta_2 \int_0^\infty \frac{\partial G_e}{\partial v_0} j_2(s_0) ds_0, \quad (16)$$

$$h(t, y, z) = \alpha_2 \int_0^\infty G_m j_1(s_0) ds_0 + \lim_{v_0 \rightarrow 0} \beta_2 \int_0^\infty \frac{\partial G_m}{\partial v_0} j_2(s_0) ds_0, \quad (17)$$

где

$$j_1 = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial e}{\partial v_0} \right)_{v_0=+0} - \left(\frac{\partial e}{\partial v_0} \right)_{v_0=-0} \right\},$$

$$j_2 = -\frac{1}{2\pi} \{ (h)_{v_0=+0} - (h)_{v_0=-0} \}$$

имеют смысл образов Фурье плотностей токов, текущих по полуплоскости вдоль и перпендикулярно ребру соответственно. Очевидно, что функции e и h , представленные формулами (16) и (17), удовлетворяют всем условиям задачи, за исключением условий (6). Удовлетворяя условию (6), т. е. проводя необходимое дифференцирование и опуская точку M на полуплоскость, получим систему интегро-дифференциальных уравнений для определения функций

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 \int_0^\infty G_e j_1(s_0) ds_0 + \beta_2 \lim_{v, v_0 \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{\partial G_e}{\partial v_0} j_2(s_0) ds_0 &= -e^0(s, v=0), \\ \alpha_2 \lim_{v \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{\partial G_m}{\partial v} j_1(s_0) ds_0 + \beta_2 \lim_{v, v_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial v} \int_0^\infty \frac{\partial G_m}{\partial v_0} j_2(s_0) ds_0 &= \\ &= -\frac{\partial h}{\partial v}(s, v=0). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Несколько преобразуем ядра интегральных операторов системы (18), используя формулы (8—10). Отметим, что указанные в (18) дифференцирование и предельный переход у G_m под знаком интеграла выполнить невозможно, так как при этом получается неинтегрируемое ядро.

Можно провести следующее преобразование:

$$\lim_{v, v_0 \rightarrow 0} \frac{\partial^2 G_m}{\partial v \partial v_0} = \frac{1}{\beta_2} \left\{ \left(\frac{d^2}{ds^2} + q_2^2 \right) \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(q_2 |s - s_0|) + P_{22}(s, s_0) \right\},$$

где

$$P_{22}(s, s_0) = \int_0^\infty e^{-\mu_2(s+s_0)\cos\theta - 2h\mu_2} \cos[\lambda(s-s_0)\sin\theta] \frac{\lambda^2 - q_2^2 \sin^2\theta}{\mu_2} \frac{N_m}{N} d\lambda. \quad (19)$$

38

Остальные ядра системы (18) просто выписываются:

$$G_e = \frac{1}{\alpha_2} \left\{ \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(q_2 |s - s_0|) - P_{11}(s, s_0) \right\},$$

$$P_{11}(s, s_0) = \int_0^\infty e^{-\mu_2(s+s_0)\cos\theta - 2h\mu_2} \cos[\lambda(s-s_0)\sin\theta] \frac{N_e}{N} d\lambda, \quad (20)$$

$$\lim_{v, v_0 \rightarrow 0} \frac{\partial G_e}{\partial v_0} = \frac{1}{\beta_2} P_{12}(s, s_0), \quad P_{12}(s, s_0) =$$

$$= 2\gamma\beta_2 \int_0^\infty e^{-\mu_2(s+s_0)\cos\theta - 2h\mu_2} \{ \mu_2 \sin\theta \sin[\lambda(s-s_0)\sin\theta] - \lambda \cos\theta \cos[\lambda(s-s_0)\sin\theta] \} \frac{\lambda d\lambda}{N}, \quad (21)$$

$$\lim_{v, v_0 \rightarrow 0} \frac{\partial G_m}{\partial v} = \frac{1}{\alpha_2} P_{21}(s, s_0), \quad P_{21}(s, s_0) =$$

$$= 2\gamma\alpha_2 \int_0^\infty e^{-\mu_2(s+s_0)\cos\theta - 2h\mu_2} \{ \mu_2 \sin\theta \sin[\lambda(s-s_0)\sin\theta] + \lambda \cos\theta \cos[\lambda(s-s_0)\sin\theta] \} \frac{\lambda d\lambda}{N}. \quad (22)$$

Теперь с учетом полученных выражений система (18) переписывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \left\{ \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(q_2 |s - s_0|) \right\} j_1(s_0) ds_0 + \sum_{k=1}^2 \int_0^\infty P_{1k}(s, s_0) j_k(s_0) ds_0 &= f_1(s), \\ \left(\frac{d^2}{ds^2} + q_2^2 \right) \int_0^\infty \left\{ \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(q_2 |s - s_0|) \right\} j_2(s_0) ds_0 + \\ + \sum_{k=1}^2 \int_0^\infty P_{2k}(s, s_0) j_k(s_0) ds_0 &= f_2(s), \\ f_1 &= -e^0(s), \quad f_2 = -\frac{\partial h^0}{\partial v}(s). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Как видно, ядра интегральных операторов содержат слагаемые, зависящие от модуля разности аргументов, которые порождают операторы типа Винера—Хопфа. Эта часть ядер выделена специально, так как на этом основано решение системы интегральных уравнений. Применяя метод Винера—Хопфа, можно перейти от

39

уравнений I рода на полупрямой к системе интегральных уравнений II рода на прямой. При этом необходимо учесть, что при решении интегрального уравнения методом Винера—Хопфа наиболее просто найти не саму неизвестную функцию, а преобразование Лапласа (Фурье) от нее. Используя интегральные представления для членов с ядрами $P_{ik}(s, s_0)$, можно редуцировать исходную систему к системе интегральных уравнений II рода относительно преобразований Лапласа от функций

$$I_i(p) = \int_0^{\infty} j_i(s_0) e^{-ps_0} ds_0 \quad (i = 1, 2).$$

Отметим также, что для нахождения электромагнитных полей знания функций $I_i(p)$ достаточно, так как поля выражаются через них.

Для дальнейшего необходима следующая система равенств, вытекающая из выражений (19—22), если использовать формулы Эйлера:

$$\int_0^{\infty} j_1(s_0) P_{11}(s, s_0) ds_0 = \int_0^{\infty} I_1(\xi_1) e^{-\xi_1 s - 2h\mu_2} \frac{N_e}{N} \frac{d\lambda}{2\mu_2}, \quad (24)$$

$$\int_0^{\infty} j_2(s_0) P_{12}(s, s_0) ds_0 = -\gamma\beta_2 \int_{-\infty}^{\infty} I_2(\xi_1) e^{-\xi_1 s - 2h\mu_2} (\lambda \cos \theta + i\mu_2 \sin \theta) \frac{\lambda d\lambda}{N}, \quad (25)$$

$$\int_0^{\infty} j_1(s_0) P_{21}(s, s_0) ds_0 = \gamma d_2 \int_0^{\infty} I_1(\xi_1) e^{-\xi_1 s - 2h\mu_2} (\lambda \cos \theta - i\mu_2 \sin \theta) \frac{\lambda d\lambda}{N}, \quad (26)$$

$$\int_0^{\infty} j_2(s_0) P_{22}(s, s_0) ds_0 = \int_{-\infty}^{\infty} I_2(\xi_1) e^{-\xi_1 s - 2h\mu_2} (\lambda^2 - q_2^2 \sin^2 \theta) \frac{N_m}{N} \frac{d\lambda}{2\mu_2}, \quad (27)$$

где

$$\xi_1 \equiv \mu_2 \cos \theta + i\lambda \sin \theta,$$

$$\xi_2 \equiv \mu_2 \cos \theta - i\lambda \sin \theta.$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} j_{1,2}(s_0) \left\{ \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(q_2 |s - s_0|) \right\} ds_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-s_0 s} I_{1,2}(s_0) K(s_0) ds_0, \quad (28)$$

где

$$K(s_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(q_2 |x|) e^{-xs_0} dx = \frac{\pi i}{\sqrt{q_2^2 + s_0^2}}.$$

Подставляя равенства (24—28) в систему (23) и применяя преобразование Лапласа по переменной s , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(s) I_1(s) \frac{ds}{p-s} + \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} I_k(\xi_1) \frac{F_{1k}(\lambda)}{p+\xi_2} d\lambda &= \tilde{f}_1(p), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (q_2^2 + s^2) K(s) I_2(s) \frac{ds}{p-s} + \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} I_k(\xi_1) \frac{F_{2k}(\lambda)}{p+\xi_2} d\lambda &= \\ &= \tilde{f}_2(p), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$F_{11} = \frac{N_e}{2N} \cdot \frac{e^{2h\mu_2}}{\mu_2}; \quad F_{12} = -\gamma\lambda\beta_2 \frac{i\mu_2 \sin \theta + \lambda \cos \theta}{N} e^{-2h\mu_2},$$

$$F_{21} = -\lambda\gamma\alpha_2 \frac{i\mu_2 \sin \theta - \lambda \cos \theta}{N} e^{-2h\mu_2},$$

$$F_{22} = \frac{\lambda^2 - q_2^2 \sin^2 \theta}{N} N_m \frac{e^{-2h\mu_2}}{2\mu_2},$$

$$\tilde{f}_1(p) = \int_0^{\infty} e^{-ps} f_1(s) ds, \quad \tilde{f}_2(p) = \int_0^{\infty} e^{-ps} f_2(s) ds.$$

Используя далее представления

$$\tilde{f}_{1,2}(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \tilde{f}_{1,2}(s) \frac{ds}{p-s},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_k(\xi_1) \frac{F_{ik}(\lambda)}{p+\xi_2} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{ds}{p-s} \int_{-\infty}^{\infty} I_k(\xi_1) \frac{F_{ik}(\lambda)}{s+\xi_2} d\lambda,$$

можно перейти от соотношений (29) к функциональным уравнениям, справедливым в полосе и имеющим вид

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(p) &= I_1(p) K(p) + \tilde{f}_1(p) + \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} I_k(\xi_1) \frac{F_{1k}(\lambda)}{p+\xi_1} d\lambda, \\ \psi_2(p) &= I_2(p) (q_2^2 + p^2) K(p) + \tilde{f}_2(p) + \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} I_k(\xi_1) \frac{F_{2k}(\lambda)}{p+\xi_1} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Эти уравнения содержат четыре неизвестные функции, а именно, функции ψ_1 и ψ_2 , голоморфные в левой полуплоскости, I_1 и I_2 , голоморфные в правой полуплоскости. Для решения исходной за-

дачи из системы (30) достаточно найти функции I_1 и I_2 . В результате решения системы (30) методом Винера—Хопфа получим соотношения

$$\frac{\pi i I_1(p)}{\sqrt{q_2 + ip}} = F_1(p) + \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{q_2 + i\xi_2}}{p + \xi_2} F_{1k}(\lambda) I_k(\xi_1) d\lambda, \quad (31)$$

$$\pi i \sqrt{q_2 + ip} I_2(p) = F_2(p) + \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{2k}(\lambda) I_k(\xi_1)}{(p + \xi_2) \sqrt{q_2 + i\xi_2}} d\lambda, \quad (32)$$

где

$$F_1(p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{ds}{s-p} \tilde{f}_1(s) \sqrt{q_2 - is},$$

$$F_2(s) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{ds}{s-p} \frac{\tilde{f}_2(s)}{\sqrt{q_2 - is}}.$$

Заметим далее, что $\operatorname{Re} \xi_1 > 0$ при $-\infty < \lambda < \infty$. Это означает, что соотношения (31—32) связывают значения функций I_1 и I_2 в правой полуплоскости со значениями тех же функций на некоторой кривой, лежащей в правой полуплоскости переменного p . Полагая, таким образом,

$$\eta_1 \equiv \sqrt{\lambda_0^2 - q_2^2} \cos \theta + i\lambda \sin \theta \quad (-\infty < \lambda_0 < \infty),$$

получим из соотношений (31—32) систему интегральных уравнений с неизвестными функциями $I_1(\eta_1)$ и $I_2(\eta_2)$;

$$\left. \begin{aligned} I_1(\eta_1) &= \frac{\sqrt{q_2 + i\eta_1}}{\pi i} F_1(\eta_1) + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{q_2 + i\eta_1}}{\eta_1 + \xi_2} F_{1k}(\lambda) I_k(\xi_1) d\lambda, \\ I_2(\eta_2) &= \frac{(\sqrt{q_2 + i\eta_1})^{-1}}{\pi i} F_2(\eta_1) + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{2k}(\lambda) I_k(\xi_1)}{\sqrt{(q_2 + i\eta_1)(q_2 + i\xi_2)}} \times \\ &\quad \times \frac{d\lambda}{\eta_1 + \xi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Из условий на ребре следует, что

$$I_1(p) \sim \frac{C_1}{\sqrt{p}} \quad I_2(p) \sim \frac{C_2}{p\sqrt{p}} \quad \text{при } |p| \rightarrow \infty,$$

поэтому возможно ввести в рассмотрение новую систему функций

$$\Phi_1(\eta_1) = \pi I_1(\eta_1) \sqrt{q_2 + i\eta_1}, \quad \Phi_2(\eta_1) = \pi I_2(\eta_1) (q_2 + i\eta_1) \sqrt{q_2 + i\eta_1}. \quad (34)$$

Относительно функций $\Phi_1(\eta_1)$ и $\Phi_2(\eta_1)$ получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(\eta_1) &= (\eta_1 - iq_2) F_1(\eta_1) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\xi_1) \frac{\eta_1 - iq_2}{\eta_1 + \xi_2} \sqrt{\frac{q_2 + i\xi_2}{q_2 + i\xi_1}} F_{11}(\lambda) d\lambda + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\xi_1) \frac{\eta_1 - iq_2}{\eta_1 + \xi_2} \sqrt{\frac{q_2 + i\xi_2}{q_2 + i\xi_1}} \frac{F_{12}(\lambda)}{q_2 + i\xi_1} d\lambda, \\ \Phi_2(\eta_1) &= (\eta_1 - iq_2) F_2(\eta_1) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\xi_1) \frac{\eta_1 - iq_2}{\eta_1 + \xi_2} \frac{F_{21}(\lambda) d\lambda}{\sqrt{(q_2 + i\xi_2)(q_2 + i\xi_1)}} + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\xi_1) \frac{\eta_1 - iq_2}{\eta_1 + \xi_2} \frac{F_{22}(\lambda)}{\sqrt{(q_2 + i\xi_2)(q_2 + i\xi_1)}} \frac{d\lambda}{q_2 + i\xi_2}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Система (35) является системой интегральных уравнений на прямой Π рода. Будем рассматривать эту систему в пространстве $C(-\infty, \infty)$ — пространстве непрерывных комплексно-значных функций, заданных на вещественной прямой, для которых существует конечный предел $\lim_{\pm\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda)$. Норма в $C(-\infty, \infty)$ определяется обычным образом

$$\|f\|_C = \max_{-\infty < \lambda < \infty} |f(\lambda)|.$$

Для дальнейшего удобно записать систему (35) в виде одного матричного уравнения

$$\varphi + \hat{K}\varphi = F, \quad (36)$$

где

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{pmatrix},$$

K_{ij} — интегральные операторы, порождаемые функциями F_{ij} .

$$\varphi = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}.$$

Исследуем возможность решения уравнения (36) методом последовательных приближений. Как известно, для сходимости метода последовательных приближений достаточно потребовать, чтобы норма оператора \hat{K} удовлетворяла условию

$$\|\hat{K}\|_C \max_{ij} \max_{\lambda_0} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{ij}(\lambda_0, \lambda)| d\lambda < 1.$$

Для равномерной сходимости по параметру t потребуем также, чтобы

$$\sup_t \|\hat{K}\| < 1.$$

Прежде чем перейти к оценке нормы оператора \hat{K} , отметим, что ядра интегральных операторов уравнения (36) зависят от свойств среды (волновых чисел k_1 и k_2), а также от положения полуплоскости (глубины залегания верхней кромки полуплоскости h и угла ее наклона θ). Очевидно также, что интегральные члены в уравнении (36) характеризуют степень неоднородности среды, так как при $k_1 = k_2$ ядра всех интегральных операторов обращаются в нуль, а правая часть уравнения (36) дает ее решение. Поэтому решение уравнения (36) методом последовательных приближений означает последовательный учет влияния неоднородности среды на плотность токов, текущих по полуплоскости. Необходимо отметить также, что для слоистой среды «воздух—земля», если пренебрегать в земле токами смещения по сравнению с токами проводимости, имеет место равенство

$$\left| \frac{k_1}{k_2} \right| = \left(\frac{\varepsilon_1 \omega}{\sigma_2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

в силу которого в теории индуктивных методов, использующих низкие частоты, всегда можно считать, что $\left| \frac{K_1}{K_2} \right| \ll 1$. При этом обычно волновое число в верхнем полупространстве (воздухе) полагают равным нулю (квазистационарное приближение).

Проведем оценку нормы оператора \hat{K} . Прежде всего нетрудно показать, что имеет место неравенство

$$\left| \frac{\eta_1 - iq_2}{\eta_1 + \xi_2} \right| \leq \frac{\sqrt{2} + \sin \theta}{\cos \theta} \quad (37)$$

при всех значениях параметров λ , λ_0 , θ .

Имея в виду неравенство (37), норму оператора \hat{K} можно оценить следующим образом:

$$\|\hat{K}\| = \max_{ij} \max_{\lambda_0} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{ij}| d\lambda \leq \alpha_{\max} = \max_{ij} \alpha_{ij}(\theta, h),$$

где

$$\alpha_{ij} = \frac{\sqrt{2} + \sin \theta}{\cos \theta} \int_{-\infty}^{\infty} |\Pi_{ij}| d\lambda,$$

$$\Pi_{11} = \sqrt{\frac{q_2 + i\xi_1}{q_2 + i\xi_2}}, \quad \Pi_{12} = \sqrt{\frac{q_2 + i\xi_1}{q_2 + i\xi_2}} \cdot \frac{F_{12}}{q_2 + i\xi_2}$$

$$\Pi_{21} = \frac{F_{21}}{\sqrt{(q_2 + i\xi_1)(q_2 + i\xi_2)}}, \quad \Pi_{22} = \frac{1}{\sqrt{(q_2 + i\xi_1)(q_2 + i\xi_2)}} \cdot \frac{F_{22}}{q_2 + i\xi_2}$$

Исследуем зависимость величины α_{\max} от параметров

$$H = \frac{|K_2| h}{\sqrt{2}}; \quad T = \frac{t \sqrt{2}}{|k_2|} \text{ и } \theta.$$

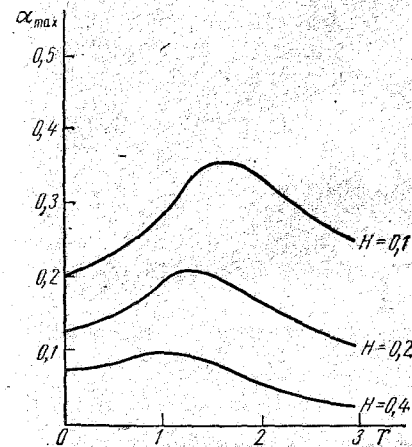


Рис. 2

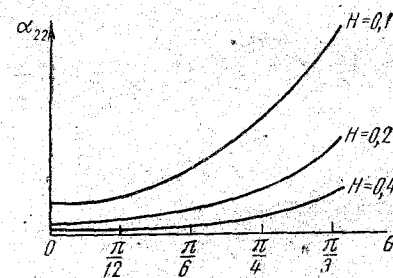


Рис. 4

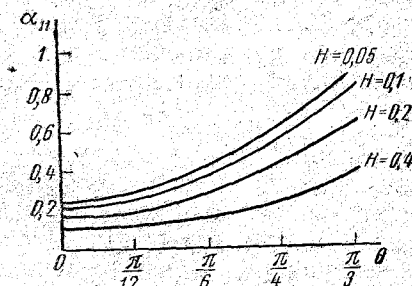


Рис. 3

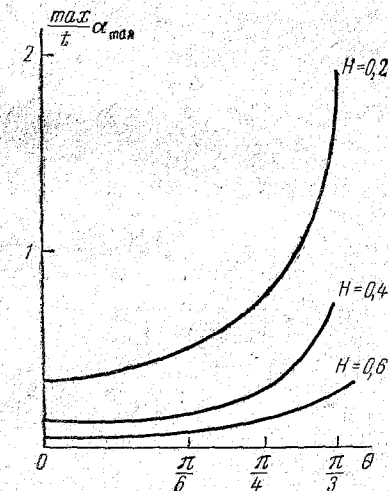


Рис. 5

На рис. 2 представлена зависимость величины α_{\max} от T при различных значениях H и фиксированного угла наклона $\theta=0$ (вертикальная полуплоскость). Как видно, при увеличении T оценка возрастает, достигая максимума, а затем быстро убывает, стремясь к нулю при $T \rightarrow \infty$. Метод последовательных приближений сходится всегда, если $H \geq 0,1$. Величина α_{\max} убывает при увеличении глубины залегания верхней кромки полуплоскости и становится меньше 0,05, если $H > 0,4$. На рис. 3 и 4 представлены зависимости оценочных коэффициентов α_{11} и α_{22} при $t=0$ (плоская

задача) от угла наклона θ . Как уже отмечалось, при $t=0$ уравнения распадаются на два независимых интегральных уравнения. При этом величины $\alpha_{11}(t=0)$ и $\alpha_{22}(t=0)$ дают оценку норм соответствующих интегральных операторов. При увеличении угла θ величины α возрастают, стремясь к бесконечности при $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$,

метод последовательных приближений становится неприменимым при $\theta > 80^\circ$. Возрастание оценок вызвано возрастанием норм самих операторов, ядра которых при $\theta = 90^\circ$ становятся сингулярными. Зависимость величины $\max_t \alpha_{\max}$ от угла θ и глубины погружения H

представлена на рис. 5. Из приводимых графиков видно, что равномерно по T метод последовательных приближений сходится в диапазоне изменения углов до 55° , если $H > 0,2$.

Остановимся теперь на оценке точности решения, получаемого методом последовательных приближений. Если норма оператора в уравнении (36) меньше единицы, то решение этого уравнения

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} (\hat{K})^i F \quad (\hat{K}^0 = 1),$$

а n -е приближение решения имеет вид

$$\varphi^{(n)} = \sum_{i=0}^n (\hat{K})^i F \quad (n \geq 0).$$

Для разности точного и приближенного решений имеет место оценка

$$\|\Delta\varphi^{(n)}\| = \|\varphi - \varphi^{(n)}\| \leq \frac{\|F\| \|\hat{K}\|^n}{1 - \|\hat{K}\|}.$$

Относительная точность решения оценивается следующим образом:

$$\delta^{(n)} = \frac{\|\Delta\varphi^{(n)}\|}{\|\varphi\|} = \frac{\|\Delta\varphi^{(n)}\|}{\|F\|} \frac{\|F\|}{\|\varphi\|} \leq \frac{\|\hat{K}\|^n}{1 - \|\hat{K}\|} \cdot \frac{1}{1 - \|\hat{K}\|} \approx \frac{\|\hat{K}\|^n}{1 - 2\|\hat{K}\|}. \quad (38)$$

С помощью оценки (38) можно установить область изменения параметров θ , H , T , в которой с точностью $\delta = 5\%$ достаточно нулевого приближения. Оказалось, что для вертикальной полуплоскости ($\theta = 0$) нулевого приближения достаточно при глубине погружения $H \geq 0,6$ (для всех значений T). В плоской задаче при $H \geq 0,5$ нулевого приближения достаточно до углов порядка 40° . Так как при увеличении угла величина $\max_t \alpha_{\max}$ возрастает, то

для использования нулевого приближения необходимо увеличивать глубину погружения верхней кромки полуплоскости. Таким образом, решение системы (35) в большинстве случаев может быть получено методом последовательных приближений, применение которого целесообразно в области, где достаточно по крайней ме-

ре первых двух приближений решения системы. Если решение системы (35) найдено, то функции e и h могут быть выражены через него следующим образом:

$$e(t, y, z) = \frac{\alpha_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\xi_1) e^{-\mu_1 z - h\mu_2 + i\lambda y} \frac{\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2}{N \sqrt{q_2 + i\xi_1}} d\lambda - \frac{\gamma \beta^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\xi_1) e^{-\mu_1 z - h\mu_2 + i\lambda y} \frac{i\mu_2 \sin \theta - \lambda \cos \theta}{(q_2 + i\xi_1) \sqrt{q_2 + i\xi_1}} \cdot \frac{\lambda}{N} d\lambda, \quad (39)$$

$$h(t, y, z) = \frac{\beta_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\xi_1) e^{-\mu_1 z - h\mu_2 + i\lambda y} \frac{\mu_2 \sin \theta - i\lambda \cos \theta}{q_2 + i\xi_1} \cdot \frac{\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2}{N \sqrt{q_2 + i\xi_1}} d\lambda - \frac{\gamma \alpha_2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\xi_1) e^{-\mu_1 z - h\mu_2 + i\lambda y} \frac{\lambda d\lambda}{N \sqrt{q_2 + i\xi_1}}. \quad (40)$$

Чтобы получить окончательные формулы для расчета аномалий электромагнитных полей, необходимо применить обратное преобразование Фурье. Будем иметь:

$$E_x = \frac{\omega \mu^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e(t, y, z) e^{-itx} dt, \quad (41)$$

$$E_y = \frac{i\omega \mu^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{t}{q^2} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{1}{q^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right\} e^{-itx} dt, \quad (42)$$

$$E_z = \frac{i\omega \mu^0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{t}{q^2} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{1}{q^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right\} e^{-itx} dt, \quad (43)$$

$$H_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, y, z) e^{-itx} dt, \quad (44)$$

$$H_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{t}{q^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{k^2}{q^2} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \right\} e^{-itx} dt, \quad (45)$$

$$H_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{t}{q^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{k^2}{q^2} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} \right\} e^{-itx} dt. \quad (46)$$

Таким образом, если известно решение системы (35), то вычисление всех компонент векторов \vec{E} и \vec{H} сводится к двукратному

интегрированию этого решения. Можно показать, что в случае, когда источником первичного поля является диполь любого направления и типа, вычисления первичного поля на полуплоскости (правая часть у системы (35)) сводятся к однократному интегралу от элементарных функций. Это означает, что решение поставленной задачи в нулевом приближении выражается трехкратным повторным интегралом от известных функций. Под нулевым приближением здесь понимается решение задачи, полученное с помощью нулевого приближения решения системы (35). Иными словами, учет границы раздела производится в правой части системы (35) и при расчете аномалий электромагнитных полей по формулам (41) — (46). При использовании первого приближения кратность интегрирования увеличивается на единицу. Таким образом, в общем случае рассматриваемая дифракционная задача редуцирована к вычислению интегралов от элементарных функций.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность В. И. Дмитриеву за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

Захаров Е. В., Дмитриев В. И. Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящей полуплоскости, расположенной в слоистой среде. «Изв. АН СССР», сер. «Физика Земли», 1966, № 11.

В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА I РОДА

Как известно, многие задачи математической физики, в частности задачи дифракции, сводятся к интегральному уравнению вида

$$\int_{-1}^1 K(t, s) \varphi(s) ds = f(t), \quad (1)$$

где $K(t, s) = \text{Im} \frac{1}{|t-s|} + N(t, s)$, а $N(t, s)$ — дифференцируемая по t функция, причем $N_t(t, s) \in H$, H — класс непрерывных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на замкнутом интервале $[-1, 1]$.

В настоящей работе в предположении единственности решения уравнения (1) доказывается существование решения в классе H^* , где H^* — класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера в любом замкнутом интервале, не включающем концов, а вблизи концов представимых в виде

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{|t-c|^\alpha}, \quad c = -1 \text{ или } 1,$$

$$0 \leq \alpha < 1,$$

где $\varphi^*(t) \in H$ на $[-1, 1]$.

В работе предлагается численный метод (метод саморегуляризации) для решения уравнений данного типа.

§ 1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Теорема. Если решение уравнения (1) единственно в классе H^* , а правая часть уравнения имеет производную, принадлежащую классу H , то решение уравнения (1) существует в классе H^* .

Предположим, что решение уравнения (1) существует и принадлежит классу H^* . Тогда продифференцировав уравнение (1) по t (такая операция законна по крайней мере во внутренних точках интервала), получим

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(s)}{t-s} ds = F(t) \equiv f'(t) + \int_{-1}^1 N_t'(t, s) \varphi(s) ds. \quad (2)$$

Заметим, что правая часть уравнения (2) $F(t) \in H$, а уравнение (2) выполняется во внутренних точках интервала $[-1, 1]$.

Полученное уравнение (2) всегда разрешимо в H^* , а его решение линейно зависит от одной произвольной постоянной C и имеет вид

$$\varphi(s) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-u^2}{1-s^2}} \frac{F(u)}{u-s} du + \frac{C}{\sqrt{1-s^2}}. \quad (3)$$

Можно показать, что функция $\psi(s) = \varphi(s) \sqrt{1-s^2}$ принадлежит классу H на интервале $[-1, 1]$.

Покажем теперь, что константу C в (3) можно выбрать таким образом, чтобы $\varphi(s)$, представленная в виде (3), удовлетворяла уравнению (1). Подставив (3) в (1), найдем

$$C = \frac{1}{C_0} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\ln|s-t|}{\sqrt{1-s^2}} ds \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u^2}}{u-s} F(u) du + f(t) + \int_{-1}^1 N(t, s) \varphi(s) ds \right\}, \quad (4)$$

где $C_0 = -\int_{-1}^1 \frac{\ln|t-s|}{\sqrt{1-s^2}} ds = \pi \ln 2$.

Легко показать, что представленная в таком виде $C(\varphi)$ есть константа. Для этого достаточно продифференцировать выражение (4) по t и применить формулу Пуанкаре—Бельтрана. Подставив найденное для C выражение (4) в формулу (3), получим для функции $\varphi(t)$ интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$\varphi(t) + \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-s^2}{1-t^2}} \bar{K}(t, s) \varphi(s) ds = \frac{\Phi(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (5)$$

где

$$\bar{K}(t, s) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u^2} N_u'(u, s) du}{u-t} - \frac{N(t, s)}{c_0} \right\}$$

$$- \frac{1}{\pi^2 c_0} \int_{-1}^1 \frac{\ln|t-z|}{\sqrt{1-z^2}} dz \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u^2} N_u' du}{u-2}, \quad (6)$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{c_0} \left[f(t) + \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\ln|t-s|}{\sqrt{1-s^2}} ds \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u^2} f'(u)}{u-s} du \right] - \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u^2}}{u-t} f'(u) du. \quad (7)$$

Введя новую функцию

$$\Psi(t) = \varphi(t) \sqrt{1-t^2}, \quad (8)$$

получим для нее интегральное уравнение Фредгольма II рода в виде

$$\Psi(t) + \int_{-1}^1 \bar{K}(t, s) \Psi(s) ds = \Phi(t). \quad (9)$$

Уравнение (9) получено в предположении существования решения уравнения (1) $\varphi(t) \in H^*$, при этом $\psi(t) \in H$.

Рассмотрим теперь непосредственно уравнение (9), в котором правая часть $\Phi(t) \in H$, а ядро представимо в виде

$$K(t, s) = \frac{M(t, s)}{\sqrt{1-s^2}},$$

где $M(t, s) \in H$.

В силу альтернативы Фредгольма уравнение (9) при условии единственности разрешимо в пространстве C , а следовательно, разрешимо в классе H , так как интегральный оператор переводит любую функцию, принадлежащую C , в функцию класса H . Из построения уравнения (9) следует, что функция $\frac{\Psi(t)}{\sqrt{1-t^2}}$, где $\Psi(t)$ — решение (8), будет удовлетворять исходному уравнению (1).

В силу предполагаемой единственности решения уравнения (1) решение уравнения (9) также единственно, а следовательно, существует и принадлежит классу H . Таким образом, существование решения исходного уравнения (1), принадлежащего H^* , доказано.

Принципиально теперь нет необходимости решать непосредственно уравнение (1), являющееся уравнением Фредгольма I рода, т. е. некорректной задачей, так как для нахождения его решения можно решать эквивалентное ему уравнение (9). Однако заметим, что хотя уравнение (9) и является уравнением Фредгольма II рода, но его численное решение имеет значительные вычислительные трудности, связанные с тем, что ядро уравнения представляется через сингулярные интегралы. Поэтому мы рассмотрим некоторый алгоритм, позволяющий непосредственно решать уравнение (1).

§ 2. МЕТОД САМОРЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Метод основан на априорных предположениях относительно функции $\psi(t) = \sqrt{1-t^2} \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — решение исходного уравнения. Из теоремы существования следовало, что функция $\psi(t)$ принадлежит классу H на интервале $[-1, 1]$. Мы предположим далее, что функция $\psi(t)$ слабо меняется на некотором интервале длины h . Тогда имеет место приближенное равенство

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln|t-s|}{\sqrt{1-s^2}} \psi(s) ds \approx \sum_{i=1}^n \psi(s_i) \int_{s_i - \frac{1}{2}}^{s_i + \frac{1}{2}} \frac{\ln|t-s|}{\sqrt{1-s^2}} ds,$$

где $s_{i-1} - s_i = h$. При сделанных предположениях задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} \psi_k = f_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

где

$$a_{ik} = \int_{s_i - \frac{1}{2}}^{s_i + \frac{1}{2}} \frac{\ln|t-s|}{\sqrt{1-s^2}} ds + A_k N(t_i, t_k), \quad \psi_k \equiv \psi(s_k).$$

Можно ожидать, что из-за особенности ядра $\ln \frac{1}{|t-s|}$ диагональные элементы матрицы $|a_{ik}|$ будут превосходить по величине остальные элементы (для чего шаг интегрирования нужно выбрать достаточно большим). В таком случае определитель системы отличен от нуля и решение устойчиво. Напротив, с точки зрения априорных предположений, ограничивающих функцию $\psi(t)$, величину h желательно выбирать достаточно малой, чтобы допустить осциллирующие функции. Но уменьшение h , хотя и позволяет точнее приближать интегральный оператор конечномерным, но при этом, вообще говоря, матрица $a_{ik}(h)$ становится неустойчивой к погрешностям вычисления. Выбор оптимального h представляет поэтому значительную трудность.

Можно предложить несколько другой метод, основанный по существу на тех же предположениях. Выбирая шаг интегрирования h , разбиваем ядро $\ln \frac{1}{|t-s|}$ на сумму двух ядер:

$$\ln \frac{1}{|t-s|} = K_h(t-s) + \tilde{K}(t-s),$$

где

$$K_h(t-s) = \begin{cases} \frac{h-|t-s|}{h} \ln \frac{1}{|t-s|} & \text{при } |t-s| < h, \\ 0 & \text{при } |t-s| \geq h, \end{cases}$$

$$\tilde{K}(t-s) = \begin{cases} \frac{|t-s|}{h} \ln \frac{1}{|t-s|} & \text{при } |t-s| < h, \\ \ln \frac{1}{|t-s|} & \text{при } |t-s| \geq h. \end{cases}$$

Уравнение (1) переписывается в виде

$$\int_{-1}^1 K_h(t-s) \varphi(s) ds + \int_{-1}^1 \tilde{K}(t-s) \varphi(s) ds + \int_{-1}^1 N(t,s) \varphi(s) ds = f(t). \quad (10)$$

Первый интеграл в (10) можно приближенно представить так:

$$\int_{-1}^1 K_h(t-s) \varphi(s) ds = \beta(t) \varphi(t),$$

где

$$\beta(t) = \begin{cases} I_1(1+t, -t) - \frac{1}{h} I_2(1+t, -t) + I_1(h, t) - \frac{1}{h} I_2(h, t), & -1 \leq t \leq -1+h \\ I_1(h, -t) - \frac{1}{h} I_2(h, -t) + I_1(h, t) - \frac{1}{h} I_2(h, t), & -1+h \leq t \leq 1-h \\ I_1(h, -t) - \frac{1}{h} I_2(h, -t) + I_1(1-t, t) - \frac{1}{h} I_2(1-t, t), & -1+h \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$I_i(u, v) = \int_0^u \frac{\ln(z) z^{i-1}}{\sqrt{1-(z+v)^2}} dz.$$

После этого уравнение (10) переходит в уравнение Фредгольма II рода с параметром $\beta(t)$ при функции $\varphi(t)$:

$$\beta(t) \sqrt{1-t^2} \varphi(t) + \int_{-1}^1 \tilde{K}(t-s) \varphi(s) ds + \int_{-1}^1 N(t,s) \varphi(s) ds = f(t). \quad (11)$$

Параметр $\beta(t)$ зависит от h и стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, как $h \ln h$. В силу этого численно получить решение уравнения (11) можно лишь для достаточно больших h . Это решение будет, вообще говоря, неустойчиво при $h \rightarrow 0$ (т. е. когда порядок системы стремится к бесконечности).

§ 3. ПРИМЕР

Изложенный численный метод решения уравнения вида (1) применялся к уравнению

$$\int_0^1 \ln \left(\frac{1}{|t-s|} \right) \varphi(s) ds = 1, \quad (12)$$

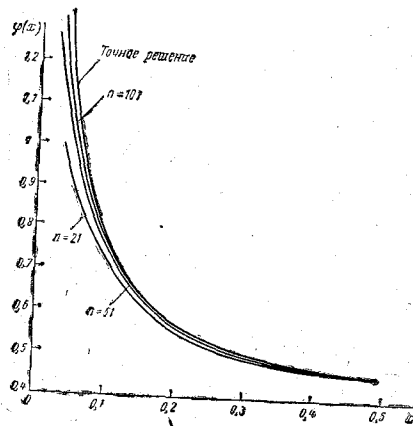


Рис. 1

точное решение которого известно:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi \ln 2 \sqrt{t(1-t)}}$$

Уравнение (12) решалось численно методом саморегуляризации сведением к уравнению (11) (вырезание особенности ядра). При этом особенность решения на концах интервала интегрирования не выделялась, что позволило намного сократить время счета. На рис. 1 приведены кривые точного и приближенного решений для различных порядков решаемой системы. Из рисунка видно, что в исследованных пределах изменения числа n приближенное решение сходится к точному решению поточечно.

В. И. ДМИТРИЕВ

ОБЩИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Расчет и исследование распространения электромагнитных полей в слоистой среде имеют большое значение для широкого круга прикладных задач, в частности для развития теории геофизических методов, основанных на применении переменного электромагнитного поля. Этому вопросу посвящено большое число работ, в которых рассматривались различные источники в конкретных слоистых средах, исследовалось асимптотическое поведение полей в волновой зоне.

Развитие электронно-вычислительной техники позволило поставить эти работы в направлении создания алгоритмов, позволяющих производить расчеты электромагнитного поля в произвольной слоистой среде. Первой работой в этом направлении была работа А. Н. Тихонова и Д. Н. Шахсуворова [1], где разработан алгоритм расчета поля горизонтального электрического диполя, расположенного на поверхности произвольного n -слоеного проводящего полупространства, что позволило провести на ЭВМ массовый расчет палеток частотного зондирования. В дальнейшем этот алгоритм был несколько улучшен в работах [2—3].

В настоящей статье рассмотрен общий метод расчета электромагнитного поля, возбуждаемого произвольными источниками в слоистой среде с произвольным изменением параметров среды с глубиной, т. е. диэлектрическая проницаемость ϵ , магнитная проницаемость μ и проводимость σ являются произвольными кусочно-дифференцируемыми функциями координаты z .

1. Пусть в слоистом пространстве задано произвольное распределение сторонних токов $\vec{j}(M)$ в некотором объеме V , причем зависимость от времени взята в виде $e^{-i\omega t}$. Тогда электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega \vec{E} + \vec{j}(M), \quad (1)$$

§ 3. ПРИМЕР

Изложенный численный метод решения уравнения вида (1) применялся к уравнению

$$\int_0^1 \ln \left(\frac{1}{|t-s|} \right) \varphi(s) ds = 1, \quad (12)$$

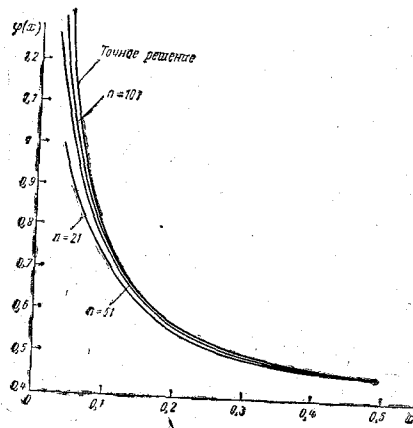


Рис. 1

точное решение которого известно:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi \ln 2 \sqrt{t(1-t)}}$$

Уравнение (12) решалось численно методом саморегуляризации сведением к уравнению (11) (вырезание особенности ядра). При этом особенность решения на концах интервала интегрирования не выделялась, что позволило намного сократить время счета. На рис. 1 приведены кривые точного и приближенного решений для различных порядков решаемой системы. Из рисунка видно, что в исследованных пределах изменения числа n приближенное решение сходится к точному решению поточечно.

В. И. ДМИТРИЕВ

ОБЩИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Расчет и исследование распространения электромагнитных полей в слоистой среде имеют большое значение для широкого круга прикладных задач, в частности для развития теории геофизических методов, основанных на применении переменного электромагнитного поля. Этому вопросу посвящено большое число работ, в которых рассматривались различные источники в конкретных слоистых средах, исследовалось асимптотическое поведение полей в волновой зоне.

Развитие электронно-вычислительной техники позволило поставить эти работы в направлении создания алгоритмов, позволяющих производить расчеты электромагнитного поля в произвольной слоистой среде. Первой работой в этом направлении была работа А. Н. Тихонова и Д. Н. Шахсуворова [1], где разработан алгоритм расчета поля горизонтального электрического диполя, расположенного на поверхности произвольного n -слоистой проводящего полупространства, что позволило провести на ЭВМ массовый расчет палеток частотного зондирования. В дальнейшем этот алгоритм был несколько улучшен в работах [2—3].

В настоящей статье рассмотрен общий метод расчета электромагнитного поля, возбуждаемого произвольными источниками в слоистой среде с произвольным изменением параметров среды с глубиной, т. е. диэлектрическая проницаемость ϵ , магнитная проницаемость μ и проводимость σ являются произвольными кусочно-дифференцируемыми функциями координаты z .

1. Пусть в слоистом пространстве задано произвольное распределение сторонних токов $\vec{j}(M)$ в некотором объеме V , причем зависимость от времени взята в виде $e^{-i\omega t}$. Тогда электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega \vec{\epsilon} \vec{E} + \vec{j}(M), \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = i\omega\mu\bar{H},$$

где $\tilde{\epsilon} = \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость.

Из второго уравнения Максвелла имеем

$$\bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A}; \quad \bar{E} = i\omega\bar{A} + \operatorname{grad} \varphi. \quad (2)$$

Для однозначности выбора векторного и скалярного потенциалов введем аналог условия Лоренца в виде

$$\varphi = \frac{i\omega\mu}{k^2} \operatorname{div} \bar{A},$$

где $k = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu}$ — волновое число среды. Тогда электрическое поле определяется через векторный потенциал:

$$\bar{E} = i\omega \left\{ \bar{A} + \operatorname{grad} \left[\frac{\mu}{k^2} \operatorname{div} \bar{A} \right] \right\}. \quad (3)$$

Подставив (2) — (3) в первое уравнение Максвелла и расписав уравнение для векторного потенциала по компонентам, получим:

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} A_x \right] + \frac{k^2}{\mu} A_x = -j_x,$$

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} A_y \right] + \frac{k^2}{\mu} A_y = -j_y, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{\tilde{\epsilon}} \operatorname{grad} \frac{A_z}{\mu} \right] + \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}\mu} A_z = -\frac{1}{\tilde{\epsilon}} j_z - \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}\mu} \right).$$

Так как $\tilde{\epsilon}$ и μ являются кусочно-дифференцируемыми функциями, то на границах разрыва должны выполняться граничные условия, которые следуют из условия непрерывности тангенциальных составляющих полей:

$$[A_x] = [A_y] = \left[\frac{A_z}{\mu} \right] = 0,$$

$$\left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_x}{\partial z} \right] = \left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A_y}{\partial z} \right] = 0, \quad (5)$$

$$\left[\frac{1}{\tilde{\epsilon}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z}{\mu} \right) + \frac{1}{\tilde{\epsilon}\mu} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \right] = 0.$$

Квадратными скобками обозначен разрыв функций.

Векторный потенциал для произвольного распределения сторонних токов в объеме V может быть представлен через тензор Грина \hat{G} в виде

$$\bar{A}(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \hat{G}(M, M_0) \bar{j}(M_0) dv_{M_0}, \quad (6)$$

где $\hat{G}(M, M_0)$ — тензорная функция источника, имеющая вид

$$\hat{G}(M, M_0) = \begin{pmatrix} G_0(M, M_0) & 0 & 0 \\ 0 & G_0(M, M_0) & 0 \\ \mu(z) \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial x} & \mu(z) \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial y} & \frac{\mu(z)}{\tilde{\epsilon}(z_0)} G_1(M, M_0) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Функции G_0 , g , G_1 являются решением следующих задач:

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} G_0 \right] + \frac{k^2}{\mu} G_0 = -4\pi\delta(r_{MM_0}) \quad (8)$$

с граничными условиями $[G_0] = \left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial G_0}{\partial z} \right] = 0,$

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{\tilde{\epsilon}} \operatorname{grad} g \right] + \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}} g = -G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\tilde{\epsilon}\mu} \right) \quad (9)$$

с граничными условиями $[g] = \left[\frac{1}{\tilde{\epsilon}} \cdot \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}\mu} G_0 \right] = 0,$

$$\operatorname{div} \left[\frac{1}{\tilde{\epsilon}} \operatorname{grad} G_1 \right] + \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}} G_1 = -4\pi\delta(r_{MM_0}) \quad (10)$$

с граничными условиями $[G_1] = \left[\frac{1}{\tilde{\epsilon}} \cdot \frac{\partial G_1}{\partial z} \right] = 0.$

Так как наши функции зависят только от z , z_0 и $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, то можно представить их в виде

$$\begin{aligned} G_0 &= \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \Phi_0(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \\ g &= \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \varphi(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \\ G_1 &= \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \Phi_1(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом функции $\Phi_0(\lambda, z, z_0)$, $\varphi(\lambda, z, z_0)$ и $\Phi_1(\lambda, z, z_0)$ будут, согласно (8) — (10), решениями следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\Phi_0}{dz} \right) - \frac{\eta^2}{\mu} \Phi_0 = 0 \text{ при } z \neq z_0 \quad (12)$$

с граничными условиями

$$[\Phi_0] = 0; \quad \left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\Phi_0}{dz} \right] = -2\Delta(z - z_0),$$

$$\Delta(z - z_0) = \begin{cases} 1 & z = z_0, \\ 0 & z \neq z_0 \end{cases}; \quad \eta = \sqrt{\lambda^2 - k^2}; \quad \operatorname{Re} \eta > 0.$$

Аналогично

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\varphi}{dz} \right) - \frac{\eta^2}{\varepsilon} \varphi = -\Phi_0 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varepsilon \mu} \right) \quad (13)$$

с граничными условиями

$$[\varphi] = \left[\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\varphi}{dz} + \frac{1}{\varepsilon \mu} \Phi_0 \right] = 0, \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\Phi_1}{dz} \right) - \frac{\eta^2}{\varepsilon} \Phi_1 = 0 \quad \text{при } z \neq z_0 \quad (14)$$

с граничными условиями

$$[\Phi_1] = 0; \quad \left[\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\Phi_1}{dz} \right] = -2\Delta(z - z_0).$$

Введем теперь понятие фундаментальной функции слоистой задачи $U_a^\alpha(\lambda, z, z_0)$, которая является решением следующей задачи:

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{a(z)} \cdot \frac{dU_a^\alpha}{dz} \right] - \frac{\eta^2}{a(z)} U_a^\alpha = 0 \quad \text{при } z \neq z_0 \quad (15)$$

с граничными условиями

$$[U_a^\alpha] = -2\alpha\Delta(z - z_0); \quad \left[\frac{1}{a} \cdot \frac{dU_a^\alpha}{dz} \right] = -2(1 - \alpha)\Delta(z - z_0).$$

Из сравнения (15) с (12) — (14) легко видеть, что

$$\Phi_0 = U_\mu^\circ; \quad \varphi = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ U_\varepsilon^1 - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dU_\mu^\circ}{dz} \right\}; \quad \Phi_1 = U_\varepsilon^\circ. \quad (16)$$

Таким образом, задача о электромагнитном поле в слоистой среде при произвольном задании сторонних токов свелась к расчету интегралов от фундаментальной функции.

В случае точечного электрического диполя векторный потенциал (6) определяется выражением

$$\bar{A} = \frac{1}{4\pi} \hat{G}\bar{p}, \quad (17)$$

где \bar{p} — вектор момента электрического диполя.

2. Рассмотрим теперь случай задания произвольного распределения магнитных источников. Для этого мы вначале должны опре-

токов j таково, что выполняется условие

$$\operatorname{div} \bar{j} = 0. \quad (18)$$

В этом случае сторонние токи могут быть определены в виде

$$\bar{j} = \operatorname{rot} \bar{j}_M, \quad (19)$$

где \bar{j}_M и есть распределение плотности магнитных токов. Естественно, что выражение (19) не определяет магнитные токи единственным образом. Обычно рассматривают только частный случай токовой рамки. Тогда, как хорошо известно, ей в соответствие можно поставить магнитный листок с равномерно распределенной плотностью магнитных токов. В общем случае произвольного распределения сторонних токов, подчиняющегося условию (18), такой подход не дает возможности определить распределение магнитных токов. Мы дадим достаточно простое определение магнитных токов для произвольного распределения токов \bar{j} .

Пусть токи \bar{j} заданы в области V , диаметр которой равен D . Тогда введем область V_D , представляющую собой шар диаметром D , в который полностью входит область V . Потребуем выполнения следующих дополнительных условий на функцию распределения магнитного тока \bar{j}_M :

$$\bar{j}_M(M) = 0 \quad \text{при } M \notin V_D \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \bar{j}_M(M) = 0 \quad \text{при } M \in V_D. \quad (20)$$

Тогда при $M \in D$ мы можем определить магнитный ток в виде

$$\bar{j}_M = \operatorname{rot} \bar{I}; \quad \operatorname{div} \bar{I} = 0.$$

Подставляя полученные равенства в (19), получим

$$\operatorname{rot} \bar{j}_M = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{I} = -\Delta \bar{I} = \bar{j} \quad \text{при } M \in V_D \quad (21)$$

с граничным условием

$$\bar{I} = 0 \quad \text{при } M \in S_D,$$

где S_D — поверхность шара V_D .

Так как функция Грина $P_0(M, M_0)$ внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае шаровой области хорошо известна, то мы сразу получаем

$$\bar{I}(M) = \iiint_V \bar{j}(M_0) P_0(M, M_0) d\vartheta_{M_0}. \quad (22)$$

Откуда получаем окончательно распределение магнитных токов

в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{j}}_M(M) &= \text{rot} \int_V \int \int \bar{j}(M_0) P_0(M, M_0) d\vartheta_{M_0} = \\ &= \int_V \int \int [\bar{j}(M_0) \text{grad}_{M_0} P_0(M, M_0)] d\vartheta_{M_0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, произвольному распределению токов \bar{j} , подчиняющемуся условию (18), мы ставим в соответствие магнитный шар, плотность распределения магнитных токов в котором определяется выражением (23). В случае магнитного диполя, т. е. рамки тока I с бесконечно малым радиусом, согласно (23) будем иметь:

$$\bar{j}_M = \bar{m} \delta(r),$$

где $|\bar{m}| = IS$ — магнитный момент рамки площадью S , направленный перпендикулярно плоскости рамки, $\delta(r)$ — дельта-функция.

Дополнительные условия на \bar{j}_M (20) всегда могут быть выполнены за счет подбора функции ψ , с точностью до градиента которой определяется \bar{j}_M , равенством (19).

Введя понятие магнитного тока, можно перейти к определению электромагнитных полей, возбуждаемых произвольным распределением \bar{j}_M . Используя (19), запишем теперь уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{H} &= -i\omega \tilde{\epsilon} \bar{E} + \text{rot } \bar{j}_M, \\ \text{rot } \bar{E} &= i\omega \mu \bar{H}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\bar{E} = \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \text{rot } A^*; \quad \bar{H} = \bar{j}_M - i\omega A^* + \text{grad } \varphi^*. \quad (24)$$

Для однозначности определения магнитных векторного и скалярного потенциалов можно ввести аналог условия Лоренца в виде

$$\varphi^* = -\frac{i\omega \tilde{\epsilon}}{k^2} \text{div} \left(\frac{\bar{A}^*}{\tilde{\epsilon}} \right).$$

Тогда магнитное поле будет равно

$$\bar{H} = \bar{j}_M - i\omega A^* - i\omega \text{grad} \left\{ \frac{\tilde{\epsilon}}{k^2} \text{div} \frac{\bar{A}^*}{\tilde{\epsilon}} \right\}, \quad (25)$$

а уравнение для магнитного векторного потенциала \bar{A}^* будет иметь вид

$$\text{rot} \left\{ \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \text{rot } \bar{A}^* \right\} - \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}} \text{grad} \left\{ \frac{\tilde{\epsilon}}{k^2} \text{div} \frac{\bar{A}^*}{\tilde{\epsilon}} \right\} - \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}} \bar{A}^* = i\omega \mu \bar{j}_M. \quad (26)$$

Заметим, что уравнение (26) переходит в (4), если заменить μ на $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\epsilon}$ на μ и $i\omega \mu \bar{j}_M$ на \bar{j} . Таким образом, решение (26) мы можем сразу написать по аналогии со случаем электрических токов:

$$\bar{A}^* = \frac{i\omega}{4\pi} \int_V \int \int \mu(z_0) \hat{G}^*(M, M_0) \bar{j}_M(M_0) d\vartheta_{M_0}, \quad (27)$$

где тензорная функция источника \hat{G}^* имеет вид

$$\hat{G}^*(M, M_0) = \begin{pmatrix} G_0^*(M, M_0) & 0 & 0 \\ 0 & G_0^*(M, M_0) & 0 \\ \tilde{\epsilon}(z) \frac{\partial g^*(M, M_0)}{\partial x} & \tilde{\epsilon}(z) \frac{\partial g^*(M, M_0)}{\partial y} & \frac{\tilde{\epsilon}(z)}{\mu(z_0)} G_1^*(M, M_0) \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Функции G_0^* , g^* , G_1^* представляются в виде

$$\begin{aligned} G_0^*(M, M_0) &= \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \Phi_0^*(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \\ g^*(M, M_0) &= \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \varphi^*(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \\ G_1^*(M, M_0) &= \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \Phi_1^*(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Функции Φ_0^* , φ^* и Φ_1^* , входящие в выражения (29), как и в электрическом случае, могут быть выражены через фундаментальную функцию:

$$\Phi_0^* = U_\epsilon^0; \quad \varphi^* = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ U_\mu^1 - \frac{1}{\tilde{\epsilon}} \frac{dU_\epsilon^0}{dz} \right\}; \quad \Phi_1^* = U_\mu^0. \quad (30)$$

В случае точечного магнитного диполя векторный магнитный потенциал вместо (27) определяется выражением

$$\bar{A}^* = \frac{i\omega \mu}{4\pi} \hat{G}^* \cdot \bar{m}, \quad (31)$$

где \bar{m} — вектор момента магнитного диполя.

Таким образом, расчет электромагнитных полей в слоистых средах сводится при произвольном распределении источников к вычислению фундаментальной функции.

3. Рассмотрим вопрос о расчете фундаментальной функции,

определяемой из задачи (15). Наиболее удобно воспользоваться идеей прогонки, предложенной в работе [4].

Для этого введем функцию

$$Z(z) = \frac{a(z)U_a^\alpha(z)}{\frac{dU_a^\alpha}{dz}}. \quad (32)$$

Тогда согласно (15) функция $Z(z)$ будет решением уравнения Риккати:

$$a(z)Z'(z) + \eta_{(z)}^2 Z^2(z) = a^2(z). \quad (33)$$

Пусть $a(z)$ и $\eta(z)$ есть кусочно-дифференцируемые функции, причем при $z < 0$ $a(z) = a_0$, $\eta(z) = \eta_0$, а при $z > H$ $a(z) = a_n$ и $\eta(z) = \eta_n$, т. е. параметры среды произвольным образом изменяются на некотором конечном интервале $0 < z < H$. Интервал выбран таким образом, что источник находится внутри слоя $0 \leq z_0 \leq H$. Тогда при $z < 0$ решение уравнения (15) есть

$$U_a^\alpha(z) = U_a^\alpha(z = -0) e^{\eta_0 z} \text{ при } z < 0, \quad (34)$$

аналогично

$$U_a^\alpha(z) = U_a^\alpha(z = H + 0) e^{-\eta_n(z-H)} \text{ при } z > H. \quad (34a)$$

Тогда из (32) имеем

$$Z(z) = \frac{a_0}{\eta_0} \text{ при } z < 0, \quad (35)$$

$$Z(z) = -\frac{a_n}{\eta_n} \text{ при } z > H. \quad (36)$$

Решив уравнение (33) с начальным условием при $z=0$ (функция $Z(z)$ непрерывна) на участке $0 \leq z \leq z_0$, найдем $Z_1(z)$ при $z \leq z_0$; аналогично решив то же уравнение при начальном условии (36) на участке $z_0 \leq z \leq H$, найдем $Z_2(z)$ при $z \geq z_0$. Используя граничные условия задачи (15) при $z=z_0$, получим

$$U_a^\alpha(z_0 + 0) - U_a^\alpha(z_0 - 0) = -2\alpha,$$

$$\frac{U_a^\alpha(z_0 + 0)}{Z_2(z_0)} - \frac{U_a^\alpha(z_0 - 0)}{Z_1(z_0)} = -2(1 - \alpha),$$

откуда получаем

$$U_a^\alpha(z_0 - 0) = 2 \frac{(1 - \alpha) Z_1(z_0) Z_2(z_0) - \alpha Z_1(z_0)}{Z_2(z_0) - Z_1(z_0)}, \quad (37)$$

$$U_a^\alpha(z_0 + 0) = 2 \frac{(1 - \alpha) Z_1(z_0) Z_2(z_0) - \alpha Z_2(z_0)}{Z_2(z_0) - Z_1(z_0)}. \quad (38)$$

Полученные значения U_a^α при $z=z_0 \pm 0$ примем за начальные значения уравнения (32) при известных $Z(z)$; получаем фундаментальную функцию в любой точке в виде: при $z \leq z_0$

$$U_a^\alpha(z) = 2 \frac{(1 - \alpha) Z_1(z_0) Z_2(z_0) - \alpha Z_1(z_0)}{Z_2(z_0) - Z_1(z_0)} \exp \left\{ - \int_z^{z_0} \frac{a(z)}{Z_1(z)} dz \right\}, \quad (39)$$

при $z \geq z_0$

$$U_a^\alpha = 2 \frac{(1 - \alpha) Z_1(z_0) Z_2(z_0) - \alpha Z_1(z_0)}{Z_2(z_0) - Z_1(z_0)} \exp \left\{ \int_{z_0}^z \frac{a(z)}{Z_2(z)} dz \right\}. \quad (40)$$

Очень часто проводятся расчеты полей в средах с кусочно-постоянным заданием параметров. В этом случае рассмотренный алгоритм превращается в простые рекуррентные формулы.

Пусть $a(z) = a_m$; $\eta(z) = \eta_m$ при $z_m < z < z_{m+1}$ ($m = 1, \dots, n-1$), где $z_1 = 0$; $z_n = H$. Причем через точку z_0 , где находится источник, также проводится граница вне зависимости от наличия в этой точке разрыва параметров a и η . Мы будем считать, что источник находится на некоторой l -й границе, т. е. $z_0 = z_l$.

В случае постоянных параметров уравнение Риккати (33) легко решается и мы будем иметь:

при $z_m \leq z \leq z_{m+1} \leq z_l$ ($m = 1, 2, \dots, l-1$)

$$Z_1(z) = \frac{a_m}{\eta_m} \cdot \frac{A_m - B_m e^{-2\eta_m(z-z_m)}}{A_m + B_m e^{-2\eta_m(z-z_m)}}, \quad (41)$$

где

$$A_m = a_m + \eta_m Z_1^m; \quad B_m = a_m - \eta_m Z_1^m; \quad Z_1^m = Z_1(z = z_m).$$

Так как $Z_1^1 = Z_1(0) = \frac{a_0}{\eta_0}$, то (41) дает нам рекуррентную формулу для определения Z_1^{m+1} ; $m = 1, \dots, l-1$:

$$Z_1^{m+1} = \frac{a_m}{\eta_m} \frac{A_m - B_m e^{-2\eta_m h_m}}{A_m + B_m e^{-2\eta_m h_m}}, \quad (42)$$

где $h_m = z_{m+1} - z_m$ — толщина m -того слоя.

Аналогично при $z_l \leq z_m \leq z \leq z_{m+1}$ ($m = l, l+1, \dots, n-1$)

$$Z_2 = -\frac{a_m}{\eta_m} \cdot \frac{C_m + D_m e^{-2\eta_m(z_{m+1}-z)}}{C_m - D_m e^{-2\eta_m(z_{m+1}-z)}}, \quad (43)$$

где $C_m = \eta_m Z_2^{m+1} - a_m$; $D_m = \eta_m Z_2^{m+1} + a_m$; $Z_2^{m+1} = Z_2(z = z_{m+1})$.

Так как мы знаем $Z_2^n = -\frac{a_n}{\eta_n}$, то (43) определяет нам все Z_2^m при

$$Z_2^m = -\frac{a_m}{\eta_m} \cdot \frac{C_m + D_m e^{-2\eta_m h_m}}{C_m - D_m e^{-2\eta_m h_m}} \quad (44)$$

Вычислив все Z_1^m и Z_2^m , мы можем найти фундаментальную функцию $U_a^\alpha(z)$ в любой точке z согласно (39—40). При кусочно-постоянных параметрах среды интегралы, входящие в выражения (39—40), легко вычисляются.

Пусть $z_m \leq z \leq z_{m+1} \leq z_l$, тогда

$$\begin{aligned} -\int_z^{z_l} \frac{\dot{a}(z) dz}{Z_1(z)} &= \int_0^{\eta_m(z-z_m)} \frac{A_m + B_m e^{-2t}}{A_m - B_m e^{-2t}} dt - \sum_{i=m}^{l-1} \int_0^{\eta_i h_i} \frac{A_i + B_i e^{-2t}}{A_i - B_i e^{-2t}} dt = \\ &= \eta_m(z - z_m) + \ln \frac{A_m - B_m e^{-2\eta_m(z-z_m)}}{2\eta_m Z_1^m} - \sum_{i=m}^{l-1} \left\{ \eta_i h_i + \ln \frac{A_i - B_i e^{-2\eta_i h_i}}{2\eta_i Z_1^i} \right\}. \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в (39), получим окончательно фундаментальную функцию в виде:

при $z_m \leq z \leq z_{m+1} \leq z_l$ ($m = 1, 2, \dots, l-1$)

$$\begin{aligned} U_a^\alpha &= \frac{(1-\alpha) Z_1^l Z_2^l - \alpha Z_1^l}{(Z_2^l - Z_1^l) \eta_m Z_1^m} \{A_m e^{\eta_m(z-z_m)} - B_m e^{-\eta_m(z-z_m)}\} \times \\ &\times \prod_{i=m}^{l-1} \frac{2\eta_i Z_1^i e^{\alpha \eta_i h_i}}{A_i - B_i e^{-2\eta_i h_i}} \quad (45) \end{aligned}$$

Аналогично определяется фундаментальная функция при $z_l \leq z_m \leq z \leq z_{m+1}$ ($m = l, l+1, \dots, n-1$)

$$\begin{aligned} U_a^\alpha &= \frac{(1-\alpha) Z_1^l Z_2^l - \alpha Z_2^l}{(Z_2^l - Z_1^l) \eta_m Z_2^{m+1}} \{C_m e^{\eta_m(z_{m+1}-z)} + D_m e^{-\eta_m(z_{m+1}-z)}\} \times \\ &\times \prod_{i=m}^l \frac{2\eta_i Z_2^i e^{-\eta_i h_i}}{C_i + D_i e^{-2\eta_i h_i}} \quad (46) \end{aligned}$$

Таким образом, зная Z_1^m и Z_2^m по формулам (45—46), мы можем определить фундаментальную функцию в любой точке. Используя полученные значения для фундаментальной функции, можно рассчитать поле произвольного источника в любой точке пространства. Рассмотренный алгоритм дает возможность единообразно вне зависимости от типов источников, характера изменения параметров среды производить вычисления как тензорной функции Грина для уравнений Максвелла, так и электромагнитного поля в слоистой среде.

1. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. Метод расчета электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах. «Изв. АН СССР», сер. геофиз., 1956, № 3.
2. Ваньян Л. А. Новый способ определения электромагнитного поля диполя, заземленного на поверхности многослойной изотропной среды. СО АН СССР «Геология и геофизика», 1962, № 12.
3. Дмитриев В. И. Расчет электромагнитного поля в методе частотного зондирования. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. III. Изд-во МГУ, 1965.
4. Годунов С. К., Рябенский В. С. Введение в теорию разностных схем, дополнение И. М., Физматгиз, 1962.

В. И. ДМИТРИЕВ, А. В. ЧЕЧКИН

ОДИН МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АНТЕНН

Настоящая работа посвящена разработке методов решения обратных задач теории антенн, т. е. распределению токов в некоторой области, которое создает желаемое электромагнитное поле.

Классическая электродинамика дает нам соотношение между током с плотностью \vec{j} , который течет в ограниченной области, и полем, создаваемым этим током в дальней зоне. Если временная зависимость предполагается $e^{-i\omega t}$, то поле определяется через функцию

$$\vec{f}(\vec{R}) = \frac{1}{R^2} \int_S [\vec{R} [\vec{j} \vec{R}]] e^{ik \left(\vec{r}, \frac{\vec{R}}{R} \right)} dS \quad (1)$$

по формуле

$$\vec{E} = A \frac{e^{ikR}}{R} \vec{f}(\vec{R}), \quad (2)$$

где A — известная постоянная, k — волновое число, \vec{r} — вектор, соединяющий начало координат с точкой интегрирования, \vec{R} — вектор, идущий от начала координат до точки наблюдения в дальней зоне.

В теории синтеза антенн решается задача: по заданному полю найти область S и ток \vec{j} в ней, который создает это поле. В силу зависимости (2) задавать поле равносильно заданию $\vec{f}(\vec{R})$, поэтому дальнейшее наше внимание будет обращено на интегральное уравнение I рода (1).

Для упрощения вида уравнения (1) введем новые переменные $x = x(\vec{r})$, $z = z(\vec{R})$, функцию $\varphi(x)$, определяемую областью S и током \vec{j} , а также функцию $\tilde{\varphi}(z)$, определяемую областью S , и $\vec{f}(\vec{R})$.

такие, чтобы интегральный вид

$$\tilde{\varphi}(z) = \int_{\sigma} \varphi(x) e^{i(x,z)} dx = F[\varphi], \quad (z, z) \leq \text{const} < \infty, \quad (3)$$

здесь x, z — векторы из вещественного евклидова пространства E_n , размерность которого n совпадает с размерностью первоначальной области S ; σ — ограниченная область E_n с кусочно-гладкой границей Γ , в которую переходит область после замены переменных; (x, z) — скалярное произведение векторов.

Уравнение (3) нетрудно получить в случаях, когда S — линейный отрезок конечной длины [1], когда S — плоская ограниченная область [2] и, наконец, предположив, что вектор \vec{j} имеет одно направление во всех точках S для трехмерной области.

Сразу будем считать, что z — комплексный вектор. Для решения уравнения (3) есть два принципиально разных подхода. Сначала заметим, что оператор F переводит всякое линейное пространство W функций $\varphi(x)$ в соответствующее пространство Z функций $\tilde{\varphi}(z)$. Первый подход заключается в том, что по функции $\tilde{\varphi}_0(z) \in Z$ ищется функция $\varphi_0(x) \in W$, такая, что $\tilde{\varphi}_0(z) = F[\varphi_0]$. Другой подход, которому посвящена настоящая статья, состоит в том, что мы ищем функцию $\varphi_0(x) \in W$, такую, чтобы $\tilde{\varphi}_0(z) = F[\varphi_0]$ обладала определенными интегральными свойствами.

Будем обозначать через $\Phi(\varphi)$ квадратичный функционал в пространстве Z , через $I(\varphi)$ произвольный функционал в пространстве W . Зададимся целью найти вид функционала $I(\varphi)$, такой, чтобы, решая вариационную задачу на экстремум, мы получили функцию $\varphi_0(x)$, для которой $\tilde{\varphi}_0(z) = F[\varphi_0]$ обладала бы данным свойством.

I. Пусть D — ограниченная область в E_n . Рассмотрим функционал в Z :

$$\Phi(\tilde{\varphi}) = \int_D |\tilde{\varphi}(z)|^2 g(z) dz, \quad (4)$$

где $g(z) \geq 0$, $g(z) \in C(D)$. Для определенных $g(z)$ функционал (4) имеет наглядный физический смысл. Это энергия, излучаемая током в данном телесном секторе.

Будем считать, что $\varphi(x) \in W_2^{(m)}$, т. е. нормированному пространству с нормой

$$\|\varphi\|_{W_2^{(m)}}^2 = \int_{\sigma} \left(|\varphi|^2 + \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m} \left| \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 \right) dx. \quad (5)$$

Поставим перед собой задачу: найти максимум функционала

$$I_1(\varphi) = \frac{\Phi(F[\varphi])}{\|\varphi\|_{W_2^{(m)}}^2}. \quad (6)$$

Предположим, что $\varphi(x)$ имеет $2m$ непрерывных производных и на границе Γ области σ принимает значения

$$\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \Big|_{x \in \Gamma} = f_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x),$$

$$l = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad 0 \leq l \leq m-1. \quad (7)$$

Заметим, что максимум $I_1(\varphi) = \lambda < \infty$.

В самом деле, в силу теоремы Планшереля имеем

$$\int_{\sigma} |\varphi(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} |\tilde{\varphi}(z)|^2 dz, \quad (8)$$

поэтому

$$\Phi(F[\varphi]) = \int_D |\tilde{\varphi}(z)|^2 g(z) dz \leq \max_{z \in D} g(z) \int_D |\tilde{\varphi}(z)|^2 dz \leq$$

$$\leq \max_{z \in D} g(z) \int_{E_n} |\tilde{\varphi}|^2 dz = (2\pi)^n \max_{z \in D} g(z) \int_{\sigma} |\varphi(x)|^2 dx \leq$$

$$\leq C \|\varphi\|_{W_2^{(m)}}^2, \quad C = \text{const} < \infty. \quad (9)$$

Уравнение Эйлера нашей вариационной задачи без труда получается:

$$(-1)^m \Delta^m \varphi(x) + \varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \int_{\sigma} G(x-y) \varphi(y) dy \quad (10)$$

с граничными условиями (7), где

$$G(x-y) = \int_D g(z) e^{-i(x-y, z)} dz.$$

II. Пусть $l(\tilde{\varphi})$ — линейный ограниченный функционал в Z , задаваемый функцией $h(z) \in Z$, такой, что,

$$l(\tilde{\varphi}) = \int_{E_n} \tilde{\varphi}(z) \overline{h(z)} dz. \quad (11)$$

Мы опять предполагаем, что $\varphi(x) \in W_2^{(m)}$.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(\tilde{\varphi}) = |l(\tilde{\varphi})|^2. \quad (12)$$

Функционал вида (12) при некоторых $h(z)$ является энергией, излучаемой током в данном направлении.

Также поставим задачу: найти максимум функционала

$$I_2(\varphi) = \frac{\Phi(\tilde{\varphi})}{\|\varphi\|_{W_2^{(m)}}^2}. \quad (13)$$

Предположим, что $\varphi(x)$ имеет $2m$ непрерывных производных и на границе Γ удовлетворяет допустимым граничным значениям (7).

Максимум $I_2(\varphi) = \lambda < \infty$, в самом деле, функционал $l(\tilde{\varphi})$ — ограниченный, поэтому имеем

$$\Phi(\tilde{\varphi}) \leq \|l\|_{L_2}^2 \int_{E_n} |\tilde{\varphi}|^2 dz.$$

Далее, воспользовавшись (8), получим

$$\Phi(\tilde{\varphi}) \leq (2\pi)^n \|l\|_{L_2}^2 \int_{\sigma} |\varphi|^2 dx \leq C \|\varphi\|_{W_2^{(m)}}^2, \quad (14)$$

где $C_1 = \text{const} < \infty$.

III. Напишем уравнение Эйлера для второй вариационной задачи:

$$(-1)^m \Delta^m \varphi(x) + \varphi(x) = \delta \int_{E_n} h(z) e^{-i(x, z)} dz, \quad (15)$$

где $\delta = \frac{1}{\lambda} l(\tilde{\varphi}_{\text{экстр}})$ — комплексная постоянная.

Решение уравнения (15) ищется в области σ с граничными условиями (7).

Заметим еще, что сам функционал $\|\varphi\|_{W_2^{(m)}}^2$ также имеет наглядный физический смысл, так как требование, чтобы $\varphi(x) \in L_2(\sigma)$, означает, что рассматривается ток конечной мощности, а на $\varphi(x) \in W_2^{(m)}$ накладываются еще условия на гладкость.

В пространстве W функций $\varphi(x)$ можно задавать норму различными способами. Приведем пример задачи, приводящей к интегральному уравнению II рода.

III. Пусть норма в W задается числом

$$\|\varphi\|_W^2 = \int_{\sigma} |\varphi(x)|^2 dx + \int_D |F[\varphi]|^2 g(z) dz, \quad (16)$$

где D — область в E_n , $g(z) \in L_2(D)$, $g(z) \geq 0$. Пусть $l(\tilde{\varphi})$ — линейный функционал в $L_2(E_n)$ вида (11).

Найдем максимум функционала

$$I_3(\varphi) = \frac{|l(\tilde{\varphi})|^2}{\|\varphi\|_W^2}. \quad (17)$$

Нетрудно показать, что максимум $I_3(\varphi) = \lambda < \infty$. Уравнение Эйлера для этой задачи будет интегральное уравнение II рода

$$\varphi(x) + \int_{\sigma} G(x-y) \varphi(y) dy = \gamma \int_{E_n} h(z) e^{-i(x, z)} dz, \quad (18)$$

где $G(x-y) = \int_D g(z) e^{-i(x-y)z} dz$, $\gamma = \frac{1}{\lambda} l(\tilde{\varphi}_{\text{экстр}})$ — комплексная постоянная.

Таким образом мы свели, в каком-то смысле, решение уравнения (3) к решению уравнения вида (10), (15) или (18). Вопрос о существовании и единственности решений этих уравнений в настоящей работе мы не будем рассматривать в общем случае. Применим наш метод к решению обратной задачи теории линейной антенны длины l .

Пусть вдоль проводника длины l течет ток $j(\xi)$; тогда поле в дальней зоне определяется функцией $f(\theta)$, называемой диаграммой направленности антенны по полю

$$f(\theta) = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} j(\xi) e^{-ik\xi \cos \theta} d\xi, \quad (19)$$

где ξ — переменная вдоль проводника, θ — угол между направлением проводника и направлением на точку наблюдения в дальней зоне, k — волновое число.

Поле определяется диаграммой направленности следующим образом:

$$E = A \frac{e^{ikR}}{R} \sin \theta f(\theta), \quad (20)$$

где R — расстояние до точки наблюдения, $A = \text{const}$. Приведем уравнение (19) к виду (3); для этого сделаем замену

$$x = \frac{2\pi}{l} \xi, \quad z = -\frac{kl \cos \theta}{2\pi}, \quad (21)$$

$$\varphi(x) = \frac{l}{2\pi} j\left(\frac{lx}{2\pi}\right), \quad \tilde{\varphi}\left(-\frac{kl \cos \theta}{2\pi}\right) = f(\theta).$$

После замены уравнение (19) перейдет в уравнение

$$\tilde{\varphi}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{izx} dx, \quad |z| \leq \frac{kl}{2\pi}. \quad (22)$$

Будем считать, что $\tilde{\varphi}(z)$ задана во всей комплексной плоскости. Пусть $\varphi(x) \in L_2(-\pi, \pi)$, тогда норма $\varphi(x)$

$$\|\varphi\|_{L_2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|^2 dx = \frac{l}{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} |j(\xi)|^2 d\xi \quad (23)$$

имеет смысл мощности тока.

Заметим, что $\tilde{\varphi}(z)$ в этом случае будет целой функцией степени λ с интегрируемым в квадрате модулем.

Рассмотрим функционалы

$$\Phi_1(\tilde{\varphi}) = \int_a^b g(z) |\tilde{\varphi}(z)|^2 dz, \quad (24)$$

$$\Phi_2(\tilde{\varphi}) = |\tilde{\varphi}(z_0)|^2, \quad (25)$$

где $g(z) = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi}{kl} z\right)^2}\right)^3$, имеющие смысл энергии, излучаемой в секторе в первом случае, и в данном направлении во втором случае.

Поставим перед собой физическую задачу: среди токов ограниченной мощности найти тот, который излучал бы наибольшую энергию в данном секторе. Математически это приводит к вариационной задаче на экстремум функционала:

$$I_1(\varphi) = \frac{\Phi_1(\tilde{\varphi})}{\|\varphi\|_{L_2}^2}. \quad (26)$$

Уравнение Эйлера в этом случае будет (10) для $m=0$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y) \varphi(y) dy, \quad (27)$$

где $G(x-y) = \int_a^b g(z) e^{-i(x-y)z} dz$.

Существование решения уравнения (27) следует из того, что ядро $G(x-y)$ определяет ограниченный, положительный, эрмитов оператор. Решение нашей задачи дает собственная функция, отвечающая максимальному собственному значению.

Если мы будем рассматривать излучение энергии в узком секторе в перпендикулярном к антенне направлении, то можно считать, что $g(z) \equiv 1$, $a = -1$, $b = 1$ и уравнение (27) станет

$$\varphi(x) = \mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x-y)}{x-y} \varphi(y) dy. \quad (28)$$

Решением этого уравнения будет известная специальная функция, так называемая «угловая сфероидальная функция», отвечающая максимальному собственному значению.

Другая физическая задача: найти такой ток среди ограниченных по мощности, который излучал бы наибольшую энергию в данном направлении, приводит к вариационной задаче на экстремум функционала

$$I_2(\varphi) = \frac{\Phi_2(\tilde{\varphi})}{\|\varphi\|_{L_2}^2}. \quad (29)$$

В этом случае $\Phi_2(\tilde{\varphi}) = |\tilde{\varphi}(z_0)|^2 = |l(\tilde{\varphi})|^2$, где

$$l(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(z-z_0)}{\pi(z-z_0)} \tilde{\varphi}(z) dz. \quad (30)$$

Формулу (30) можно вывести, если учесть, что из теоремы Винера—Палея следует представление

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(z) e^{-ixz} dz. \quad (31)$$

Эта вариационная задача приводит к уравнению вида (15) для $m=0$:

$$\varphi(x) = \delta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(z-z_0)}{\pi(z-z_0)} e^{-ixz} dz. \quad (32)$$

Решение уравнения (32) легко получается:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{ixz_0}. \quad (33)$$

В заключение отметим, что если рассматривать $\varphi(x) \in W_2^{(m)}$, то наши физические задачи приводят к уравнениям вида (10) и (15). Причем для одномерного случая существование решения уравнения (10) сразу следует из общей теории функций Грина, а для уравнения (15) из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наконец, докажем существование и единственность решения для уравнения (18) в общем случае. Правую часть уравнения (18) обозначим

$$p(x) = \gamma \int_{E_n} h(z) e^{-i(x,z)} dz. \quad (34)$$

По предположению $h(z) \in Z$, поэтому по теореме Винера—Палея получим, что $p(x) \in L_2(\sigma)$, а вне области σ $p(x) \equiv 0$. Ядро $G(x-y)$ в (18) задает ограниченный, положительный, эрмитов оператор, следовательно, однородное уравнение, соответствующее (18), имеет только нулевое решение. Из сказанного по альтернативе Фредгольма немедленно следует существование и единственность решения (18) в пространстве W .

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я. Н., Бахрах Л. Д. Современное состояние теории синтеза антенн. «Радиотехника и электроника», 1963, № 2, стр. 187—205.
2. Зелькин Е. Г. Фазовая диаграмма направленности и задача синтеза антенн. «Радиотехника и электроника», 1963, № 1, стр. 42—52.

РАЗДЕЛ II

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

В. В. НИКОЛЬСКИЙ, Д. И. КОРНИЕНКО, И. П. КОТИК

РАСSEЯНИЕ НА ГИРОТРОПНОМ ТЕЛЕ В ВОЛНОВОДНЫХ СИСТЕМАХ

К задачам рассеяния в волноводе и более сложных полых системах сводятся самые различные объекты радиотехники и радиофизики СВЧ, в том числе уже давно практически освоенные. Однако, как известно, до последнего времени в исследованиях полагались исключительно на эксперимент ввиду сугубо качественных выводов теории; последовательное же применение прямых методов для построения алгоритмов универсального типа началось только в последние годы [2—8]. Один из таких алгоритмов, предложенный ранее без строгих обоснований [1] и прошедший лишь пробную проверку [2], служит основой данной работы, в которой проведено его усовершенствование, принципиальное обоснование (исследование сходимости процесса) и применение к конкретной задаче, представляющей практический интерес.

Объектом численного расчета является прямоугольный волновод с намагниченным ферритом в форме параллелепипеда, представляющий собой гиротропное (гиромагнитное) тело, отличающееся в силу своих диэлектрических свойств (обычно $\epsilon = 10 \epsilon_0$) большой оптической плотностью. Намагниченные ферриты находят сейчас широкое применение в волноводной технике, и решенная задача может рассматриваться как образ очень многих волноводно-ферритных устройств, а составленная программа для ЭЦВМ — служить средством их расчета. Несколько характерных примеров расчета приводится в статье.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим волновод (рис. 1), регулярность которого нарушена присутствием тела V ; свойства его пока не уточняются. Выделив обобщенно-цилиндрическую область V_0 , содержащую V и ограниченную двумя поперечными сечениями S_1 и S_2 , приходим к за-