

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ХIII

СБОРНИК РАБОТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Под редакцией
В. И. ДМИТРИЕВА, А. С. ИЛЬИНСКОГО

Под общим руководством И. С. Березина

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1969

д.
в.
з.
й.
е.
я.
й.
н.
в.
х.
р.
д.
а.
р.
г.
г.
р.
е.
г.
а.
я.
з.

Из содержания Т.13, 1969г.,

- В.И. Дмитриев, Е. В. Захаров.* О численных методах решения не-
которого класса дифракционных задач. **139**
- В.И. Дмитриев, Е. В. Захаров.* Алгоритм решения задачи дифракции
электромагнитных волн на идеально проводящей полосе. **158**
- А. Н. Тихонов, В.И. Дмитриев.* О методах решения обратной задачи
теории антенн. **209**
- А. В. Чечкин.* Метод функциональных пространств для решения
обратной задачи теории антенн. **215**
- А. В. Чечкин.* Исследование решений обратной задачи теории линейной
антенны методом функциональных пространств. **222**
- В. И. Дмитриев.* Магнито-теллурическое поле в тонких неоднородных
слоях. **231**
- А. Н. Тихонов, В. И. Дмитриев.* Влияние поверхностных неодно-
родностей на глубинное магнито-теллурическое зондирование. **237**
- В. И. Дмитриев, Н. В. Гущина.* О глубинном магнито-теллурическом
зондировании при наличии неоднородной идеально проводящей
границы. **243**
- Г. А. Кокотушкин.* О расчете магнито-теллурического поля
Е-поляризации для слоя переменной мощности. **248**

Целью настоящей работы является изучение зависимости решения задачи $U_N(x, z)$ от вида контура C , от x и других параметров задачи.

В заключение мне хочется поблагодарить проф. А. Г. Свешникова за постановку задачи, большое внимание и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. Г. Докт. дисс. МГУ, 1963.
2. Свешников А. Г. К обоснованию метода расчета нерегулярных волноводов. «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 1, стр. 170—179.
3. Свешников А. Г., Моденов В. П. Распространение электромагнитных волн в волноводах с локальным гиротропным заполнением. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. III. Изд-во МГУ, 1965, стр. 364—385.
4. Сул Г. и Уокер Л. Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах. М., ИЛ, 1955.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1966.

РАЗДЕЛ II

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ

В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ

О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ДИФРАКЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Исследование явления дифракции электромагнитных волн всегда было одной из основных задач классической электродинамики, однако интерес к ней в последние годы еще более возрос в связи с проблемами, выдвигаемыми появлением новых направлений в физике и технике. Хотя математически дифракционная задача давно поставлена и формулируется как краевая задача для уравнений Максвелла с определенными условиями на поверхности дифрагирующего тела, до сих пор по существу нет общего метода ее решения для тел с произвольными геометрическими и электрическими параметрами. При этом строгое аналитическое решение дифракционной задачи может быть получено, как известно, в ограниченном числе случаев, причем наиболее простых, что приводит на практике к необходимости обращаться к разного рода идеализациям в исходной постановке задачи или применять различные приближенные методы расчета, для которых нет строгого математического обоснования и неизвестны границы их применимости. Вместе с тем бурное развитие вычислительной математики и техники создало условия для проведения численных расчетов практически важных дифракционных задач. Это в свою очередь приводит к необходимости создания и реализации в виде программ достаточно эффективных и устойчивых алгоритмов расчета.

Эффективным и удобным аппаратом для создания наиболее общих алгоритмов численного решения различных дифракционных задач с точки зрения проведения расчетов на электронных вычислительных машинах оказались интегральные уравнения.

Метод интегральных уравнений как один из основных методов математической теории дифракции применяется достаточно часто и обычно служит для доказательства существования решения соответствующих дифракционных задач [1, 2], либо для их приближенного решения разложением в ряды по прямым или обратным степеням характерного размера тела в долях волнового числа (т. е.

в области низких и высоких частот соответственно) [3]. В некоторых случаях удается получить и аналитическое решение интегральных уравнений, например, для идеально проводящей полуплоскости, расположенной в однородной среде [4]. Метод факторизации позволяет получить решения и некоторых более сложных задач [5]. Но в общем случае метод интегрального уравнения приводит к достаточно сложному векторному уравнению по объему тела или его поверхности. Создание алгоритмов численного решения этих уравнений в произвольном случае, т. е. без использования дополнительной информации об электрических свойствах и конфигурации препятствия, а также о характере первичного поля, практически неосуществимо. Поэтому возникает проблема разработки эффективных, но в то же время достаточно общих алгоритмов для определенных классов дифракционных задач в зависимости от конфигурации дифрагирующего тела и его электрических свойств.

Одним из важных классов задач такого рода является задача дифракции на однородных цилиндрических телах или цилиндрических поверхностях при произвольном первичном поле. Если при этом исходить из общей методики перехода от дифракционной задачи к интегральному уравнению, то на пути создания и реализации в виде программ соответствующих алгоритмов возникают определенные трудности как математического, так и технического характера.

Для интегральных уравнений второго рода, к которым обычно сводятся задачи дифракции на телах с конечной проводимостью, трудности в реализации известных численных методов решения вызваны высокой размерностью области, на которой рассматривается интегральное уравнение, что приводит в конечном итоге к необходимости решать системы линейных алгебраических уравнений очень высокого порядка. При необходимости получить результат с высокой степенью точности аналогичные трудности возникают и при численном решении одномерных интегральных уравнений.

Для интегральных уравнений Фредгольма первого рода, к которым обычно редуцируются задачи дифракции на идеально проводящих, бесконечно тонких экранах, до недавнего времени практически не существовало эффективных численных методов решения. Это обстоятельство связано с некорректной постановкой самой задачи решения такого уравнения. Лишь недавно в результате введенного А. Н. Тихоновым понятия регуляризатора и построения ряда регуляризирующих алгоритмов [6, 7] стало принципиально возможным решение подобных уравнений. Если говорить о том классе интегральных уравнений, который возникает в теории дифракции (идеально проводящие экраны), то здесь появляются дополнительные трудности. Они связаны с необходимостью учета характера поведения искомого решения на ребрах экрана, что не дает возможности непосредственно воспользоваться тем или иным регуляризирующим алгоритмом. Ядра этих уравнений к тому же имеют особенность при совпадении аргументов, что также затруд-

няет достаточно точное их численное решение методами регуляризации.

В Вычислительном центре МГУ на протяжении ряда лет проводятся работы по преодолению указанных трудностей при разработке общих алгоритмов численного решения интегральных уравнений первого и второго рода, возникающих в теории дифракции. В работах [8] и [9] был предложен численный метод решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода для рассматриваемого класса задач, получивший название метода саморегуляризации. Метод основан на априорном предположении, что искомая функция слабо меняется на некотором интервале. Исходное интегральное уравнение редуцируется при этом к интегральному уравнению второго рода, которое затем решаем сведением к системе линейных алгебраических уравнений. Матрица этой системы в силу особенности ядра при совпадении аргументов будет относительно устойчивой (для чего расстояние между узлами не должно быть очень малым). Это в свою очередь означает, что имеется возможность решать задачи лишь для экранов средних по сравнению с длиной волны размеров. Поэтому возникает проблема получения асимптотических формул из этих же интегральных уравнений и смыкания полученных численных решений с асимптотическим (при $\lambda \rightarrow 0$).

В настоящее время в ВЦ МГУ проводятся такие исследования для экранов различной конфигурации. Проведенные и проводимые методические исследования показывают, что метод саморегуляризации позволяет производить расчет различных дифракционных задач для идеально проводящих экранов, в частности для цилиндрической поверхности и поверхностей вращения. Конкретные алгоритмы и некоторые результаты даны в работах [10] и [11] настоящего сборника для идеально проводящих полосы и диска.

При численном решении интегральных уравнений II рода соответствующих задач дифракции электромагнитных волн на телах с конечной проводимостью большое значение имеет понижение размерности интегрального уравнения, которое в общем случае решается в объеме, занимаемом телом. Наиболее успешно эта задача решается для цилиндрических тел (плоских задач), где можно перейти от уравнений второго рода по сечению цилиндра к интегральному уравнению (точнее, к системе интегральных уравнений) первого рода, решаемой методом саморегуляризации. Реализация этого метода проведена в ВЦ МГУ для кругового цилиндра конечной проводимости.

Возможен и другой подход, при котором удается непосредственно исходную дифракционную задачу для однородного цилиндрического тела с конечной проводимостью свести к системе интегральных уравнений второго рода по контуру сечения этого тела [12]. Для цилиндрических тел понижение размерности интегральных уравнений возможно и при произвольном внешнем теле (квazitрехмерная задача) [13]. При этом интегральное уравнение по объему цилиндра редуцируется к двум интегральным уравнениям по сече-

нию цилиндра, ядра которых зависят от некоторого параметра (параметр преобразования Фурье, взятого вдоль образующего цилиндра). Для нашего решения дифракционной задачи в данном случае необходимо решать совокупность интегральных уравнений с последующим численным интегрированием по параметру. Отметим, что аналогичные уравнения, но первого рода (одномерные), получаются в задаче дифракции произвольного электромагнитного поля на цилиндрических, бесконечно тонких, идеально проводящих поверхностях (экрах).

Указанные методы численного решения интегральных уравнений теории дифракции либо непосредственно применимы, либо легко обобщаются на задачи дифракции для тел, расположенных в неоднородной среде. Реализация соответствующих алгоритмов проведена в ВЦ МГУ для случая слоистой плоскопараллельной среды. В частности, метод саморегуляризации позволил получить численное решение интегральных уравнений плоской задачи дифракции на идеально проводящей полосе, погруженной в однородное полупространство, на основе которого удалось провести анализ аномалии электромагнитных полей применительно к различным электромагнитным методам электроразведки. В то же время наличие границ раздела с вычислительной точки зрения сильно осложняет задачу, так как в ядрах интегральных уравнений появляются члены, выражаемые интегралами от быстроосциллирующих функций. Вычисление большого количества таких интегралов с высокой степенью точности требует большого количества машинного времени. Поэтому в случае слоистой среды целесообразно применение метода частичного обращения интегрального оператора. В некоторых случаях этот метод позволяет получить аналитическое (в виде сходящегося ряда) решение задачи. В частности, это возможно для идеально проводящей полуплоскости, расположенной в слоистой среде [15, 16].

Идея метода заключается в следующем [14]. Пусть имеется интегральное уравнение вида

$$K\varphi + P\varphi = F, \quad (*)$$

где φ — неизвестная функция, а K и P — интегральные операторы. Относительно оператора K известно, что он имеет обратный, а его резольвенту обозначим R . Действуя оператором R на уравнение (*), будем иметь

$$\varphi + RP\varphi = RF. \quad (**)$$

При условии, что оператор P достаточно мал по норме, уравнение (**) можно решить методом последовательных приближений, т. е. представить его в виде ряда, сходящегося со скоростью геометрической прогрессии, показатель которой равен $\|RP\|$.

Для задач дифракции обращение оператора K означает решение задачи для тела, расположенного в однородной среде (первичное поле при этом соответствует среде слоистой), а оператор

P учитывает неоднородность среды (наличие границ раздела) и расположение дифрагирующего тела по отношению к границе раздела. Решение уравнения (**) методом последовательных приближений означает последовательный учет влияния границы раздела на характер поведения поля (плотности тока) в теле или на его поверхности. При конкретной реализации данного метода приходится учитывать, что резольвента R известна лишь приближенно (в виде матрицы) и поэтому удобнее строить итерационные процессы непосредственно для уравнения (*).

Таким образом, рассмотренные в настоящей работе методы и алгоритмы позволяют решать большой цикл задач дифракции на цилиндрических телах конечной проводимости или на идеально проводящих, бесконечно тонких цилиндрических поверхностях, расположенных в слоистой среде.

Большинство из этих алгоритмов реализовано или реализуется в настоящее время в ВЦ МГУ, что позволит производить расчеты электромагнитных полей и других характеристик для этого важного класса задач дифракции при произвольной конфигурации сечения и частоты возбуждения электромагнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М., Гостехиздат, 1951.
2. Muller Cl. Grundproblem der mathematischen theorie electromagnetischer Schwingungen. Berlin, 1957.
3. Хенд, Мауэ, Вестпфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
4. Нобл Б. Метод Винера — Хопфа. М., ИЛ, 1962.
5. Вайнштейн Л. А. Метод факторизации и теория дифракции. М., «Сов. радио», 1966.
6. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. ДАН СССР, 1963, т. 151, № 3.
7. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. ДАН СССР, 1963, т. 153, № 1.
8. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Дифракция плоского электромагнитного поля на идеально проводящей полосе, погруженной в слоистую среду. «Изв. АН СССР», сер. физика Земли, 1967, № 5.
9. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма I рода. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.
10. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Алгоритм решения задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей полосе (настоящий сборник).
11. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Дифракция электромагнитных волн, излучаемых вертикальным электрическим диполем на идеально проводящем диске (настоящий сборник).
12. Захаров Е. В., Котик И. П., Сивов А. Н. Об одномерных интегральных уравнениях (настоящий сборник).
13. Дмитриев В. И. Дифракция произвольного электромагнитного поля на цилиндрических телах. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. V. Изд-во МГУ, 1966.
14. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Решение некоторого класса интегральных уравнений на полупрямой. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. III. Изд-во МГУ, 1965.

15. Захаров Е. В., Дмитриев В. И. Дифракция электромагнитных волн на идеально проводящей полуплоскости, погруженной в слоистую среду. «Изв. АН СССР», сер. физика Земли, 1966, № 11.
16. Захаров Е. В. Алгоритм расчета аномалии электромагнитных полей от идеально проводящей полуплоскости, погруженной в проводящее полупространство. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.

А. Г. СВЕШНИКОВ

ДИФРАКЦИЯ НА ЗВЕЗДНОМ ТЕЛЕ В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ (ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ)

Для решения задач математической теории дифракции в случае, когда размеры объекта дифракции соизмеримы с длиной падающей волны, что исключает возможность применять асимптотические методы исследования, основанные на геометрикооптических представлениях, часто используются методы интегральных или функциональных уравнений [1—3]. Однако применение этих методов в случае, когда внешняя среда обладает произвольными переменными характеристиками, связано со значительными трудностями.

В настоящей работе предлагается алгоритм численного решения достаточно общего класса задач, сводящий решение дифракционной задачи к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и дается обоснование предложенного алгоритма. Для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением скалярной задачи дифракции в плоском случае.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу дифракции на теле S , ограниченном замкнутым контуром C скалярного поля, создаваемого источниками, расположенными вне S . Тело S будем считать звездным (существует такая точка O внутри S , что любой луч, проведенный из O , пересекает C только один раз). Пусть на контуре C выполняются импедансные граничные условия, а характеристики материальных свойств среды вне S являются произвольными функциями координат, причем будем считать, что из точки O можно описать окружность C_R достаточно большого радиуса R_0 , содержащую S внутри, вне которой материальные характеристики среды постоянны (рис. 1). Такая постановка задачи достаточно типична для большого круга физических задач. Математическая задача в этом случае сводится к определению вне тела S решения уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом

$$\Delta u + k^2(x, y)u = 0, \quad (1)$$

В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛОСЕ

Как известно, задача дифракции плоских электромагнитных волн на идеально проводящей полосе может быть решена методом разделения переменных. При этом решения представляются в виде рядов по функциям Матье, скорость сходимости которых зависит от относительных размеров полосы.

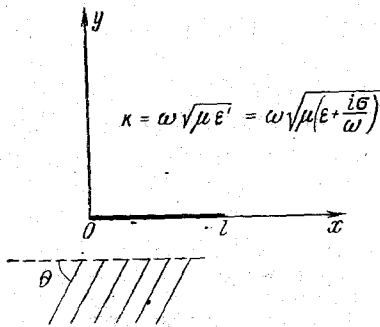


Рис. 1

Численные методы суммирования рядов становятся малоэффективными уже при сравнительно небольших размерах полосы. В то же время эта задача редуцируется к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода относительно плотности полного тока, наводимого на полосе [1]. Решения этих уравнений представляют в виде рядов по возрастающим степеням $l/2$ (l — ширина полосы) при малых l ($l \ll 1$) и по обратным степеням $l/2$ при больших l ($l \gg 1$). О сходимости этих рядов ничего не утверждается, а полосы средних размеров эти методы вообще не охватывают. Непосредственное же численное решение этих уравнений сведением к алгебраической системе считалось невозможным из-за некорректности задачи решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

В настоящей работе рассматривается алгоритм решения задачи дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей полосе, основанный на непосредственном (численном) решении интегральных уравнений путем сведения их к системе линейных алгебраических уравнений. Приведены численные результаты, в основном методического характера.

Пусть из нижнего полупространства $y < 0$ на полосу ($0 \leq x \leq l$, $y = 0$, $-\infty < z < \infty$) падает электромагнитная волна под углом θ к ней (рис. 1)

$$v^0 = E_z^0 = \exp \{ ikx \cos \theta + iky \sin \theta \}$$

или

$$v^0 = H_z^0 = \exp \{ ikx \cos \theta + iky \sin \theta \},$$

где

$$k = e^{i\beta} \kappa, \quad \beta = \frac{1}{2} \arctg \frac{\sigma}{\varepsilon \omega}; \quad \kappa = \left\{ \left(\varepsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega} \right)^2 \right)^{1/4} \left(0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{4} \right) \right\},$$

ε, μ, σ — электрические параметры среды (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$).

Компоненты векторов электрической напряженности $\vec{E} \{ E_x, E_y, E_z \}$ и магнитной напряженности $\vec{H} \{ H_x, H_y, H_z \}$ произвольной поляризации вырезаются через векторы двух типов:

$$1) \text{ E-поляризация } \vec{E} \{ 0, 0, u \}, \vec{H} \left\{ -\frac{i}{\omega \mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{i}{\omega \mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, 0 \right\},$$

$$2) \text{ H-поляризация } \vec{E} \left\{ \frac{i}{\omega \varepsilon'} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, -\frac{i}{\omega \varepsilon'} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, 0 \right\}, \vec{H} \{ 0, 0, v \}.$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца, условиям на бесконечности и на ребрах полосы, а также следующему граничному условию при $y = 0$, $0 \leq x \leq l$:

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Функции u и v представим в виде

$$u(x, y) = u^0(x, y) - \int_0^l \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(kR) j_1(x_0) dx_0, \quad (1)$$

$$v(x, y) = v^0(x, y) - \frac{\pi i}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial y_0} H_0^{(1)}(kR) j_2(x_0) dx_0, \quad (2)$$

где $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля, $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$, $j_1(x_0)$ и $j_2(x_0)$ — неизвестные функции; с точностью до множителя это есть плотности токов, текущих по полосе вдоль и перпендикулярно ребрам соответственно.

Представленные формулами (1) и (2) функции u и v удовлетворяют всем условиям задачи, за исключением граничного условия на полосе. Удовлетворяя это условие, для определения функций $j_1(x_0)$ и $j_2(x_0)$ получим интегральные уравнения вида

$$\int_0^l \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k|x - x_0|) j_1(x_0) dx_0 = e^{ikx \cos \theta}, \quad (3)$$

$$\int_0^t \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(k|x-x_0|) j_2(x_0) dx_0 = \frac{ie^{ikx \cos \theta}}{k \sin \theta} + Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (4)$$

где A и B имеют смысл постоянных, определяемых из условий

$$j_2(0) = j_2(L) = 0.$$

Перейдем в уравнениях (3) и (4) к безразмерным параметрам, для чего сделаем замену переменных $s = \kappa x$, $t = \kappa x_0$.

Будем иметь

$$\int_0^L \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(e^{i\beta}|t-s|) \varphi(s) ds = \exp(ie^{i\beta} \cos \theta), \quad (5)$$

$$\int_0^L \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(e^{i\beta}|t-s|) \varphi(s) ds = \frac{ie^{-i\beta}}{\sin \theta} \exp(ie^{i\beta} t \cos \theta) + C_1 \exp(ie^{i\beta} t) + C_2 \exp(-ie^{i\beta} t), \quad (6)$$

где

$$\kappa l \equiv L, \quad \varphi(s) = \frac{j_1\left(\frac{s}{\kappa}\right)}{\kappa}, \quad \psi(s) = j_2\left(\frac{s}{\kappa}\right)$$

$$C_1 = A\kappa, \quad C_2 = B\kappa.$$

Возможные алгоритмы решения интегральных уравнений рассматриваемого типа были предложены в работе [2]. Здесь мы кратко опишем конкретную реализацию одного из них. Для сведения уравнений (4) и (5) к системам линейных алгебраических уравнений был использован блочный метод, обычно применяемый к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Интеграл интегрирования разбивается на N частей, а в каждом из них искомая функция интерполируется по p узлам и заменяется полиномом $(p-1)$ -й степени. Если после этого переменную t положить равной $(k-1)h$, где h — расстояние между узлами, а $k=1, 2, \dots, [p \cdot N - (N-1)]$, то получим систему алгебраических уравнений $[p \cdot N - (N-1)]$ -го порядка для определения значений функций $\varphi(x_i)$ и $\psi(x_i)$ в узлах интерполирования, т. е. в $[p \cdot N - (N-1)]$ точках. Так как ядра исходных интегральных уравнений имеют логарифмическую особенность при совпадении аргументов, то диагональные элементы матриц будут превосходить остальные элементы и матрица будет относительно устойчивой (для этого шаг h должен быть не очень малым). Ввиду очевидного ограничения на шаг разбиения данный способ не позволяет находить быстроосциллирующие функции, т. е. задача решается лишь для полос средних размеров. При конкретной реализации функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интерполировались полиномом Лагранжа по трем

узлам ($p=3$), а исходные уравнения были сведены к системам 58-го порядка. При этом интерполяция искоемых функций производилась лишь в окрестности особенности ядра, т. е. в области его быстрого изменения, а на остальных участках была применена формула трапеций по той же системе узлов. Отметим, что решение уравнения (4) должно иметь особенность на концах интервала типа $\frac{1}{\sqrt{s}}$, $\frac{1}{\sqrt{L-s}}$, а решение уравнения (5) должно

обращаться в нуль при $s=0$ и $s=L$. Обращение в нуль функции достигается выбором констант C_1 и C_2 , определение которых происходит в процессе решения системы линейных алгебраических уравнений. При этом функция $\psi(s)$ автоматически обращается в нуль на концах интервала. Сложнее учитывать особенность решения уравнения (4), но, как показали проведенные методические исследования, эту особенность можно не выделять, если имеется в виду вычисление электромагнитных полей на некотором расстоянии от полосы (это расстояние должно быть много больше, чем расстояние между узлами квадратурной формулы).

Для оценки погрешности получаемого решения были проведены различные методические расчеты по данному алгоритму. В частности, на известных решениях выяснялась зависимость погрешности приближенного решения как от параметров задачи, так и от характера самого решения. На рис. 2 приведены в сравнении точное и приближенное решения уравнения (5) для различных значений ширины полосы L . (Сплошная линия соответствует точ-

ному решению $\psi(x) = \sin \frac{\pi}{L} x$.) Точное решение, как видно, удовлетворяет граничному условию $\psi(0) = \psi(L) = 0$, а численное решение поэтому автоматически совпадает с ним на концах интервала. Абсолютная погрешность приближенного решения (в соответствующих точках) возрастает с увеличением ширины L и для исследованного диапазона $\left(\frac{\pi}{10} \leq L \leq 4\pi\right)$ составляет в среднем величину

$\delta = 5 \cdot 10^{-3}$ при абсолютной погрешности вычисления правой части порядка 10^{-4} . Иначе обстоит дело, если решение уравнения (4) имеет особенность на концах интервала. Так как рассматриваемый алгоритм не выделяет особенности, а априорно считается, что решение ограничено, то необходимо установить, как влияет это допущение на характер погрешности приближенного решения по всему интервалу. На рис. 3 приведены зависимости точного и приближенного решений для уравнения (4). Очевидно, что погрешность приближенного решения бесконечно велика (в метрике пространства C), если говорить о всем интервале. Поэтому в данном случае имеет смысл говорить о погрешности приближенного решения на некотором интервале, не включающем концов, на которых решение имеет особенность, например на интервале $[h, L-h]$. Такая погрешность составляет величину порядка 10^{-2} и убывает при удалении от края.

Уравнения (4) и (5) были решены с помощью рассмотренного алгоритма для полос различной ширины и исследованы зависимости приближенных решений от угла наклона падающей волны θ . Некоторые из этих зависимостей для случая E - и H -поляризации

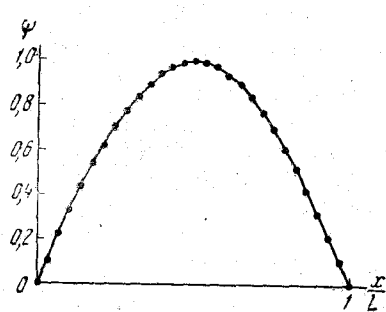


Рис. 2

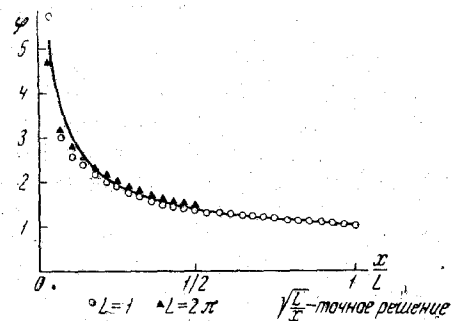


Рис. 3

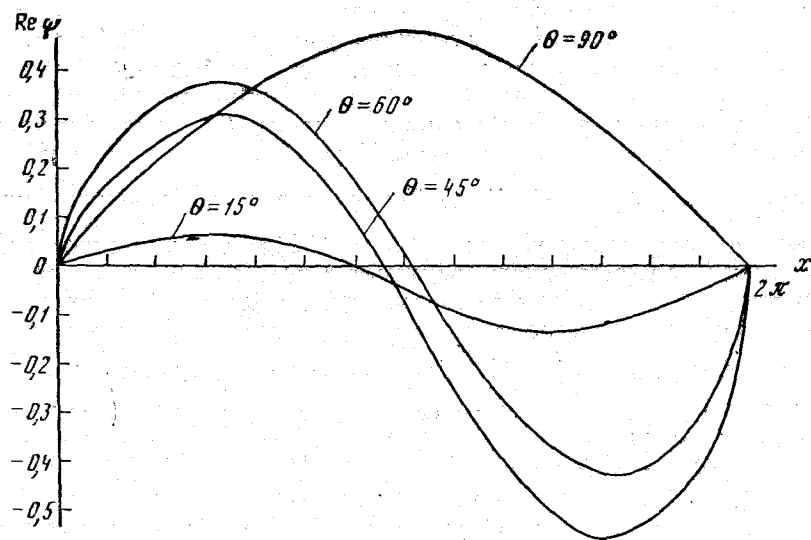


Рис. 4

приведены на рис. 4—7. Графики, приведенные на рис. 4, 5, характеризуют зависимость плотности наводимого на полосе тока от угла падения первичной волны для полосы ширины 2π ($l=\lambda$) при $\beta=0$ ($\theta=90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 15^\circ$).

На рис. 6 и 7 для тех же параметров приведены приближенные значения функции $\varphi(x)$.

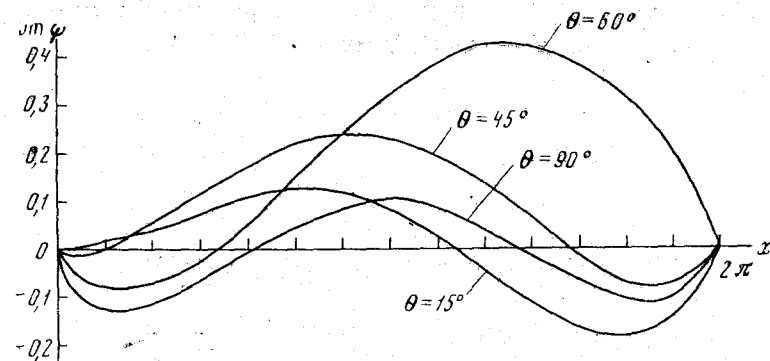


Рис. 5

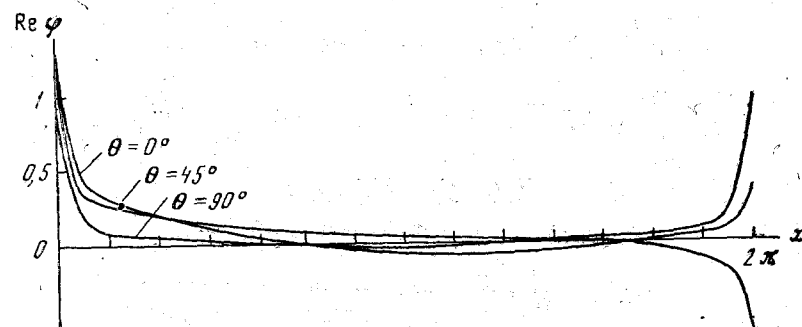


Рис. 6

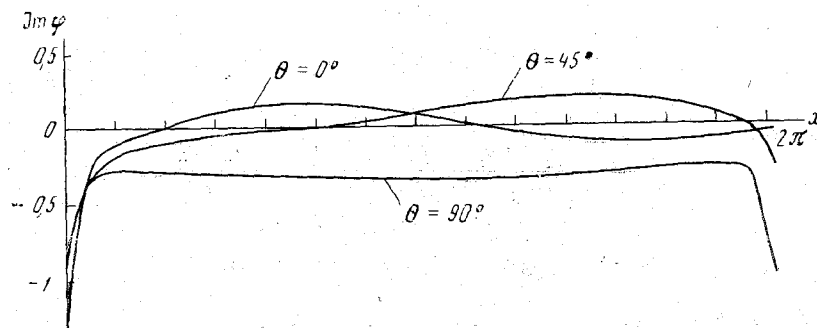


Рис. 7

Используя полученные приближенные решения интегральных уравнений, можно вычислять компоненты электромагнитных полей в соответствии со следующими формулами:

$$E_z = E_0 e_z(x, y) \quad (x \text{ и } y \text{ — безразмерные координаты } \kappa x \text{ и } \kappa y),$$

$$e_z(x, y) = \exp \{ i e^{i\beta} x \cos \theta + i e^{i\beta} y \sin \theta \} -$$

$$- \frac{\pi i}{2} \int_0^L H_0^{(1)}(e^{i\beta} \sqrt{(x-x')^2 + y^2}) \varphi(x') dx', \quad (7)$$

$$H_y(x, y) = - \frac{e^{i\beta} E_0}{\omega \mu} h_y(x, y),$$

$$h_y(x, y) = \cos \theta \exp \{ i e^{i\beta} (x \cos \theta + y \sin \theta) \} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \int_0^L \varphi(x') H_1^{(1)}(e^{i\beta} \sqrt{(x-x')^2 + y^2}) \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} dx', \quad (8)$$

$$H_x(x, y) = \frac{e^{i\beta} E_0}{\omega \mu} h_x(x, y),$$

$$h_x(x, y) = \sin \theta \exp \{ i e^{i\beta} (x \cos \theta + y \sin \theta) \} +$$

$$+ \frac{\pi y}{2} \int_0^L \varphi(x') H_1^{(1)}(e^{i\beta} \sqrt{(x-x')^2 + y^2}) \frac{dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}, \quad (9)$$

$$H_z(x, y) = H_0 h_z(x, y),$$

$$h_z(x, y) = \exp \{ i e^{i\beta} (x \cos \theta + y \sin \theta) \} -$$

$$- \frac{i e^{i\beta} \pi y}{2} \int_0^L \frac{H_1^{(1)}(e^{i\beta} \sqrt{(x-x')^2 + y^2})}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \psi(x') dx', \quad (10)$$

$$E_x(x, y) = - \omega \mu e^{-i\beta} l_x(x, y),$$

$$e_x(x, y) = \sin \theta \{ i e^{i\beta} (x \cos \theta + y \sin \theta) \} -$$

$$- \frac{\pi}{2} \int_0^L \left\{ H_1^{(1)}(e^{i\beta} \sqrt{(x-x')^2 + y^2}) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{i\beta} y^2 H_2^{(1)}(e^{i\beta} \sqrt{(x-x')^2 + y^2})}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \right\} \frac{\psi(x') dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}, \quad (11)$$

$$E_y(x, y) = \omega \mu e^{-i\beta} l_y(x, y),$$

$$e_y(x, y) = \cos \theta \exp \{ i e^{i\beta} (x \cos \theta + y \sin \theta) \} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} e^{i\beta} y \int_0^L H_2^{(1)}(e^{i\beta} \sqrt{(x-x')^2 + y^2}) \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \psi(x') dx'. \quad (12)$$

Необходимые вычисления наиболее просто осуществить, заменяя соответствующие интегралы квадратурными формулами по той же системе узлов, в которых известны значения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (например, квадратурной формулой Симпсона по 29 узлам). При этом, очевидно, расчет полей можно производить с до-

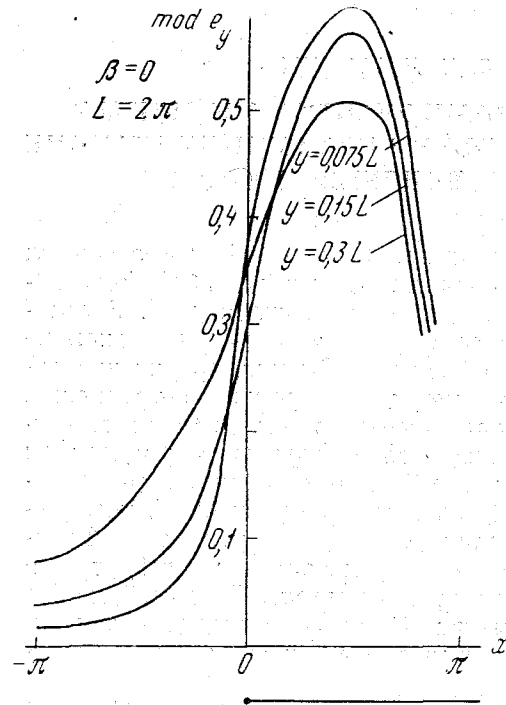


Рис. 8

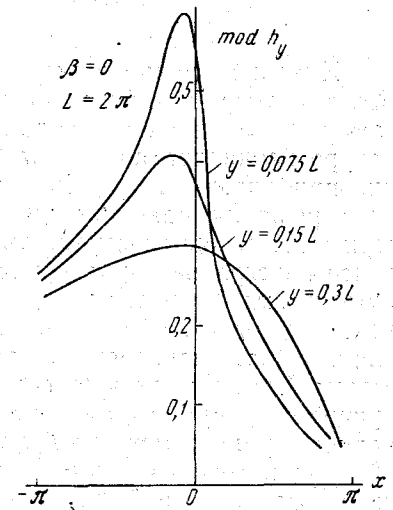


Рис. 9

статочной степенью точности, лишь отойдя от полосы на расстояние много большее, чем шаг квадратурной формулы. Проведенные методические исследования показали, что погрешность вычислений компонент векторов \vec{E} и \vec{H} составляет величину порядка 2% по отношению к величине первичного поля. Описанный способ был реализован на ЭВМ и дал возможность рассчитать компоненты векторов \vec{E} и \vec{H} для различных значений параметров L , θ и β . На рис. 8 и 9 в качестве иллюстраций приведены зависимости поперечных компонент поля (E_y и H_y), которые существуют только в рассеянном поле (в первичном поле эти компоненты отсутствуют).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хенл, Мауэ, Вестпфаль. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
2. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численном решении некоторых интегральных уравнений Фредгольма первого рода. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ АНТЕНН

А. Н. ТИХОНОВ, В. И. ДМИТРИЕВ

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ АНТЕНН

Обычная постановка обратной задачи теории антенн заключается в определении такого распределения тока $\bar{j}(M)$ в пространстве, которое порождает требуемую диаграмму направленности $\bar{P}(\theta, \varphi)$, где θ и φ — угловые координаты точки наблюдения. Решение прямой задачи, т. е. определение диаграммы направленности по заданному распределению тока, является достаточно простой задачей и сводится к действию на ток интегрального оператора $\bar{P}=A[\bar{j}]$. В случае линейной антенны, когда $\bar{j}=\{0, 0, j\}$, имеем

$$P(\theta) = \sin \theta \int_{-l}^l j(z) e^{-ikz \cos \theta} dz, \quad (1)$$

где k — волновое число, θ — угол между антенной и направлением на точку приема.

При решении обратной задачи обычно следующий подход. Так как диаграмма направленности $P(\theta)$ известна, то соотношение (1) является интегральным уравнением Фредгольма I рода для тока $j(z)$, решение которого позволит определить $j(z)$.

При таком подходе к решению обратной задачи не учитывается ряд существенных моментов.

1. Решение уравнения (1) существует для довольно узкого класса правых частей, так называемых реализуемых диаграмм. Заданные диаграммы не принадлежат в большинстве случаев к классу реализуемых диаграмм, поэтому возникает задача приближения заданной диаграммы реализуемой диаграммой, что является достаточно сложной задачей. При этом мы будем всегда иметь приближенное выражение для правой части уравнения (1), что повлечет за собой возникновение новых трудностей.

2. Уравнение (1) является интегральным уравнением Фредгольма I рода, т. е. некорректной задачей. Поэтому малое изменение входных данных (заданной диаграммы) приводит к большим изменениям выходных данных (тока). Так как для диаграмм

7. Бакушинский А. Б. Некоторые вопросы приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма II и I рода. Канд. дисс. МГУ, 1966.
8. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М., ГИТТЛ, 1950.
9. Сеге Г. Ортогональные полиномы. М., ИЛ, 1962.
10. Конторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
11. Емельянов К. В., Ильин А. М. О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода. «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», 1967, т. 7, № 4, стр. 905—910.
12. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1968.

Примечание при корректуре. Последовательность (2) при нескольких иных предположениях изучается также в книге [12], там же приведены ссылки на более ранние работы. Результаты этих работ практически не пересекаются с нашими.

мы направленности мы имеем приближенное выражение, то из уравнения (1) получим распределение тока в виде быстроосциллирующей функции. Причем малые изменения диаграммы будут приводить к резким изменениям распределения тока. Естественно возникает вопрос: какое же распределение тока нужно считать решением обратной задачи?

3. В антенной практике накладываются довольно жесткие ограничения на распределение тока, который должен создать требуемую диаграмму направленности. Эти ограничения не могут быть учтены уравнением (1). Таким образом, все вышесказанное свидетельствует о том, что постановка обратной задачи теории антенн в виде решения уравнения (1) является некорректно поставленной задачей и не отражает всей физической сущности задачи.

Поставим иначе обратную задачу теории антенн. Требуется определить такое распределение тока j , который создает некоторую диаграмму P , наиболее близкую по своим основным характеристикам к заданной диаграмме направленности P_0 при выполнении определенных ограничений на распределение тока j .

Такая формулировка задачи отражает два основных момента:

а) Нет необходимости искать распределение тока, создающего заданную диаграмму направленности (такого тока может и не быть), а мы ищем ток, создающий диаграмму направленности, в некотором смысле близкую к заданной.

б) С другой стороны, мы ищем не любой ток, создающий требуемую диаграмму направленности, а ток, удовлетворяющий определенным ограничениям, регулизирующим задачу, что приводит к ее корректной постановке.

Математически наиболее удобно сформулировать поставленную задачу с помощью функционалов.

Пусть задан функционал

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi_i(P), \quad \text{где } P = A[j], \quad (2)$$

минимум которого реализует выполнение условий на диаграмму направленности. Каждый частный функционал Φ_i связан с каким-либо одним условием на диаграмму направленности; например, близость к заданной диаграмме в некотором интервале углов, максимальное значение в главном лепестке, минимум энергии в боковых лепестках и т. д. Весовые коэффициенты $0 \leq \alpha_i \leq 1$ определяют степень важности выполнения условия, определяемого Φ_i .

Пусть задан функционал

$$\Psi(j) = \sum_{k=1}^n \beta_k \Psi_k(j), \quad (3)$$

минимум которого реализует выполнение определенных условий на распределение тока. Каждый частный функционал Ψ_k связан с

каким-либо одним условием на распределение тока, например ограничение величин тока, производной тока, минимум реактивной мощности и т. д. Весовые коэффициенты $0 \leq \beta_k \leq 1$ определяют степень важности выполнения каждого условия.

Назовем решением обратной задачи теории антенн ток, реализующий минимум функционала:

$$\min \{ \Phi(A[j]) + \delta \Psi(j) \}, \quad (4)$$

где δ — весовой коэффициент, определяющий степень учета ограничений на ток.

Естественно, решение (4) зависит от весовых коэффициентов. Определение оптимальных значений этих коэффициентов производится путем решения задачи для некоторого ряда параметров и выбора наилучшего, точнее, наиболее подходящего с практической точки зрения решения.

В качестве примера мы приведем наиболее простой выбор функционалов для линейной антенны. Для простоты рассмотрим случай симметричной антенны $j(-z) = j(z)$, тогда

$$P(\theta) = 2 \sin \theta \int_0^l j(z) \cos [kz \cos \theta] dz. \quad (5)$$

В качестве диаграммы возьмем

$$Q(t = \cos \theta) = \frac{P(\theta)}{\sin \theta} = 2 \int_0^l j(z) \cos kzt dz. \quad (6)$$

Функционалы выберем в следующем виде. Для ограничения на диаграмму направленности возьмем среднеквадратическое отклонение $Q(t)$ от заданного $Q_0(t)$

$$\Phi(Q) = \int_0^1 \left\{ 2 \int_0^l j(z) \cos kzt dz - Q_0(t) \right\}^2 dt. \quad (7)$$

Если взять при этом

$$Q_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < t_1, \\ q(t) & \text{при } t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{при } t_2 < t < 1, \end{cases} \quad (8)$$

где интервал (t_1, t_2) определяет положение главного лепестка, то получаем

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ 2 \int_0^l j(z) \cos kzt dz - q(t) \right\}^2 dt + 4 \left\{ \int_0^{t_1} \left[\int_0^l j(z) \cos kzt dz \right]^2 dt + \int_{t_2}^1 \left[\int_0^l j(z) \cos kzt dz \right]^2 dt \right\}, \quad (7a)$$

где первый функционал определяет форму главного лепестка, а второй — минимум боковых лепестков.

В качестве функционала ограничений на ток возьмем наиболее простой случай нормы тока в L_2 , т. е.

$$\Psi(j) = \int_0^l j^2(z) dz. \quad (9)$$

Тогда обратную задачу для линейной антенны получим в виде

$$\min \left\{ \int_0^1 \left[2 \int_0^l j(z) \cos kz z dz - Q_0(t) \right]^2 dt + \delta \int_0^l j^2(z) dz \right\}. \quad (10)$$

Сделаем замену переменного $z = lx$ и обозначив $\gamma = kl$, $I(x) = lj(lx)$, $\alpha = \delta/l$, получим

$$\min \left\{ \int_0^1 \left[2 \int_0^1 I(x) \cos \gamma t x dx - Q_0(t) \right]^2 dt + \alpha \int_0^1 I^2(x) dx \right\}. \quad (11)$$

Уравнением Эйлера для функционала (11) будет интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$\alpha I(x) + \int_0^1 I(\xi) K(x, \xi) d\xi = F(x), \quad (12)$$

где

$$K(x, \xi) = 4 \int_0^1 \cos \gamma x t \cos \gamma \xi t dt = 2 \left\{ \frac{\sin \gamma(x-\xi)}{\gamma(x-\xi)} + \frac{\sin \gamma(x+\xi)}{\gamma(x+\xi)} \right\}, \quad (13)$$

$$F(x) = 2 \int_0^1 Q_0(t) \cos \gamma x t dt. \quad (14)$$

При расчетах рассматривался случай (8), где

$$q(t) = 10^5 (t-0,4)^2 \cdot (t-0,6)^2, \quad t_1 = 0,4, \quad t_2 = 0,6.$$

Получаемые при различных коэффициентах α диаграммы направленности и ток $I(x)$ при различных значениях $\gamma = kl$ приведены на рис. 1—4. На рис. 1—2 представлены для $kl = 5\pi$ соответственно диаграммы и токи при различных коэффициентах $\alpha = 0,1; 0,01; 0,001$, т. е. при различных ограничениях на ток. Легко видеть, что, уменьшая α , мы получаем лучшую диаграмму, но ухудшаем поведение тока. На рис. 3—4 приведены диаграммы и токи в случае $kl = \pi$. При такой короткой антенне получить требуемую диаграмму практически невозможно.

В связи с этим ограничения на ток взяты очень малыми: $\alpha = 10^{-4}; 10^{-6}$. При этом ток резко возрастает по величине и становится быстроосциллирующей функцией. Для $\alpha = 10^{-6}$ на рис. 4

в связи с этим приведен график для $l/20$. Естественно, резко возрастает реактивная мощность.

Мы рассмотрели простейшую схему для линейной антенны. При полном расчете необходимо учитывать ограничения на величину реактивной мощности.

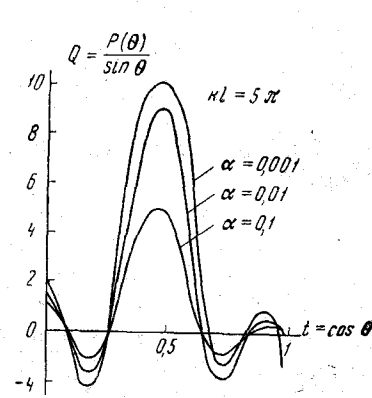


Рис. 1

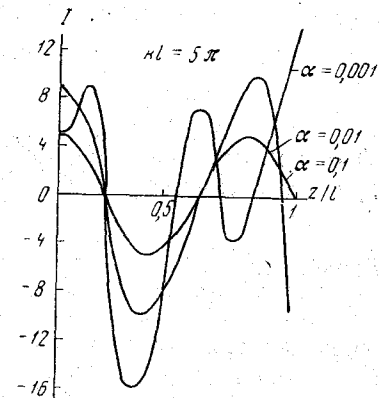


Рис. 2

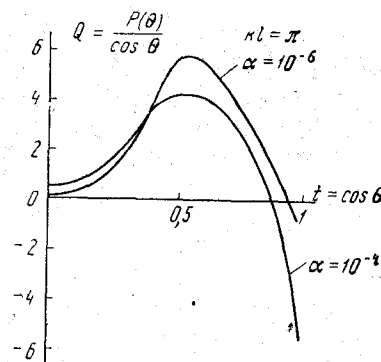


Рис. 3

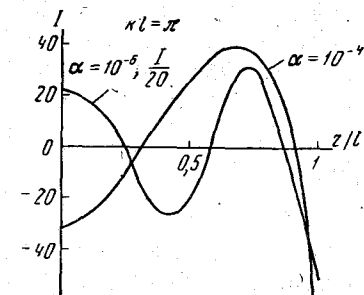


Рис. 4

Рассмотренный метод достаточно общий и позволяет при решении обратной антенной задачи учитывать максимум имеющейся физической информации и возникающих на практике требований.

Изложенный метод функционалов для решения обратных задач теории антенн применим и в случае поиска необходимых ЭДС, которые создают в заданной геометрии антенны токи, необходимые для получения требуемой диаграммы направленности.

Пусть известен алгоритм нахождения тока j в антенне по заданным ЭДС U :

$$j = M(U).$$

При этом ЭДС задаются в конечном числе точек $U = U_k$, где $k = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через j_m ток, получаемый в антенне при

$$U_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = m, \\ 0 & \text{при } k \neq m. \end{cases}$$

Тогда полный ток в антенне будет

$$j = \sum_{m=1}^n U_m j_m. \quad (15)$$

Так как нам известен интегральный оператор, определяющий диаграмму направленности по току в антенне

$$P = A[j],$$

то, обозначив

$$P_m = A[j_m], \quad (16)$$

получим диаграмму направленности, определяемую заданными ЭДС U_m в виде

$$P = \sum_{m=1}^n U_m P_m. \quad (17)$$

Тогда согласно (2) решением обратной задачи будут величины U_m , $m = 1, 2, \dots, n$, реализующие минимум функционала

$$\min \Phi(P) = \min \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi_i \left[\sum_{m=1}^n U_m P_m \right] \right\}. \quad (18)$$

Вместо ограничений на ток имеем теперь ограничения на величину ЭДС:

$$0 \leq |U_m| \leq C_m. \quad (19)$$

Таким образом, все сводится к нахождению минимума функции n -переменных (18). Основой рассмотренного подхода к решению обратной задачи по поиску ЭДС является алгоритм определения тока в антенной системе по заданным ЭДС. Для антенной системы, состоящей из n параллельных произвольно расположенных вибраторов, такой алгоритм разработан в работе [1]. Используя этот алгоритм, мы можем решить задачу по определению поданных на вибраторы ЭДС для создания требуемой диаграммы направленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.

А. В. ЧЕЧКИН

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АНТЕНН

В настоящей статье предлагается новая постановка обратной задачи теории антенн. Вводится понятие пространства диаграмм направленности. По одной желаемой диаграмме направленности можно получать различные решения в зависимости от выбора такого пространства. Предлагаемый метод для некоторых пространств может быть выражен в терминах метода функционалов А. Н. Тихонова и В. И. Дмитриева и наряду с последним является одним из подходов к решению обратных задач теории антенн.

Мы не будем подробно останавливаться на физической стороне вопроса. Электромагнитное поле, создаваемое антенной в дальней зоне, однозначно определяется диаграммой направленности $\psi(z)$. В свою очередь, функция трехмерного пространства — диаграмма направленности — определяется распределением плотности тока в антенне $\varphi(x)$. Связь между диаграммой направленности и плотностью тока можно записать в следующем общем виде:

$$F[\varphi] = \int_{\sigma} \varphi(x) e^{ixz} dx = \psi(z). \quad (1)$$

Здесь через x и z обозначены точки n -мерного вещественного евклидова пространства E_n , xz — скалярное произведение в нем. Интегрирование ведется по ограниченной области $\sigma \subset E_n$ с кусочно-гладкой границей Γ . Параметр z принадлежит ограниченной области $\Omega \subset E_n$.

В прямой задаче теории антенн по току в антенне ищется поле в дальней зоне, т. е. по функции $\varphi(x)$, $x \in \sigma$ находят диаграмму направленности $\psi(z)$, $z \in \Omega$.

В обратной задаче, вообще говоря, ищется плотность тока* в антенне по электромагнитному полю в дальней зоне. Обычная математическая постановка обратной задачи теории антенн такова. Поле в дальней зоне считают заданным диаграммой направленности $\psi(z)$, $z \in \Omega$. Решением обратной задачи называют решение интегрального уравнения (1) относительно $\varphi(x)$. Эта поста-

При этом ЭДС задаются в конечном числе точек $U = U_k$, где $k = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через j_m ток, получаемый в антенне при

$$U_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = m, \\ 0 & \text{при } k \neq m. \end{cases}$$

Тогда полный ток в антенне будет

$$j = \sum_{m=1}^n U_m j_m. \quad (15)$$

Так как нам известен интегральный оператор, определяющий диаграмму направленности по току в антенне

$$P = A[j],$$

то, обозначив

$$P_m = A[j_m], \quad (16)$$

получим диаграмму направленности, определяемую заданными ЭДС U_m в виде

$$P = \sum_{m=1}^n U_m P_m. \quad (17)$$

Тогда согласно (2) решением обратной задачи будут величины U_m , $m = 1, 2, \dots, n$, реализующие минимум функционала

$$\min \Phi(P) = \min \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi_i \left[\sum_{m=1}^n U_m P_m \right] \right\}. \quad (18)$$

Вместо ограничений на ток имеем теперь ограничения на величину ЭДС:

$$0 \leq |U_m| \leq C_m. \quad (19)$$

Таким образом, все сводится к нахождению минимума функции n -переменных (18). Основой рассмотренного подхода к решению обратной задачи по поиску ЭДС является алгоритм определения тока в антенной системе по заданным ЭДС. Для антенной системы, состоящей из n параллельных произвольно расположенных вибраторов, такой алгоритм разработан в работе [1]. Используя этот алгоритм, мы можем решить задачу по определению поданных на вибраторы ЭДС для создания требуемой диаграммы направленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. Метод расчета распределения тока в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.

А. В. ЧЕЧКИН

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АНТЕНН

В настоящей статье предлагается новая постановка обратной задачи теории антенн. Вводится понятие пространства диаграмм направленности. По одной желаемой диаграмме направленности можно получать различные решения в зависимости от выбора такого пространства. Предлагаемый метод для некоторых пространств может быть выражен в терминах метода функционалов А. Н. Тихонова и В. И. Дмитриева и наряду с последним является одним из подходов к решению обратных задач теории антенн.

Мы не будем подробно останавливаться на физической стороне вопроса. Электромагнитное поле, создаваемое антенной в дальней зоне, однозначно определяется диаграммой направленности $\psi(z)$. В свою очередь, функция трехмерного пространства — диаграмма направленности — определяется распределением плотности тока в антенне $\varphi(x)$. Связь между диаграммой направленности и плотностью тока можно записать в следующем общем виде:

$$F[\varphi] = \int_{\sigma} \varphi(x) e^{ixz} dx = \psi(z). \quad (1)$$

Здесь через x и z обозначены точки n -мерного вещественного евклидова пространства E_n , xz — скалярное произведение в нем. Интегрирование ведется по ограниченной области $\sigma \subset E_n$ с кусочно-гладкой границей Γ . Параметр z принадлежит ограниченной области $\Omega \subset E_n$.

В прямой задаче теории антенн по току в антенне ищется поле в дальней зоне, т. е. по функции $\varphi(x)$, $x \in \sigma$ находят диаграмму направленности $\psi(z)$, $z \in \Omega$.

В обратной задаче, вообще говоря, ищется плотность тока* в антенне по электромагнитному полю в дальней зоне. Обычная математическая постановка обратной задачи теории антенн такова. Поле в дальней зоне считают заданным диаграммой направленности $\psi(z)$, $z \in \Omega$. Решением обратной задачи называют решение интегрального уравнения (1) относительно $\varphi(x)$. Эта поста-

новка имеет ряд недостатков. Поскольку желаемые диаграммы направленности, как правило, не являются реализуемыми, то их надо каким-либо способом заменять реализуемыми. Причем приближение желаемых диаграмм реализуемыми сопряжено с известными трудностями из-за сильных ограничений на последние. К тому же имеющиеся методы решения обратных задач в этой постановке связаны с суммированием рядов, что имеет, в свою очередь, слабые стороны.

Надо сказать, что это не единственно возможная математическая постановка обратной задачи теории антенн. Например, другие постановки обратной задачи рассмотрены в работах [3 и 4]. В этой статье мы предлагаем еще одну постановку обратной задачи теории антенн. Разные математические постановки являются различными методами решения рассматриваемой физической задачи.

I. Прежде чем дать новую постановку обратной задачи, разберем подробно один частный случай. Пусть $\varphi(x) \in L_2(\sigma)$. Будем в дальнейшем считать, что ядро e^{ixz} интегрального оператора F рассматривается при всех действительных $z \in E_n$. Тогда, очевидно, всякую $\varphi(x) \in L_2(\sigma)$ оператор F переводит в функцию $\psi(z) = F[\varphi]$ от действительного n -мерного аргумента $z \in E_n$. Причем при $z \in \Omega \subset E_n$ функция $\psi(z)$ является диаграммой направленности, определяющей электромагнитное поле в дальней зоне по плотности тока $\varphi(x)$ в антенне.

Функция $\psi(z)$, как преобразование Фурье от $\varphi(x)$, будет суммируемая с квадратом по E_n . Имеет место равенство Парсевала

$$\|\Psi\|_{L_2(E_n)}^2 = \|F[\Psi]\|_{L_2(E_n)}^2 = (2\pi)^n \|\varphi\|_{L_2(\sigma)}^2. \quad (2)$$

Мы можем сказать, что при $z \in \Omega$ функция $\psi(z)$ определяет реактивную мощность излучения, т. е. величину

$$\|\Psi\|_{L_2(E_n \setminus \Omega)}^2 = \int_{E_n \setminus \Omega} |\psi(z)|^2 dz. \quad (3)$$

Далее предположим, что желаемая диаграмма направленности $f(z) \in L_2(\Omega)$. Сопоставим этой диаграмме функцию $\mathcal{F}(z)$, $z \in E_n$, вида

$$\mathcal{F}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega, \\ 0, & z \notin \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, $\mathcal{F}(z) \in L_2(E_n)$. Наконец, рассмотрим вариационную задачу

$$\min_{\varphi \in L_2(\sigma)} \left\{ \int_{E_n} |F[\varphi] - \mathcal{F}(z)|^2 \mathcal{G}(z) dz \right\}, \quad (5)$$

где

$$\mathcal{G}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega, \\ \alpha = \text{const} > 0, & z \notin \Omega. \end{cases}$$

В общей постановке будет доказано, что задача (5) имеет единственное решение. Перепишем эту задачу в более наглядной форме

$$\min_{\varphi \in L_2(\sigma)} \{ \|F[\Psi] - f(z)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha \|F[\varphi]\|_{L_2(E_n \setminus \Omega)}^2 \}. \quad (6)$$

Здесь оба слагаемых имеют простой смысл. Первое слагаемое определяет отклонение диаграммы направленности от желаемой. Параметр α влияет на величину реактивной мощности излучения.

Мы предлагаем считать решением обратной задачи теории антенн по заданной диаграмме направленности $f(z)$ именно решение задачи (5).

Теперь перейдем к более общей постановке обратной задачи теории антенн. Пусть функции $\varphi(x)$, $x \in \sigma$, определяющие плотности токов в антенне, принадлежат банахову пространству B .

Будем называть пространством диаграмм направленности гильбертово пространство H функций $\mathcal{F}(z)$, $z \in E_n$, подчиняющееся двум условиям.

Для всякой $\varphi(x) \in B$:

1) функция $\psi(z) = F[\varphi]$ принадлежит H , F — ограниченный оператор,

2) существует $M = \text{const} > 0$, такая, что

$$\|\varphi\|_B^2 \leq M \|F[\varphi]\|_H^2. \quad (7)$$

Определение. Будем называть решением обратной задачи теории антенн по заданной диаграмме направленности $\mathcal{F}(z) \in H$ функцию $\varphi(x) \in B$, доставляющую

$$\min_{\varphi \in B} \|F[\varphi] - \mathcal{F}(z)\|_H. \quad (8)$$

Теорема. Для любой заданной диаграммы направленности $\mathcal{F}(z) \in H$ существует единственное решение обратной задачи теории антенн.

Доказательство. Так как пространство B линейное и оператор F линейный, то функции $\psi(z) = F[\varphi]$ образуют линейную систему в H . В силу полноты пространства B и второго условия (7) эта система является полным нормированным пространством с нормой пространства H . Таким образом, функции $\psi(z) = F[\varphi]$ образуют подпространство в H . Из теории гильбертовых пространств известно, что существует единственная ортогональная проекция $\psi_0(z)$ вектора $\mathcal{F}(z)$ на такое подпространство. Из второго условия (7) следует, что по $\psi_0(z)$ найдется единственный элемент $\varphi_0(x) \in B$, такой, что $\psi_0(z) = F[\varphi_0]$. Теорема доказана.

II. Мы подробно разберем важный в теории антенн случай, когда $B = \hat{W}_2^{(l)}(\sigma)$, где пространство $\hat{W}_2^{(l)}(\sigma)$ состоит из функций $\varphi(x)$, $x \in \sigma$, суммируемых с квадратом и имеющих все обобщенные производные порядка $l \geq 0$ [2]. Условия на границе области σ

$$D^k \varphi(x)|_{\Gamma} = 0, \quad 0 \leq k \leq l-1. \quad (9)$$

Оператор D^k означает дифференцирование

$$D^k \varphi(x) = \frac{\partial^k \varphi(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad k = k_1 + \dots + k_n.$$

Норму в $\hat{W}_2^{(l)}(\sigma)$ зададим числом

$$\|\varphi\|_l^2 = \int_{\sigma} \left\{ |\varphi(x)|^2 + \sum_{k=l} |D^k \varphi(x)|^2 \right\} dx.$$

Например, при $l=0$ имеем $\hat{W}_2^{(0)}(\sigma) = L_2(\sigma)$.

В силу того, что функции $\psi(z) = F[\varphi]$, $z \in E_n$, являются преобразованиями Фурье от соответствующих $\varphi(x) \in \hat{W}_2^{(l)}(\sigma)$, функции $z^l \psi(z)$ интегрируемы в квадрате по E_n . Здесь $z^l = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, $l = k_1 + \dots + k_n$.

Используя равенство (2), интегрирование по частям и условия (9), не трудно вывести соотношение

$$(2\pi)^n \|\varphi\|_l^2 = \int_{E_n} \left(1 + \sum_{k=l} z^{2k} \right) |F[\varphi]|^2 dz. \quad (10)$$

В качестве пространства диаграмм направленности возьмем пространство $H = W_2^{(m)}(E_n)$ с нормой

$$\|\mathcal{F}\|_H^2 = \int_{E_n} \left\{ \left(1 + \sum_{k=l} z^{2k} \right) \mathcal{G}(z) |\mathcal{F}(z)|^2 + \sum_{k=m} |D^k \mathcal{F}(z)|^2 \mathcal{H}(z) \right\} dz. \quad (11)$$

Весовые функции $\mathcal{G}(z)$ и $\mathcal{H}(z)$ ограниченные, суммируемые в любой конечной области из E_n и подчиняются неравенствам $\mathcal{G}(z) \geq \varepsilon > 0$, $\varepsilon = \text{const}$, $\mathcal{H}(z) \geq 0$ для $z \in E_n$.

Рассматриваемое пространство удовлетворяет условиям (7). В самом деле, преобразование Фурье $\psi(z) = F[\varphi]$ от $\varphi(x) \in \hat{W}_2^{(l)}(\sigma)$ имеет производные любого порядка, суммируемые с квадратом, а также в силу (10) интегрируемую в квадрате $z^l \psi(z)$. Первое условие выполняется. Второе условие следует из очевидного неравенства

$$(2\pi)^n \varepsilon \|\varphi\|_l^2 \leq \|F[\varphi]\|_H^2. \quad (12)$$

Заметим, что желаемые диаграммы направленности почти всегда могут быть заданы функциями $f(z)$, $z \in \Omega$ из пространства

$W_2^{(m)}(\Omega)$. Поэтому в качестве заданных диаграмм направленности из H мы будем брать функции вида

$$\mathcal{F}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega \\ \psi^*(z), & z \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (13)$$

где $\psi^*(z)$ — некоторая функция $z \in E_n$, для которой существует $\varphi^*(x) \in \hat{W}_2^{(l)}(\sigma)$, такая, что $\psi^*(z) = F[\varphi^*]$. Например $\psi^*(z) \equiv 0$, т. е. $\varphi^*(x) \equiv 0$.

Мы сейчас приведем без вывода уравнение Эйлера задачи (8) для рассматриваемого пространства H и диаграмм направленности вида (13). Чтобы избежать бесконечных интервалов интегрирования, мы в дальнейшем ограничимся случаем, когда

$$\mathcal{G}(z) = \begin{cases} g(z) > 0, & z \in \Omega \\ a = \text{const} > 0, & z \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (14)$$

$$\mathcal{H}(z) = \begin{cases} h(z) \geq 0, & z \in \Omega \\ 0, & z \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Итак, если предположить, что $\varphi(x)$ имеет $2l$ непрерывных производных, то уравнение Эйлера задачи (8) получается следующее:

$$(-1)^l \Delta^l \varphi(x) + \varphi(x) + \int_{\Omega} p(x, y) \varphi(y) dy = \varphi^*(x) + \int_{\Omega} \left\{ q(x, z) f(z) + \sum_{k=m} r(x, z; k) D^k f(z) + s(x, z) \psi^*(z) \right\} dz \quad (15)$$

с условиями (9) на границе σ .

Обозначения:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \text{ — оператор Лапласа,}$$

$$p(x, y) = \frac{1}{\alpha (2\pi)^n} \int_{\Omega} \left\{ \left(1 + \sum_{k=l} z^{2k} \right) [g(z) - a] + h(z) \left(\sum_{k=m} x^k y^k \right) \right\} e^{i(y-x)z} dz,$$

$$q(x, z) = \frac{1}{\alpha (2\pi)^n} g(z) \left(1 + \sum_{k=l} z^{2k} \right) e^{-ixz},$$

$$r(x, z; k) = \frac{1}{\alpha (2\pi)^n} (-ix)^k h(z) e^{-ixz},$$

$$s(x, z) = -\frac{1}{(2\pi)^n} e^{-ixz}.$$

Мы получили, что уравнение Эйлера задачи (8) для рассматриваемого случая является интегро-дифференциальным уравнением (15) с граничными условиями (9). Рассмотренная математическая постановка обратной задачи теории антенн, как мы уже говорили, является одним из методов решения физической задачи. Назовем этот способ решения обратной задачи методом функциональных пространств. Обычно применяемый способ назовем методом интегрального уравнения.

III. Распишем подробно вариационную задачу (8) при $l=0$ для случая, когда диаграмма направленности имеет вид (13), весовые функции пространства H задаются формулами (14)

$$\min_{\varphi \in L_2(\sigma)} \{ \|F[\varphi] - f(z)\|_{W_2^{(m)}}^2(\Omega) + \alpha \|F[\varphi] - \psi^*(z)\|_{L_2(E_n \setminus \Omega)}^2 \}. \quad (16)$$

Предлагаемый в статье метод решения обратной задачи теории антенн для некоторых пространств может быть изложен в терминах метода функционалов А. Н. Тихонова и В. И. Дмитриева [3]. Например, рассмотренный нами случай (6), т. е. задача (16) при $\psi^*(z) \equiv 0$ и $m=0$.

Метод функциональных пространств можно изложить как вариационный метод решения обратной задачи теории антенн [4]. Например, если в качестве функционала $\Phi(\varphi)$ взять

$$\Phi(\varphi) = |(F, F[\varphi])|_H^2 \quad (17)$$

и пространство W функций $\varphi(x)$ определить с нормой

$$\|\varphi\|_W^2 = \|F[\varphi]\|_H^2, \quad (18)$$

то решение обратной задачи, полученное методом функциональных пространств, будет решением вариационной задачи

$$\max_{\varphi \in W} \frac{\Phi(\varphi)}{\|\varphi\|_W^2}. \quad (19)$$

В конце приведем два следствия уравнения (15), т. е. случаи пространств H с весовыми функциями вида (14) и диаграммами направленности вида (13), которые приводят к более простым уравнениям Эйлера.

Следствие 1. Если пространство H определяется условиями $g(z) = \alpha$, $h(z) = 0$, то уравнение Эйлера становится следующей краевой задачей

$$(-1)^l \Delta^l \varphi(x) + \varphi(x) = \varphi^*(x) + \int_{\Omega} \{q(x, z) f(z) + s(x, z) \psi^*(z)\} ds \quad (20)$$

с граничными условиями (9).

Следствие 2. В случае $l=0$, т. е. когда $\varphi(x) \in L_2(\sigma)$, уравнение Эйлера будет интегральным уравнением второго рода

$$\varphi(x) + \int_{\sigma} p(x, y) \varphi(y) dy = \varphi^*(x) + \int_{\Omega} \{q(x, z) f(z) + \sum_{k=m} r(x, z; k) \mathcal{D}^k f(z) + s(x, z) \psi^*(z)\} dz. \quad (21)$$

Пользуюсь случаем выразить благодарность научному руководителю В. И. Дмитриеву за ценные советы и обсуждение многих вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельд Я. Н., Бахрах А. Д. Современное состояние теории синтеза антенн. «Радиотехника и электроника», 1963, № 2, стр. 187—205.
2. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
3. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. О методах решения обратной задачи теории антенн (настоящий сборник).
4. Дмитриев В. И., Чечкин А. В. Один метод решения обратных задач теории антенн. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В. И. ДМИТРИЕВ

МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ТОНКИХ НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ

Исследование характерных особенностей поведения магнито-теллурического поля в тонких слоях имеет большое значение, так как дает нам низкочастотную часть кривой магнито-теллурического зондирования. В случае однородного слоя проводимости σ и мощности h результат хорошо известен. Если такой слой лежит на изолирующем основании, то импеданс в низкочастотной части равен:

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{1}{S}, \quad S = \sigma h. \quad (1)$$

Если же слой лежит на идеально проводящем основании, то имеем

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = -i\omega\mu h. \quad (2)$$

Таким образом, в первом случае по низкочастотной части кривой МТЗ определяется суммарная проводимость s , а во втором случае глубина до идеально проводящего основания h .

Естественно, возникает вопрос о возможности использования асимптотик (1), (2) в случае неоднородности слоя.

Рассмотрим вначале наиболее простой случай слоя постоянной мощности h , проводимость которого непрерывно изменяется вдоль слоя в одном направлении $\sigma(y)$. Границами слоя являются плоскости $z=0$ и $z=h$. Так как в этом случае мы можем считать поле плоским, то общее электромагнитное поле распадается на две поляризации.

I. E -поляризация, когда $\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$, $\vec{H} = \{0, H_y, H_z\}$. При этой поляризации магнитное поле выражается через электрическое:

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (3)$$

Для иллюстрации влияния параметра γ на форму главного лепестка приведем решения обратной задачи для случаев $\alpha=1, \beta=1, \gamma=0$ (кривая 5) и $\alpha=1, \beta=1, \gamma=1$ (кривая 6) на рис. 9. Соответствующие модули диаграмм направленности изображены на рис. 9.

Если мы захотим с помощью линейной антенны длины 3λ создать диаграмму направленности с более узким главным лепестком, например,

$$f(z) = \begin{cases} 1, & |z| \leq 0,1, \\ 0, & 0,1 < |z| \leq 3, \end{cases} \quad (22)$$

то столкнемся со следующими трудностями.

При одновременном $\alpha=\beta, \gamma=0$ увеличении параметров α и β мы не получим решения с большим п. н. и., чем 0,12 (рис. 10).

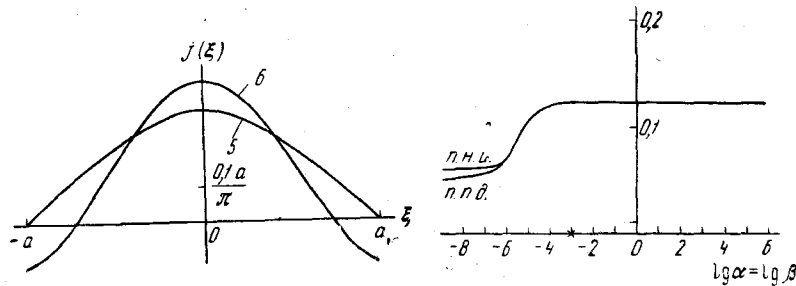


Рис. 9

Рис. 10

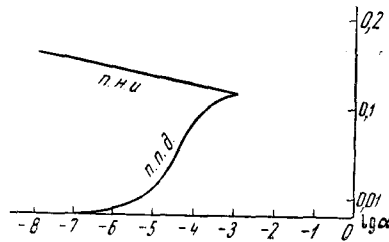


Рис. 11

Мы можем увеличить п.н.и. решения, но при этом очень быстро падает п.п.д. Так, на рис. 11 изображены п.п.д. и п.н.и. при $\beta=0,001, \gamma=0$ в зависимости от α . На рисунке хорошо видно, что небольшое увеличение п.н.и. влечет резкое падение п.п.д.

Пользуюсь случаем поблагодарить В. И. Дмитриева за помощь и большое внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зелкин Е. Г. Фазовая диаграмма направленности и задача синтеза антенн. «Радиотехника и электроника», 1963, № 1, стр. 42.
2. Чечкин А. В. Метод функциональных пространств для решения обратной задачи теории антенн (настоящий сборник).

А. В. ЧЕЧКИН

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В статье подробно рассматривается «метод функциональных пространств» в применении к обратной задаче теории линейной антенны. Приводятся численные результаты решения обратной задачи, полученные на ЭВМ в ВЦ МГУ. Исследуются зависимости диаграмм направленности от выбора функциональных пространств.

1. Рассмотрим линейную антенну длины $2a$. Пусть плотность тока в ней будет $j(\xi)$. Тогда электромагнитное поле в дальней зоне определяется функцией $N(\cos\theta)$, зависящей только от угла θ между направлением линейной антенны, т. е. осью ξ и направлением на точку наблюдения. Функция $N(\cos\theta)$ называется диаграммой направленности антенны. Эта функция определяется плотностью тока $j(\xi)$ по формуле

$$N(\cos\theta) = \int_{-a}^a j(\xi) e^{-ik\xi\cos\theta} d\xi, \quad (1)$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число [1].

Мы будем заниматься обратной задачей теории линейной антенны. Удобно сделать в формуле (1) замену переменных и ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} \xi, & z &= \frac{-ka}{\pi} \cos\theta, \\ \varphi(x) &= \frac{\pi}{2} j(\xi), & \psi(z) &= N(\cos\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда соотношение (1) примет вид

$$F[\varphi] = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{ixz} dx = \psi(z); \quad (3)$$

здесь параметр z — действительный и $|z| \leq \Omega = \frac{ka}{\pi}$. Мы сразу ограничимся рассмотрением случая, когда $\varphi(x) \in L_2(\pi)$.

Будем считать, что ядро e^{ixz} интегрального оператора F определено для всех действительных z , т. е. функция $\psi(z) = F[\varphi]$ задана на всей числовой оси для любой $\varphi(x)$. Отметим, что при $|z| \leq \Omega$ эта функция определяет диаграмму направленности, а при $|z| > \Omega$ она характеризует с некоторой точки зрения функцию $\varphi(x)$. Например, определяет реактивную мощность излучения тока $\varphi(x)$, т. е. величину $\|F[\varphi]\|_{L_2(x \setminus \Omega)}^2 = \int_{-\Omega}^{\Omega} |\psi(z)|^2 dz + \int_{\Omega}^{\infty} |\psi(z)|^2 dz$. Поэтому функцию $\psi(z) = F[\varphi]$, $z \in (-\infty, \infty)$ мы будем называть характеристикой тока $\varphi(x)$.

Пусть желаемая диаграмма направленности $f(z)$, $|z| \leq \Omega$ принадлежит пространству $W_2^{(1)}(\Omega)$. Мы для конкретности рассмотрим в статье случай, когда $f(z) = 0$ при $\omega < |z| \leq \Omega$, $\omega > 0$, т. е. будем считать областью «главного лепестка» отрезок $[-\omega, \omega]$. Решение обратной задачи теории линейной антенны мы ищем не по желаемой диаграмме направленности $f(z)$, а скорее по характеристике, соответствующей этой диаграмме, т. е. по функции $\mathcal{F}(z)$, $z \in (-\infty, \infty)$, которую мы зададим формулой

$$\mathcal{F}(z) = \begin{cases} f(z), & |z| \leq \omega, \\ 0, & |z| > \omega. \end{cases} \quad (4)$$

В статье [2] рассматривалось некоторое гильбертово пространство H , названное там пространством заданных диаграмм направленности. Здесь мы будем его называть пространством характеристик.

Итак, новая постановка обратной задачи теории линейной антенны [2]. Решением обратной задачи по заданной характеристике $\mathcal{F}(z) \in H$ называется функция $\varphi(x) \in L_2(\pi)$, доставляющая минимум

$$\min_{\varphi \in L_2(\pi)} \|F[\varphi] - \mathcal{F}(z)\|_H^2. \quad (5)$$

В этой постановке всегда существует единственное решение обратной задачи [2].

В настоящей статье мы рассмотрим следующее пространство характеристик H . Это функции $\mathcal{F}(z)$, $z \in (-\infty, \infty)$ из пространства $W_2^{(1)}(\infty)$ с нормой

$$\|\mathcal{F}\|_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{|\mathcal{F}(z)|^2 \mathcal{G}(z) + |\mathcal{F}^{(1)}(z)|^2 \mathcal{H}(z)\} dz, \quad (6)$$

$$2\text{паф}(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{G}(x, y) \varphi(y) dy = \int_{-\omega}^{\omega} \{f(z) + \gamma(-ix)f^{(1)}(z)\} e^{-ixz} dz, \quad (19)$$

$$\mathcal{G}(x, y) = 2\omega(1 - \beta + \gamma xy) \frac{\sin \omega(x-y)}{\omega(x-y)} + 2\Omega(\beta - \alpha) \frac{\sin \Omega(x-y)}{\Omega(x-y)}.$$

Уравнение (19) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Покажем, что для любого $f(z) \in W_2^{(1)}(\omega)$ существует единственное решение уравнения (19) в пространстве $L_2(\pi)$. Во первых, однородное уравнение

$$2\text{паф}(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{G}(x, y) \varphi(y) dy = 0 \quad (20)$$

имеет только нулевое решение в $L_2(\pi)$. В самом деле, пусть $\varphi(x) \in L_2(\pi)$ удовлетворяет (19), тогда умножим уравнение (20) скалярно в $L_2(\pi)$ на $\varphi(x)$. Удобно воспользоваться формулой записи уравнения (20) подобно форме уравнения (18). В результате получим

$$\|F[\varphi]\|_{W_2^{(1)}(\omega)}^2 + \beta \|F[\varphi]\|_{L_2(\Omega \setminus \omega)}^2 + \alpha \|F[\varphi]\|_{L_2(\infty \setminus \Omega)}^2 = 0. \quad (21)$$

Из уравнения (21) немедленно следует, что $\|F[\varphi]\|_{L_2(\infty)}^2 = 0$. Воспользовавшись равенством Парсеваля (17), получим $\varphi(x) = 0$. Во-вторых, правая часть уравнения (19) очевидно принадлежит $L_2(\pi)$. Отсюда по альтернативе Фредгольма получаем, что уравнение Эйлера задачи (7) имеет единственное решение в $L_2(\pi)$ для любой функции f .

О решении уравнения (19) можно сказать больше. Если $f(z)$ будет кусочно-непрерывно дифференцируемой функцией на $[-\omega, \omega]$, то наше решение будет бесконечно дифференцируемой функцией на $[-\pi, \pi]$. В этом случае наряду с ядром $\mathcal{G}(x, y)$ и правая часть уравнения (19) будет бесконечно дифференцируемой функцией на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Реализация решения уравнения (19) на ЭВМ не имеет особых трудностей, поэтому мы сразу приведем результаты счета. Для удобства исследования решений введем два показателя, которые помогут выяснить характер зависимости этих решений от параметров α, β, γ .

Показатель полезного действия антенны

$$\text{п. п. д.} = \frac{\int_{-\omega}^{\omega} |F[\varphi]|^2 dz}{2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)|^2 dx} \quad (19)$$

Показатель направленности излучения антенны

$$\text{п. н. и.} = \frac{\int_{-\omega}^{\omega} |F[\varphi]|^2 dz}{\int_{-\Omega}^{\Omega} |F[\varphi]|^2 dz} \quad (20)$$

Рассматривалась линейная антенна длины 3λ . В качестве желаемой диаграммы направленности мы брали сначала функцию

$$f(z) = \begin{cases} 1, & |z| \leq 1, \\ 0, & 1 < |z| \leq 3. \end{cases} \quad (21)$$

Зависимость п.п.д. и п.н.и. для случая $\alpha = \beta, \gamma = 0$ изображена на рис. 1. Видно, что нельзя получить желательное увеличение п.н.и. более чем 0,9. Звездочками на рис. 1 отмечены те значения

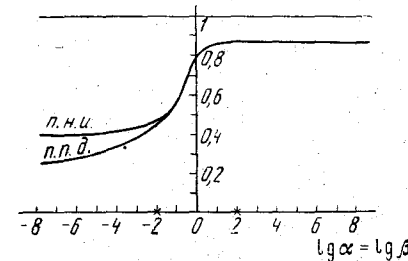


Рис. 1

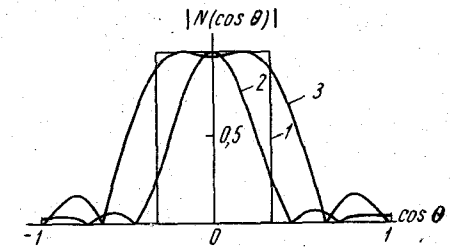


Рис. 2

параметров, для которых дальше приведены соответствующие плотности токов и диаграммы направленности. На рис. 3 приведены решения задачи (7) для случаев $\alpha = \beta = 100, \gamma = 0$ (кривая 2) и $\alpha = \beta = 0,01, \gamma = 0$ (кривая 3). Плотности токов представляют действительные четные функции, как и следовало ожидать из-за формы желаемой диаграммы направленности.

Наряду с задачей (7) мы решали и прямую задачу теории линейной антенны. По решению обратной задачи находили соответствующую диаграмму направленности. В случае, когда плотность токов представляет действительную четную функцию, диаграмма направленности, создаваемая ею, тоже будет действительной функцией. Поэтому мы ограничимся изображением в дальнейшем только модулей диаграммы направленности. Все приведенные в статье диаграммы направленности таковы, что $\max N(\cos \theta) = 1$, затем меняют знак после каждого своего нуля.

На рис. 2 приведены модули диаграмм направленности в случаях $\alpha = \beta = 100, \gamma = 0$ (кривая 2) и $\alpha = \beta = 0,01, \gamma = 0$ (кривая 3). Кривая 1 на рис. 2, 5, 8 изображает желаемую диаграмму направ-

весовые функции здесь задаются следующим образом:

$$\mathcal{G}(z) = \begin{cases} 1, & |z| \leq \omega, \\ \beta > 0, & \omega < |z| \leq \Omega, \\ \alpha > 0, & |z| > \Omega, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(z) = \begin{cases} \gamma \geq 0, & |z| \leq \omega, \\ 0, & |z| > \omega, \end{cases}$$

где α, β, γ — постоянные, определяющие пространство характеристик H .

Если функция $\mathcal{F}(z) \in H$ имеет вид (4), то решение обратной задачи теории линейной антенны ищется из вариационной задачи (5), имеющей наглядный вид

$$\min_{\varphi \in L_2(\pi)} \{ \|F[\varphi] - f(z)\|_{W_2^{(1)}(\omega)}^2 + \beta \|F[\varphi]\|_{L_2(\Omega \setminus \omega)}^2 + \alpha \|F[\varphi]\|_{L_2(\infty \setminus \Omega)}^2 \}. \quad (7)$$

Как видно, первое слагаемое в (7) показывает величину отклонения формы «главного лепестка» от желаемой $f(z)$. Второе определяет уровень «боковых лепестков». Наконец третье слагаемое определяет величину реактивной мощности излучения.

Прежде чем приступить к решению задачи (7), докажем принципиальную теорему.

Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ и $\gamma \geq 0, \beta > 0$ по любой $f(z) \in W_2^{(1)}(\omega)$ найдется $\alpha_0(\varepsilon, \gamma, \beta, f(z)) > 0$, такое, что при $\alpha \leq \alpha_0$ решение задачи (7) $\varphi_\alpha(x) \in L_2(\pi)$ удовлетворяет неравенству

$$\|F[\varphi_\alpha] - f(z)\|_{W_2^{(1)}(\omega)} < \varepsilon. \quad (8)$$

Доказательство. Мы не будем подробно разбирать некоторые простые факты. Итак, для $f(z) \in W_2^{(1)}(\omega)$ найдется гладкая функция $f_0(z) \in C^\infty(\Omega)$, т. е. $|z| \leq \Omega$, удовлетворяющая одновременно двум неравенствам:

$$\|f_0(z) - f(z)\|_{W_2^{(1)}(\omega)} < \frac{\varepsilon}{5}, \quad (9)$$

$$\|f_0\|_{L_2(\Omega \setminus \omega)} < \frac{\varepsilon}{5\beta}. \quad (10)$$

Затем по $f_0(z) \in C^\infty(\Omega)$ найдется целая функция $\Psi_0(z)$ конечной степени с интегрируемым в квадрате модулем по вещественной оси, подчиняющаяся также двум условиям:

$$\|\Psi_0(z) - f_0(z)\|_{W_2^{(1)}(\omega)} < \frac{\varepsilon}{5}, \quad (11)$$

$$\|\Psi_0(z) - f_0(z)\|_{L_2(\Omega \setminus \omega)} < \frac{\varepsilon}{5\beta}. \quad (12)$$

В качестве такой функции $\Psi_0(z)$ можно, например, взять функцию вида

$$\psi(z) = \frac{P_n(z) \sin \pi z}{N \prod_{l=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)}. \quad (13)$$

Здесь $P_n(z)$ — многочлен степени $n \leq 2N$ [1].

Параметр $\alpha_0(\varepsilon, \gamma, \beta, f(z))$ определим числом

$$\alpha_0 = \frac{\varepsilon}{5 \| \varphi_0 \|_{L_2(\infty)}^2}. \quad (14)$$

Заметим, что $\psi_0(z)$ является реализуемой правой частью (3), т. е. существует $\varphi_0(x) \in L_2(\pi)$, такая, что $\psi_0(z) = F[\varphi_0]$.

Если пространство H определено параметрами $\alpha, \beta, \gamma, \alpha \leq \alpha_0$, то для решения $\varphi_\alpha(x) \in L_2(\pi)$ задачи (7) в этом пространстве справедливо неравенство

$$\|F[\varphi_\alpha] - f(z)\|_{W_2^{(1)}(\omega)}^2 \leq \min_{\varphi \in L_2(\pi)} \|F[\varphi] - \mathcal{F}(z)\|_H^2 \leq \|F[\varphi_0] - \mathcal{F}(z)\|_H^2. \quad (15)$$

Утверждение теоремы нетрудно получить последовательным использованием неравенств (15), (12), (11), (10), (9) и равенства (14).

II. Теперь мы можем непосредственно заняться решением задачи (7). Перепишем вариационную задачу (7) в виде

$$\min_{\varphi \in L_2(\pi)} \{ (1 - \beta) \|F[\varphi]\|_{L_2(\omega)}^2 + \gamma \|F[\varphi]\|_{L_2^{(1)}(\omega)}^2 + (\beta - \alpha) \|F[\varphi]\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha \|F[\varphi]\|_{L_2(\infty)}^2 - (f, F[\varphi])_{W_2^{(1)}(\omega)} - (F[\varphi], f)_{W_2^{(1)}(\omega)} \}. \quad (16)$$

Напомним известное свойство преобразования Фурье

$$\|F[\varphi]\|_{L_2(\infty)}^2 = 2\pi \|\varphi\|_{L_2(\pi)}^2. \quad (17)$$

Теперь нетрудно выписать уравнение Эйлера задачи (16).

$$(1 - \beta) F_{L_2(\omega)}^* F[\varphi] + \gamma F_{L_2^{(1)}(\omega)}^* F[\varphi] + (\beta - \alpha) F_{L_2(\Omega)}^* F[\varphi] + 2\pi \varphi(x) = F_{W_2^{(1)}(\omega)}^* [f]. \quad (18)$$

Нахождение сопряженных операторов F^* в соответствующих пространствах не вызывает больших трудностей, поэтому мы сразу напишем окончательный вид уравнения Эйлера:

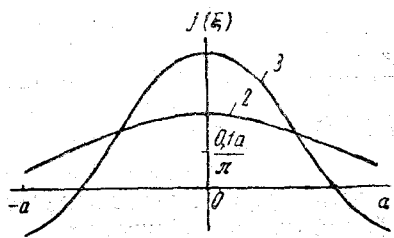


Рис. 3

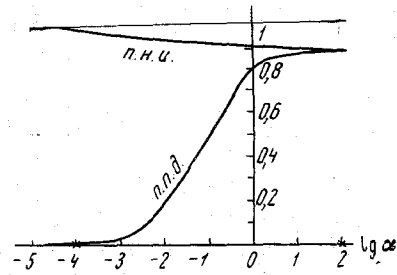


Рис. 4

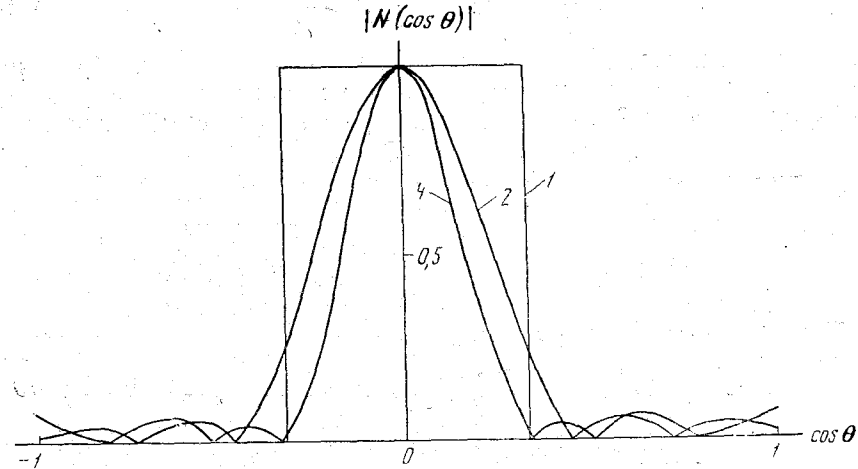


Рис. 5

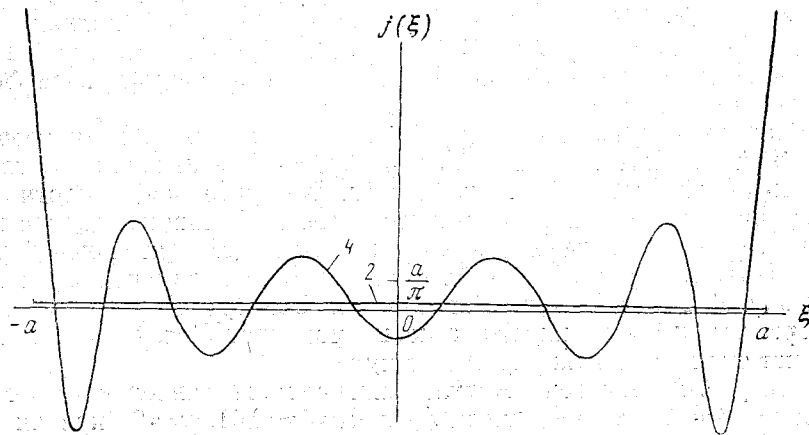


Рис. 6

ленности. Как видно, улучшение показателей решения обратной задачи связано с отклонением диаграммы направленности от желаемой в районе главного лепестка $|\cos \theta| \leq \frac{1}{3}$.

По нашей, желаемой, диаграмме направленности можно получить решение с большим п. н. и., например, уменьшением параметра α при фиксированном β . На рис. 4 изображены оба показателя решения обратной задачи при $\beta = 100$, $\gamma = 0$ в зависимости от α . Существенное увеличение п.н.и. решения можно достигнуть за счет резкого падения п.п.д.

Решения обратной задачи для случаев, отмеченных звездочками на рис. 4, приведены на рис. 6. Кривая 2 соответствует параметрам $\alpha = 100$, $\beta = 100$, $\gamma = 0$. Кривая 4 — параметрам $\alpha = 0,0001$, $\beta = 100$, $\gamma = 0$. Видно, какой ценой мы достигаем увеличения п.н.и. антенны. Соответствующие этим решениям модули диаграмм направленности приведены на рис. 5.

Увеличение п. н. и. решения обратной задачи можно достигнуть также увеличением β при фиксированном α . Так, на рис. 7 изобра-

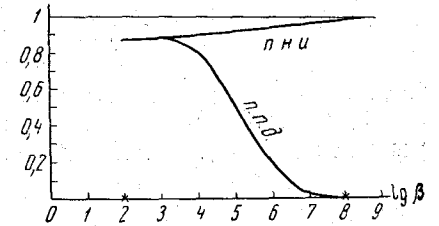


Рис. 7

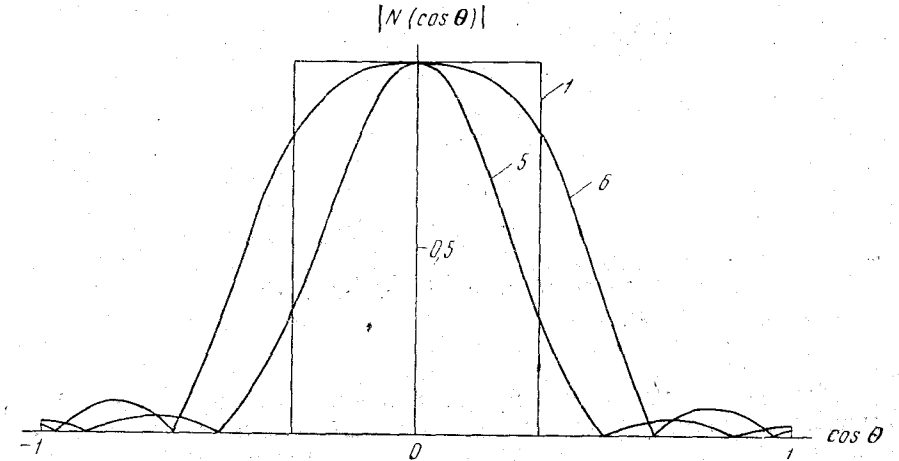


Рис. 8

жены кривые п. н. и. и п. п. д. при $\alpha = 100$, $\gamma = 0$ в зависимости от β . На рисунке виден тот же эффект уменьшения п. п. д. решения при увеличении п. н. и. Соответствующие отмеченным параметрам решения обратной задачи и диаграммы направленности имеют подобный вид, что и приведенные на рис. 5 и 6, поэтому приводить их не будем.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В. И. ДМИТРИЕВ

МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ТОНКИХ НЕОДНОРОДНЫХ СЛОЯХ

Исследование характерных особенностей поведения магнито-теллурического поля в тонких слоях имеет большое значение, так как дает нам низкочастотную часть кривой магнито-теллурического зондирования. В случае однородного слоя проводимости σ и мощности h результат хорошо известен. Если такой слой лежит на изолирующем основании, то импеданс в низкочастотной части равен:

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{1}{S}, \quad S = \sigma h. \quad (1)$$

Если же слой лежит на идеально проводящем основании, то имеем

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = -i\omega\mu h. \quad (2)$$

Таким образом, в первом случае по низкочастотной части кривой МТЗ определяется суммарная проводимость s , а во втором случае глубина до идеально проводящего основания h .

Естественно, возникает вопрос о возможности использования асимптотик (1), (2) в случае неоднородности слоя.

Рассмотрим вначале наиболее простой случай слоя постоянной мощности h , проводимость которого непрерывно изменяется вдоль слоя в одном направлении $\sigma(y)$. Границами слоя являются плоскости $z=0$ и $z=h$. Так как в этом случае мы можем считать поле плоским, то общее электромагнитное поле распадается на две поляризации.

I. E -поляризация, когда $\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$, $\vec{H} = \{0, H_y, H_z\}$. При этой поляризации магнитное поле выражается через электрическое:

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (3)$$

Для иллюстрации влияния параметра γ на форму главного лепестка приведем решения обратной задачи для случаев $\alpha=1, \beta=1, \gamma=0$ (кривая 5) и $\alpha=1, \beta=1, \gamma=1$ (кривая 6) на рис. 9. Соответствующие модули диаграмм направленности изображены на рис. 9.

Если мы захотим с помощью линейной антенны длины 3λ создать диаграмму направленности с более узким главным лепестком, например,

$$f(z) = \begin{cases} 1, & |z| \leq 0,1, \\ 0, & 0,1 < |z| \leq 3, \end{cases} \quad (22)$$

то столкнемся со следующими трудностями.

При одновременном $\alpha=\beta, \gamma=0$ увеличении параметров α и β мы не получим решения с большим п. н. и., чем 0,12 (рис. 10).

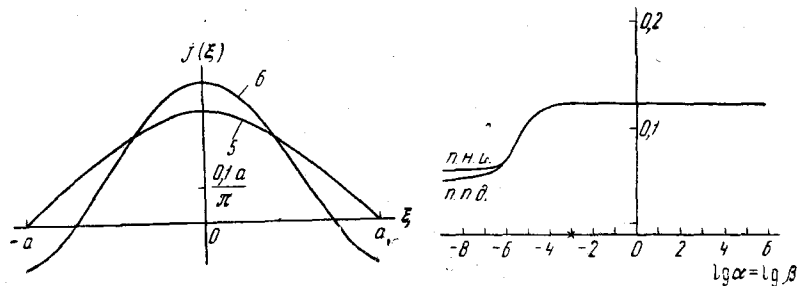


Рис. 9

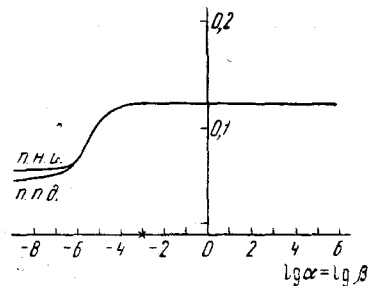


Рис. 10

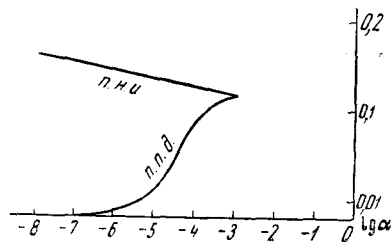


Рис. 11

Мы можем увеличить п.н.и. решения, но при этом очень быстро падает п.п.д. Так, на рис. 11 изображены п.п.д. и п.н.и. при $\beta=0,001, \gamma=0$ в зависимости от α . На рисунке хорошо видно, что небольшое увеличение п.н.и. влечет резкое падение п.п.д.

Пользуюсь случаем поблагодарить В. И. Дмитриева за помощь и большое внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зелкин Е. Г. Фазовая диаграмма направленности и задача синтеза антенн. «Радиотехника и электроника», 1963, № 1, стр. 42.
2. Чечкин А. В. Метод функциональных пространств для решения обратной задачи теории антенн (настоящий сборник).

а электрическое поле удовлетворяет уравнению

$$\Delta E_x + k^2 E_x = 0, \quad k^2 = i\omega\mu\sigma. \quad (4)$$

II. H -поляризация, когда $\vec{H} = \{H_x, 0, 0\}$, $\vec{E} = \{0, E_y, E_z\}$. При этой поляризации электрическое поле выражается через магнитное:

$$E_y = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (5)$$

а магнитное поле удовлетворяет уравнению

$$\sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0. \quad (6)$$

Выведем приближенные граничные условия на тонком неоднородном слое.

I. В случае E -поляризации согласно (3), (4) имеем внутри слоя

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\mu H_y, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{i}{\omega\mu} \left\{ \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + k^2 E_x \right\}.$$

Проинтегрировав эти равенства по толщине слоя, получим

$$E_x(z=h) - E_x(z=0) = i\omega\mu \int_0^h H_y dz \approx \frac{i\omega\mu h}{2} [H_y(z=h) + H_y(z=0)], \quad (7)$$

$$H_y(z=h) - H_y(z=0) = \frac{i}{\omega\mu} \int_0^h \left\{ \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + k^2 E_x \right\} dz \approx \frac{ih}{2\omega\mu} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right\} [E_x(z=h) + E_x(z=0)]. \quad (8)$$

При этом мы считаем, что в тонком по сравнению с длиной волны слое поля изменяются линейно.

II. Совершенно аналогично получаем граничные условия для H -поляризации. Согласно (5), (6) имеем

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \sigma E_y, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{\sigma} \left\{ \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + k^2 H_x \right\}.$$

После интегрирования этих равенств по толщине слоя получим

$$H_x(z=h) - H_x(z=0) = \frac{\sigma h}{2} (E_y(z=h) + E_y(z=0)), \quad (9)$$

$$E_y(z=h) - E_y(z=0) = -\frac{h}{2\sigma} \left\{ \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + k^2 \right\} \times (H_x(z=h) + H_x(z=0)). \quad (10)$$

Зная приближенные граничные условия на тонком слое, рассмотрим поведение магнито-теллурического поля в слое, лежащем на изоляторе и на идеально проводящем основании.

а) Слой, лежащий на изоляторе. H -поляризация. Используя условие $H_x(z=h) = 0$, из (9) получим

$$E_y(z=h) = -E_y(z=0) - \frac{2}{\sigma h} H_x(z=0). \quad (11)$$

Подставив (11) в (10) и учитывая, что $H_x(z=0) = \text{const}$, будем иметь

$$-2E_y(z=0) - \frac{2}{\sigma h} H_x(z=0) = -\frac{i\omega\mu h}{2} H_x(z=0),$$

откуда получаем

$$Z = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{1}{\sigma h} \left(1 - \frac{k^2 h^2}{4} \right) \approx \frac{1}{s}. \quad (12)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае магнито-теллурическое поле в неоднородном слое ведет себя так же, как и в однородном, т. е. мы можем пользоваться в низкочастотной части асимптотикой (1).

б) Слой, лежащий на идеально проводящем основании. H -поляризация.

Используя условие $E_y(z=h) = 0$, согласно (9) найдем

$$H_x(z=h) = H_x(z=0) + \frac{\sigma h}{2} E_y(z=0). \quad (13)$$

Подставив (13) в (10) и учитывая, что $H_x(z=0) = \text{const}$, получим

$$\frac{h^2}{4} \cdot \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d}{dy} (\sigma E_y(z=0)) \right] - \left(1 - \frac{k^2 h^2}{4} \right) E_y(z=0) = -i\omega\mu h H_x(z=0).$$

Откуда для импеданса $Z = -\frac{E_y}{H_x}$ получаем уравнение

$$\frac{h^2}{4} \cdot \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d}{dy} (\sigma Z) \right] - \left(1 - \frac{k^2 h^2}{4} \right) Z = i\omega\mu h. \quad (14)$$

Учитывая, что $|k^2| h^2 \ll 1$ и введя импеданс в виде

$$Z = -i\omega\mu h u(y), \quad (15)$$

получим для $u(y)$ уравнение

$$\frac{h^2}{4} \left[\frac{(\sigma u)'}{\sigma} \right]' - u = -1 \quad (16)$$

при условии на бесконечности $u \rightarrow 1$ при $|y| \rightarrow \infty$. Решение (16) определяет нам поправочный множитель к импедансу однородного слоя.

в) Слой, лежащий на изоляторе. E -поляризация.
В этом случае можно пренебречь разрывом электрического поля, т. е. вместо (7) считать

$$E_x(z=0) = E_x(z=h). \quad (17)$$

Тогда согласно (8), учитывая (3) и (17), получим

$$\frac{\partial E_x(z=0)}{\partial z} = \frac{\partial E_x(z=h)}{\partial z} + h \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) E_x(z=0). \quad (18)$$

Вне слоя $E_x(y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0,$$

где k_0 — волновое число в изоляторе. В бесконечности функция $E_x - E_x^0$ должна удовлетворять условию излучения, где E_x^0 — решение задачи для однородного слоя. Полученная задача может быть решена с помощью интегрального уравнения.

Пусть проводимость слоя изменяется по следующему закону:

$$\sigma = \sigma_1 \text{ при } |y| \geq l, \quad \sigma = \sigma(y) \text{ при } |y| \leq l.$$

Тогда поле в случае однородного слоя $\sigma(y) = \sigma_1$ будет равно

$$\begin{aligned} E_x^0(z) &= e^{ik_0 z} - \frac{k_1^2 h}{k_1^2 h + 2ik_0} e^{-ik_0 z} \quad \text{при } z \leq 0, \\ E_x^0(z) &= \frac{2ik_0}{k_1^2 h + 2ik_0} e^{ik_0(z-h)} \quad \text{при } z \geq h. \end{aligned} \quad (19)$$

Функция Грина для однородного слоя удовлетворяет следующей задаче:

$$\Delta G + k_0^2 G = \delta(r_{MM_0}); \quad r_{MM_0} = \sqrt{(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$$G(z=0) = G(z=h), \quad \frac{\partial G(z=0)}{\partial z} = \frac{\partial G(z=h)}{\partial z} + h \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_1^2 \right) G(z=0).$$

В дальнейшем нам будут необходимы

$$G(z=z_0=0) = K(y-y_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda(y-y_0) \frac{d\lambda}{2\lambda + (\lambda^2 - k_1^2)h}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial G(z=z_0=0)}{\partial z} = P(y-y_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda(y-y_0) \frac{\lambda d\lambda}{2\lambda + (\lambda^2 - k_1^2)h}. \quad (21)$$

Применяя формулу Грина к функциям E_x и G , получим

$$E_x(y, z) = E_x^0(z) + h \int_{-l}^l [k^2(y) - k_1^2] E_x(y_0, z_0=0) G(y_0, y, z, z_0=0) dy_0. \quad (22)$$

Выражение (22) дает нам интегральное представление для E_x в любой точке пространства через поле на поверхности слоя. Для функции

$$e(y) = \frac{2ik_0 + k_1^2 h}{2ik_0} E_x(y, z=0) \quad (23)$$

согласно (22) мы получим интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$e(y) - h \int_{-l}^l [k^2(y_0) - k_1^2] e(y_0) K(y-y_0) dy_0 = 1. \quad (24)$$

Зная $e(y)$, мы легко можем получить $H_y(z=0)$ согласно (3) и (22):

$$\begin{aligned} H_y(z=0) &= -\frac{i}{\omega \mu} \left\{ \frac{\partial E^0(z=0)}{\partial z} + h \int_{-l}^l [k^2(y_0) - k_1^2] E_x(y_0, z_0=0) \times \right. \\ &\quad \left. \times P(y-y_0) dy_0 \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Откуда, считая $|k_0| \ll |k|^2 h$, получим

$$H_y(z=0) = \frac{2ik_0}{2ik_0 + k^2 h} \left\{ \sigma_1 h + \int_{-l}^l h [\sigma(y_0) - \sigma_1] e(y_0) P(y-y_0) dy_0 \right\}. \quad (26)$$

Таким образом, окончательно получаем согласно (23) и (25) импеданс в виде

$$Z(y) = \frac{E_x(z=0)}{H_y(z=0)} = \frac{1 + h \int_{-l}^l [k^2(y_0) - k_1^2] e(y_0) K(y-y_0) dy_0}{\sigma_1 h + h \int_{-l}^l [\sigma(y_0) - \sigma_1] e(y_0) P(y-y_0) dy_0}, \quad (27)$$

где $e(y_0)$ на участке $-l \leq y_0 \leq l$ определяется из интегрального уравнения (24).

г) Слой, лежащий на идеальном проводнике. E -поляризация. Из условия $E_x(z=h) = 0$ согласно (7) получаем

$$H_y(z=h) = -H_y(z=0) - \frac{2}{i\omega \mu h} E_x(z=0). \quad (28)$$

Подставив (28) в (8) и учитывая, что $|k|^2 h^2 \ll 1$, найдём

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{4}{h^2}\right) E_x(y, z=0) = \frac{4i\omega\mu}{h} H_y(y, z=0). \quad (29)$$

Полученное выражение (29) является граничным условием при $z=0$. Так как в это условие не входит проводимость, то легко видеть, что поля при $z=0$ постоянны вдоль слоя. Откуда окончательно получаем импеданс

$$Z = \frac{E_x(z=0)}{H_y(z=0)} = -i\omega\mu h, \quad (30)$$

т. е. аналогично однородному слою.

Таким образом, результат для неоднородного слоя совпадает с результатом для однородного в случае слоя, лежащего на изоляторе, для магнитной поляризации поля, а в случае слоя, лежащего на идеально проводящем основании, для электрической поляризации. При других случаях необходимо учитывать поправку, возникающую в результате наличия неоднородности слоя.

Следует отметить, что мы рассмотрели случай неоднородного слоя постоянной мощности. Изменение мощности слоя приводит к появлению дополнительных поправочных коэффициентов. К сожалению, полученные граничные условия могут быть обобщены на случай слоя переменной мощности при очень сильных ограничениях на изменение мощности слоя $\text{grad } h \ll 1$. При таких ограничениях изменение толщины слоя практически не изменяет полученные выше результаты.

А. Н. ТИХОНОВ, В. И. ДМИТРИЕВ

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА ГЛУБИННОЕ МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ

В горизонтальнослоистой среде с любым распределением проводимости по глубине слоя, лежащего на идеально проводящем основании, импеданс имеет низкочастотную асимптотику

$$Z = -i\omega\mu H, \quad (1)$$

где H — мощность слоя. Таким образом, получение низкочастотной части кривой МТЗ дает возможность определить глубину залегания идеально проводящего основания (1).

Выражение (1) получено для горизонтальнослоистой однородной среды, поэтому представляет интерес выяснить, как изменится низкочастотная асимптотика при наличии в среде неоднородностей. Настоящая работа посвящена изучению влияния поверхностных неоднородностей на низкочастотную часть кривой магнито-теллурического зондирования.

1. Рассмотрим один из наиболее типичных геоэлектрических разрезов при глубинном МТЗ, когда проводимость среды изменяется по закону.

$$\sigma = \begin{cases} \sigma(y) & \text{при } 0 < z < h, \\ \sigma_0 & \text{при } h < z < H, \\ \infty & \text{при } z > H. \end{cases} \quad (2)$$

Причем будем считать, что выполнены условия $\sigma \gg \sigma_0$, $H \gg h$. Кроме того, так как мы будем рассматривать низкочастотную асимптотику, то, следовательно, выполняются условия $|k|h \ll 1$, $|k_0|(H-h) \ll 1$, где

$$k^2 = i\omega\mu\sigma, \quad k_0^2 = i\omega\mu\sigma_0.$$

Так как мы рассматриваем слои тонкие по сравнению с длиной волны в слое, то мы вправе использовать приближенные граничные условия для тонкого слоя, полученные в работе (2).

Подставив (28) в (8) и учитывая, что $|k|^2 h^2 \ll 1$, найдём

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{4}{h^2}\right) E_x(y, z=0) = \frac{4i\omega\mu}{h} H_y(y, z=0). \quad (29)$$

Полученное выражение (29) является граничным условием при $z=0$. Так как в это условие не входит проводимость, то легко видеть, что поля при $z=0$ постоянны вдоль слоя. Откуда окончательно получаем импеданс

$$Z = \frac{E_x(z=0)}{H_y(z=0)} = -i\omega\mu h, \quad (30)$$

т. е. аналогично однородному слою.

Таким образом, результат для неоднородного слоя совпадает с результатом для однородного в случае слоя, лежащего на изоляторе, для магнитной поляризации поля, а в случае слоя, лежащего на идеально проводящем основании, для электрической поляризации. При других случаях необходимо учитывать поправку, возникающую в результате наличия неоднородности слоя.

Следует отметить, что мы рассмотрели случай неоднородного слоя постоянной мощности. Изменение мощности слоя приводит к появлению дополнительных поправочных коэффициентов. К сожалению, полученные граничные условия могут быть обобщены на случай слоя переменной мощности при очень сильных ограничениях на изменение мощности слоя $\text{grad } h \ll 1$. При таких ограничениях изменение толщины слоя практически не изменяет полученные выше результаты.

А. Н. ТИХОНОВ, В. И. ДМИТРИЕВ

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА ГЛУБИННОЕ МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ

В горизонтальнослоистой среде с любым распределением проводимости по глубине слоя, лежащего на идеально проводящем основании, импеданс имеет низкочастотную асимптотику

$$Z = -i\omega\mu H, \quad (1)$$

где H — мощность слоя. Таким образом, получение низкочастотной части кривой МТЗ дает возможность определить глубину залегания идеально проводящего основания (1).

Выражение (1) получено для горизонтальнослоистой однородной среды, поэтому представляет интерес выяснить, как изменится низкочастотная асимптотика при наличии в среде неоднородностей. Настоящая работа посвящена изучению влияния поверхностных неоднородностей на низкочастотную часть кривой магнито-теллурического зондирования.

1. Рассмотрим один из наиболее типичных геоэлектрических разрезов при глубинном МТЗ, когда проводимость среды изменяется по закону.

$$\sigma = \begin{cases} \sigma(y) & \text{при } 0 < z < h, \\ \sigma_0 & \text{при } h < z < H, \\ \infty & \text{при } z > H. \end{cases} \quad (2)$$

Причем будем считать, что выполнены условия $\sigma \gg \sigma_0$, $H \gg h$. Кроме того, так как мы будем рассматривать низкочастотную асимптотику, то, следовательно, выполняются условия $|k|h \ll 1$, $|k_0|(H-h) \ll 1$, где

$$k^2 = i\omega\mu\sigma, \quad k_0^2 = i\omega\mu\sigma_0.$$

Так как мы рассматриваем слой тонкие по сравнению с длиной волны в слое, то мы вправе использовать приближенные граничные условия для тонкого слоя, полученные в работе (2).

2. Рассмотрим магнитную поляризацию электромагнитного поля, когда

$$\bar{H} = \{H_x, 0, 0\}; \quad \bar{E} = \{0, E_y, E_z\}.$$

В этом случае приближенные граничные условия на тонком слое согласно (2) будут иметь вид

$$H_x(z=z_2) = H_x(z=z_1) + \frac{\sigma(z_2-z_1)}{2} \{E_y(z=z_2) + E_y(z=z_1)\}, \quad (3)$$

$$E_y(z=z_2) = E_y(z=z_1) - \frac{z_2-z_1}{2\sigma} \left\{ \sigma \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d}{dy} \right) + k^2 \right\} \{H_x(z=z_2) + H_x(z=z_1)\}. \quad (4)$$

Применим эти граничные условия к первому слою. На границе раздела проводящей среды и изолятора в квазистационарном приближении тангенциальная составляющая магнитного поля постоянна, т. е. $H_x(0) = \text{const}$. Так как $\sigma_0 \ll \sigma$, то мы можем считать $H_x(h) = \text{const}$ и пренебречь производной в (4). Тогда согласно (3), (4) получим

$$H_x(h) = H_x(0) + \frac{\sigma h}{2} [E_y(h) + E_y(0)], \quad (5)$$

$$E_y(h) = E_y(0) - \frac{i\omega\mu h}{2} [H_x(h) + H_x(0)]. \quad (6)$$

Из (5), (6), учитывая, что $|k|^2 h^2 \ll 1$, найдем

$$E_y(h) = E_y(0) - i\omega\mu h H_x(0), \quad (7)$$

$$H_x(h) = H_x(0) + \sigma h E_y(0). \quad (8)$$

Применим теперь граничные условия (3), (4) ко второму слою. Учитывая, что на поверхности идеального проводника тангенциальная составляющая электрического поля $E_y(H) = 0$, получим

$$H_x(H) = H_x(h) + \frac{\sigma_0(H-h)}{2} E_y(h), \quad (9)$$

$$E_y(h) = \left\{ \frac{H-h}{2\sigma_0} \cdot \frac{d^2}{dy^2} + \frac{i\omega\mu(H-h)}{2} \right\} \{H_x(H) + H_x(h)\}. \quad (10)$$

Исключив из (9), (10) величину $H_x(H)$, найдем

$$E_y(h) = \left\{ \frac{H-h}{2\sigma_0} \cdot \frac{d^2}{dy^2} + \frac{i\omega\mu(H-h)}{2} \right\} \left\{ 2H_x(h) + \frac{\sigma_0(H-h)}{2} E_y(h) \right\}. \quad (11)$$

Заметим, что в выражении (11) мы не имеем права считать $H_x(h) = \text{const}$, так как перед производной стоит большой пара-

метр $H-h/2\sigma_0$. Подставив в (11) выражения для $E_y(h)$ и $H_x(h)$ из (7), (8), получим

$$E_y(0) - i\omega\mu h H_x(0) = \left\{ \frac{H-h}{2\sigma_0} \cdot \frac{d^2}{dy^2} + \frac{i\omega\mu(H-h)}{2} \right\} \left\{ 2H_x(0) + \frac{4\sigma h + \sigma_0(H-h)}{2} E_y(0) \right\}.$$

Учитывая, что $H_x(0) = \text{const}$, и введя импеданс

$$Z(y) = -\frac{E_y(0)}{H_x(0)},$$

получим для $Z(y)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{H-h}{4\sigma_0} \cdot \frac{d^2}{dy^2} [4\sigma h + \sigma_0(H-h)] Z(y) - [1 - k^2 h(H-h)] Z(y) = i\omega\mu H. \quad (12)$$

Если параметры среды не зависят от y , то из (12) мы получаем асимптотику импеданса для однородной среды:

$$Z_0 = -\frac{i\omega\mu H}{1 - k^2 h(H-h)}. \quad (13)$$

Импеданс для неоднородной среды представим в виде

$$Z(y) = Z_0 u(y), \quad (14)$$

где $u(y)$ — поправочный множитель, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{H-h}{4\sigma_0} \cdot \frac{d^2}{dy^2} \left[\frac{4\sigma h + \sigma_0(H-h)}{1 - k^2 h(H-h)} u(y) \right] - u(y) = -1 \quad (15)$$

при условии, что $u(y) \rightarrow 1$ при $|y| \rightarrow \infty$.

Мы получили уравнение (15) для плоской границы раздела между слоями $z=h=\text{const}$. Уравнение (15) применимо и в случае медленно изменяющейся границы $h=h(y)$ при $h'(y) \ll 1$, если выполнены условия $\sigma_0 \ll \sigma$ и $h \ll H$.

Так как $H \gg h$, то, введя обозначения $S(y) = \sigma h$ и $S_0 = \sigma_0 H$, мы можем записать (15) в виде

$$\frac{1}{4S_0} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} \left[\frac{4S(\xi) + S_0}{1 - i\omega\mu HS(\xi)} v(\xi) \right] - v(\xi) = -1, \quad (16)$$

где $\xi = y/H$, $v(\xi) = u(\xi H)$.

В общем случае произвольного изменения $S(y)$ необходимо решать уравнение (16). В некоторых частных случаях возможна оценка изменения $v(\xi)$.

3. Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай $S \gg S_0$, когда влияние поверхностной неоднородности наиболее сильно. При этом будем иметь

$$\frac{1}{S_0} \cdot \frac{d^2}{d\xi^2} \left[\frac{S(\xi)}{1 - i\omega\mu HS(\xi)} v(\xi) \right] - v(\xi) = -1. \quad (17)$$

Пусть суммарная проводимость S имеет локальное изменение

$$S(\xi) = \begin{cases} S_1 & \text{при } |\xi| \geq \frac{d}{H}, \\ S(\xi) & \text{при } |\xi| < \frac{d}{H}, \end{cases}$$

где d — ширина неоднородности, причем $d/H \ll 1$. Рассмотрим случаи: а) когда выполнено условие

$$|k^2| hH = \omega\mu HS(\xi) \gg 1. \quad (18)$$

При условии (18) уравнение (17) принимает вид

$$\frac{1}{i\omega\mu HS_0} v''(\xi) + v(\xi) = 1, \quad v \rightarrow 1 \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Решение уравнения (19) есть $v=1$. Откуда согласно (13), (14), учитывая условие (18), получим импеданс в виде

$$Z(y) = \frac{1}{S(y)}; \quad (20)$$

б) когда выполнено условие

$$|k^2| hH = \omega\mu HS(\xi) \ll 1. \quad (21)$$

При условии (21) уравнение (17) дает

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left[\frac{S(\xi)}{S_0} v(\xi) \right] - v(\xi) = -1, \quad |\xi| < \frac{d}{H}. \quad (22)$$

Причем должны быть непрерывны $v(\xi)$ и $[S(\xi)v(\xi)]'$, суммарная проводимость $S(\xi)$ непрерывна по условию задачи. Так как вне участка $|\xi| < \frac{d}{H}$ мы имеем уравнение с постоянными коэффициентами, то легко получаем граничные условия при $|\xi| = \frac{d}{H}$:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{S(\xi)}{S_1} v(\xi) \right] + \frac{\xi}{|\xi|} \alpha v(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|} \alpha, \quad \text{где } \alpha = \sqrt{\frac{S_0}{S_1}}. \quad (23)$$

Полученная краевая задача может быть редуцирована к интегральному уравнению

$$v(\xi) = \frac{S_1}{S(\xi)} + \frac{\alpha}{2} \int_{-d/H}^{d/H} e^{-\alpha|\xi-t|} \frac{S(t) - S_1}{S(\xi)} v(t) dt. \quad (24)$$

Если выполнено условие

$$\beta = \frac{\alpha d}{H} \max \left| \frac{S(t) - S_1}{S(\xi)} \right| < 1, \quad (25)$$

то к интегральному уравнению (24) применим метод последовательных приближений. В нашем случае мы имеем $\alpha = \sqrt{\frac{S_0}{S_1}} \ll 1$, $\frac{d}{H} \ll 1$, следовательно $\beta \ll 1$, и мы можем ограничиться нулевым приближением, т. е. считать

$$v(\xi) \simeq \frac{S_1}{S(\xi)}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (14) и учитывая условие (21), находим асимптотику импеданса

$$Z(y) = -i\omega\mu H \frac{S_1}{S(y)}. \quad (27)$$

Сравнивая (27) и (20), мы можем заключить, что наличие локальной неоднородности при магнитной поляризации поля изменяет импеданс однородной среды на множитель $S_1/S(y)$, где S_1 — суммарная проводимость однородной среды, а $S(y)$ — суммарная проводимость при наличии неоднородности.

4. Рассмотрим теперь электрическую поляризацию поля, когда

$$\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}, \quad \vec{H} = \{0, H_y, H_z\}.$$

В этом случае приближенные граничные условия согласно (2) будут иметь вид

$$E_x(z=z_2) = E_x(z=z_1) + \frac{i\omega\mu(z_2-z_1)}{2} [H_y(z=z_2) + H_y(z=z_1)], \quad (28)$$

$$H_y(z=z_2) = H_y(z=z_1) + \frac{i(z_2-z_1)}{2\omega\mu} \left\{ \frac{d^2}{dy^2} + k^2 \right\} \{E_x(z=z_2) + E_x(z=z_1)\}. \quad (29)$$

Применим в начале эти граничные условия ко второму плохо проводящему слою. Так как $\sigma_0 \ll \sigma$, то мы можем пренебречь разрывом магнитного поля на этом слое, т. е. считать

$$H_y(H) = H_y(h).$$

Тогда, учитывая, что на поверхности идеального проводника $E_x(H) = 0$, из условия (28) найдем

$$E_x(h) = -i\omega\mu(H-h)H_y(h). \quad (30)$$

Применим теперь граничные условия (28), (29) к верхнему хорошо проводящему слою; тогда

$$E_x(h) = E_x(0) + \frac{i\omega\mu h}{2} [H_y(h) + H_y(0)], \quad (31)$$

$$H_y(h) = H_y(0) + \frac{ih}{2\omega\mu} \left[\frac{d^2}{dy^2} + k^2 \right] [E(h) + E(0)]. \quad (32)$$

Подставив из (30) значение $E_x(h)$ в (31), (32), получим

$$-\frac{i\omega\mu(2H-h)}{2} H_y(h) = E_x(0) + \frac{i\omega\mu h}{2} H_y(0), \quad (33)$$

$$H_y(h) = H_y(0) + \frac{ih}{2\omega\mu} \left[\frac{d^2}{dy^2} + k^2 \right] [E_x(0) - i\omega\mu(H-h)H_y(h)]. \quad (34)$$

Исключив из (33), (34) величину $H_y(h)$, получим окончательно

$$\begin{aligned} h(H-h) \frac{d^2 E_x(0)}{dy^2} - [1 - k^2 h(H-h)] E_x(0) = \\ = i\omega\mu H H_y(0) - i\omega\mu \frac{h^2(H-h)}{4} \cdot \frac{d^2 H_y(0)}{dy^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Полученное дифференциальное соотношение (35) между тангенциальными составляющими электромагнитного поля на поверхности среды является граничным условием для внешней задачи

$$\Delta E_x + k_0^2 E_x = 0 \quad \text{при } z < 0; \quad H_y = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (36)$$

где k_0 — волновое число в воздухе при условии нормального падения на поверхность границы раздела плоской волны электрической поляризации.

В общем случае полученная задача решается методом интегральных уравнений. При выполнении условия (21) в соотношении (35) не входит проводимость верхнего слоя, т. е. все коэффициенты постоянны. Решением этого уравнения будет

$$E_x(0) = -i\omega\mu H H_y(0) = \text{const}. \quad (36)$$

Таким образом, в рассмотренном случае импеданс неоднородной среды равен импедансу однородной среды:

$$Z = -i\omega\mu H. \quad (37)$$

Иначе говоря, поверхностные неоднородности в случае электрической поляризации поля не влияют на низкочастотную асимптотику импеданса. Следует отметить, что мы получили этот результат при постоянной мощности слоя, хотя слабое изменение мощности верхнего слоя существенных изменений результата не дает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик и глубинных слоев Земной коры. ДАН СССР, 1950, т. 73, № 2.
2. Дмитриев В. И. Магнито-теллурическое поле в тонких слоях (настоящий сборник).

В. И. ДМИТРИЕВ, Н. В. ГУЩИНА

О ГЛУБИННОМ МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОМ ЗОНДИРОВАНИИ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНОЙ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ГРАНИЦЫ

Основной задачей глубинного магнито-теллурического зондирования является определение глубины залегания идеально проводящего основания. Представляет интерес изучение влияния изменения глубины залегания идеально проводящего основания на импеданс, измеряемый на поверхности среды. Мы рассмотрим случай ступенчатого изменения мощности слоя, подстилаемого идеальным проводником.

Пусть дан однородный проводящий слой проводимости σ , верхняя граница которого есть $z=0$, а нижняя граница задана в виде

$$z = \begin{cases} h & \text{при } y < 0, \\ H & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad H > h.$$

Рассмотрим магнитную поляризацию поля. Тогда электрическое поле равно

$$E_y = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (1)$$

Магнитное поле внутри слоя удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0, \quad (2)$$

на границах слоя выполняются краевые условия:

$$H_x = 1 \quad \text{при } z = 0; \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad h < z < H,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h, \quad y < 0 \quad \text{и при } z = H, \quad y > 0.$$

На бесконечности при $|y| \rightarrow \infty$ имеем $\frac{\partial H_x}{\partial y} \rightarrow 0$. Представим поле H_x в виде

$$H_x = \frac{\cos k(h-z)}{\cos kh} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{\gamma_n y} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{h} \quad \text{при } y < 0, \quad (3)$$

Применим теперь граничные условия (28), (29) к верхнему хорошо проводящему слою; тогда

$$E_x(h) = E_x(0) + \frac{i\omega\mu h}{2} [H_y(h) + H_y(0)], \quad (31)$$

$$H_y(h) = H_y(0) + \frac{ih}{2\omega\mu} \left[\frac{d^2}{dy^2} + k^2 \right] [E(h) + E(0)]. \quad (32)$$

Подставив из (30) значение $E_x(h)$ в (31), (32), получим

$$-\frac{i\omega\mu(2H-h)}{2} H_y(h) = E_x(0) + \frac{i\omega\mu h}{2} H_y(0), \quad (33)$$

$$H_y(h) = H_y(0) + \frac{ih}{2\omega\mu} \left[\frac{d^2}{dy^2} + k^2 \right] [E_x(0) - i\omega\mu(H-h)H_y(h)]. \quad (34)$$

Исключив из (33), (34) величину $H_y(h)$, получим окончательно

$$\begin{aligned} h(H-h) \frac{d^2 E_x(0)}{dy^2} - [1 - k^2 h(H-h)] E_x(0) = \\ = i\omega\mu H H_y(0) - i\omega\mu \frac{h^2(H-h)}{4} \cdot \frac{d^2 H_y(0)}{dy^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Полученное дифференциальное соотношение (35) между тангенциальными составляющими электромагнитного поля на поверхности среды является граничным условием для внешней задачи

$$\Delta E_x + k_0^2 E_x = 0 \quad \text{при } z < 0; \quad H_y = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (36)$$

где k_0 — волновое число в воздухе при условии нормального падения на поверхность границы раздела плоской волны электрической поляризации.

В общем случае полученная задача решается методом интегральных уравнений. При выполнении условия (21) в соотношении (35) не входит проводимость верхнего слоя, т. е. все коэффициенты постоянны. Решением этого уравнения будет

$$E_x(0) = -i\omega\mu H H_y(0) = \text{const}. \quad (36)$$

Таким образом, в рассмотренном случае импеданс неоднородной среды равен импедансу однородной среды:

$$Z = -i\omega\mu H. \quad (37)$$

Иначе говоря, поверхностные неоднородности в случае электрической поляризации поля не влияют на низкочастотную асимптотику импеданса. Следует отметить, что мы получили этот результат при постоянной мощности слоя, хотя слабое изменение мощности верхнего слоя существенных изменений результата не дает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик и глубинных слоев Земной коры. ДАН СССР, 1950, т. 73, № 2.
2. Дмитриев В. И. Магнито-теллурическое поле в тонких слоях (настоящий сборник).

В. И. ДМИТРИЕВ, Н. В. ГУЩИНА

О ГЛУБИННОМ МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОМ ЗОНДИРОВАНИИ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОДНОРОДНОЙ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ГРАНИЦЫ

Основной задачей глубинного магнито-теллурического зондирования является определение глубины залегания идеально проводящего основания. Представляет интерес изучение влияния изменения глубины залегания идеально проводящего основания на импеданс, измеряемый на поверхности среды. Мы рассмотрим случай ступенчатого изменения мощности слоя, подстилаемого идеальным проводником.

Пусть дан однородный проводящий слой проводимости σ , верхняя граница которого есть $z=0$, а нижняя граница задана в виде

$$z = \begin{cases} h & \text{при } y < 0, \\ H & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad H > h.$$

Рассмотрим магнитную поляризацию поля. Тогда электрическое поле равно

$$E_y = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y}. \quad (1)$$

Магнитное поле внутри слоя удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0, \quad (2)$$

на границах слоя выполняются краевые условия:

$$H_x = 1 \quad \text{при } z = 0; \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0; \quad h < z < H,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h, \quad y < 0 \quad \text{и при } z = H, \quad y > 0.$$

На бесконечности при $|y| \rightarrow \infty$ имеем $\frac{\partial H_x}{\partial y} \rightarrow 0$. Представим поле H_x в виде

$$H_x = \frac{\cos k(h-z)}{\cos kh} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{\gamma_n y} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{h} \quad \text{при } y < 0, \quad (3)$$

$$H_x = \frac{\cos k(H-z)}{\cos kH} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\gamma_n y} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{H} \quad \text{при } y > 0, \quad (4)$$

где $\Gamma_n = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{h^2} - k^2}$; $\gamma_n = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{H^2} - k^2}$, причем $\operatorname{Re} \Gamma_n > 0$, $\operatorname{Re} \gamma_n > 0$.

Представленная в таком виде функция H_x удовлетворяет уравнению, крайевым условиям при $z=0$, $z=h$ и $z=H$ и условию на бесконечности.

Неизвестные коэффициенты разложения a_n , b_n находим из условия сшивания решений при $y=0$:

$$H_x(y=+0) = H_x(y=-0) \quad \text{при } 0 < z < h, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial H_x}{\partial y} \right|_{y=+0} = \begin{cases} \left. \frac{\partial H_x}{\partial y} \right|_{y=-0} & \text{при } 0 < z < h, \\ 0 & \text{при } h < z < H. \end{cases} \quad (6)$$

Подставив выражения (3), (4) в условия (5), (6), получим при $0 < z < h$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{h} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{H} + \{ \operatorname{tg} kH - \operatorname{tg} kh \} \sin kz, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma_n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{H} = \begin{cases} - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Gamma_n \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{h} & \text{при } 0 < z < h, \\ 0 & \text{при } h < z < H, \end{cases} \quad (8)$$

Умножив (7) на $\sin \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{h}$ и проинтегрировав от нуля до h , найдем

$$b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn} a_n + f_m, \quad (9)$$

где

$$\beta_{mn} = \frac{(-1)^m 4(2n+1)Hh}{\pi [(2m+1)^2 H^2 - (2n+1)^2 h^2]} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi h}{H}, \quad (10)$$

причем при $(2m+1)H = (2n+1)h$ имеем $\beta_{mn} = 1$

$$f_m = - \frac{(-1)^m 8kh \cos kh}{\pi^2 (2m+1)^2 - 4k^2 h^2} (\operatorname{tg} kH - \operatorname{tg} kh). \quad (11)$$

Аналогично, если умножить (8) на $\sin \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{H}$ и проинтегрировать от нуля до H , найдем

$$a_m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn} b_n, \quad (12)$$

где

$$\alpha_{mn} = \frac{\Gamma_n}{\gamma_m} \cdot \frac{(-1)^n 4h^2 (2m+1) \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi h}{H}}{\pi [(2m+1)^2 h^2 - (2n+1)^2 H^2]}, \quad (13)$$

причем при $(2n+1)H = (2m+1)h$ имеем $\alpha_{mn} = -\frac{h}{H}$.

Подставив (12) в (9), получим систему для определения b_m :

$$b_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} b_n + f_m, \quad \text{где } A_{mn} = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{mi} \alpha_{in}. \quad (14)$$

Удобнее находить в начале именно b_m , так как b_m убывает быстрее при $m \rightarrow \infty$.

Зная b_m , согласно (12) находим a_m . Откуда мы можем легко определить импеданс при $z=0$:

$$Z = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad \text{при } z=0. \quad (15)$$

Согласно (3), (4) получим

$$Z = -\frac{k}{\sigma} \operatorname{tg} kh + \frac{\pi}{\sigma h} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) b_n e^{\Gamma_n y} \quad \text{при } y < 0, \quad (16)$$

$$Z = -\frac{k}{\sigma} \operatorname{tg} kH + \frac{\pi}{\sigma H} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) a_n e^{-\gamma_n y} \quad \text{при } y > 0. \quad (17)$$

При решении системы (14), естественно, система урезается до некоторого порядка N .

Рассмотрим теперь случай локального изменения мощности слоя, когда нижняя граница задана в виде

$$Z = \begin{cases} h & \text{при } y < 0, \\ H & \text{при } 0 < y < 2d, \quad H > h, \\ h & \text{при } y > 2d, \end{cases}$$

Так как при этом поля симметрии по y относительно $y=d$, то мы можем ограничиться рассмотрением полей при $y \leq d$. При этом магнитное поле может быть представлено в виде

$$H_x = \frac{\cos k(h-z)}{\cos kh} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{\Gamma_n y} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{h} \quad \text{при } y < 0, \quad (18)$$

$$H_x = \frac{\cos k(H-z)}{\cos kH} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[e^{-\gamma_n y} + e^{\gamma_n(y-2d)}]}{1 + e^{-2\gamma_n d}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi z$$

при $0 < y < d$. (19)

Естественно, при $d \rightarrow \infty$ мы получаем выражения (3), (4).

Произведя сшивания H_x и $\frac{\partial H_x}{\partial y}$ при $y=0$, найдем

$$b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn} a_n + f_m, \quad (20)$$

$$a_m = \delta_m \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn} b_n, \quad (21)$$

где

$$\delta_m = \frac{1 + e^{-2\gamma_m d}}{1 - e^{-2\gamma_m d}}. \quad (22)$$

Величины α_{mn} , β_{mn} , f_m определяются формулами (10)–(13) из предыдущего случая. Система уравнений для определения b_m будет иметь вид

$$b_m = \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} b_n + f_m, \quad B_{mn} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \beta_{mi} \alpha_{in}. \quad (23)$$

В случае локального поднятия, когда нижняя граница слоя задана в виде

$$z = \begin{cases} H & \text{при } y < -2d, \\ h & \text{при } -2d < y < 0, \quad h < H, \\ H & \text{при } y > 0, \end{cases}$$

удобнее рассмотреть поле H_x при $y > -d$, представив в виде

$$H_x = \frac{\cos k(h-z)}{\cos kh} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{e^{\Gamma_n y} + e^{-\Gamma_n(y+2d)}}{1 + e^{-2\Gamma_n d}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{h},$$

$-d < y < 0,$ (24)

$$H_x = \frac{\cos k(H-z)}{\cos kH} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\gamma_n y} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{H}, \quad y > 0. \quad (25)$$

Произведя сшивание H_x и $\frac{\partial H_x}{\partial y}$ при $y=0$, найдем

$$b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn} a_n + f_m, \quad (26)$$

$$a_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_n} \alpha_{mn} b_n, \quad (27)$$

где α_{mn} , β_{mn} , f_m и δ_n определяются выражениями (10)–(13) и (22). Система уравнений для определения b_m будет иметь вид

$$b_m = \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} b_n; \quad C_{mn} = \frac{1}{\delta_n} \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{mi} \alpha_{in} = \frac{1}{\delta_n} A_{mn}. \quad (28)$$

Таким образом, мы имеем единый алгоритм расчета для всех трех случаев неоднородной нижней границы слоя. Так как сходимость достаточно медленная, то при численном расчете приходится брать 40–50 коэффициентов ряда Фурье, при этом сшивание решений происходит с точностью до трех, четырех знаков. На рис. 1 приведен пример расчета импеданса для ступени ($d=\infty$) при $\chi h=0,1$, величина $\frac{H}{h}=1,5; 2; 3$. На графиках представлена величина

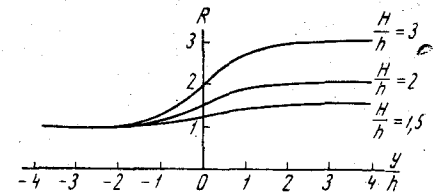


Рис. 1

Рис. 1

$$R = -\frac{1+i}{k} \sigma Z. \quad (29)$$

Г. А. КОКОТУШКИН

О РАСЧЕТЕ МАГНИТО-ТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ПОЛЯ E-ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ СЛОЯ ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ

Развитие методов магнито-теллурического зондирования и магнито-теллурического профилирования привело к необходимости исследования импеданса для неоднородных сред. Если параметры среды зависят от двух координат (здесь рассматриваются именно такие задачи), то тензор импеданса имеет вид

$$\tilde{Z} = \begin{pmatrix} Z_E & 0 \\ 0 & Z_M \end{pmatrix},$$

где Z_E и Z_M соответственно импедансы электрически и магнитно-поляризованных магнито-теллурических полей. Магнитный импеданс достаточно полно исследован в работах [1—5], где для его вычисления применены и исследованы обобщенный метод Галеркина и метод интегральных уравнений.

Для вычисления электрического импеданса Z_E наиболее удобен в настоящее время метод интегральных уравнений. Этой задаче и посвящена данная работа.

Считая магнитную проницаемость постоянной, всюду равной μ , в случае E -поляризации для электрического и магнитного полей имеем

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \{E_x, 0, 0\}, \quad \vec{H} = \{0, H_y, H_z\}, \\ H_y &= \frac{1}{i\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть дан слой (рис. 1). Верхняя граница есть плоскость $z=0$, нижняя — поверхность вида

$$z(y) = \begin{cases} h, & |y| > l, \\ H, & |y| \leq l, \end{cases}$$

причем H может быть как больше, так и меньше h .

Пренебрегая токами смещения, волновое число внутри слоя считаем равным $k = \sqrt{i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}}$, где $\text{Re } k > 0$. Волновое число вне слоя k_0 будем считать много меньше k по модулю: $|k_0| \ll |k|$. Для E_x имеем [6]

$$\begin{aligned} \Delta E_x + k_0^2 E_x &= 0, \quad z < 0, \\ \Delta E_x + k^2 E_x &= 0, \quad 0 < z < z(y), \\ \Delta E_x + k_0^2 E_x &= 0, \quad z > z(y). \end{aligned} \quad (2)$$

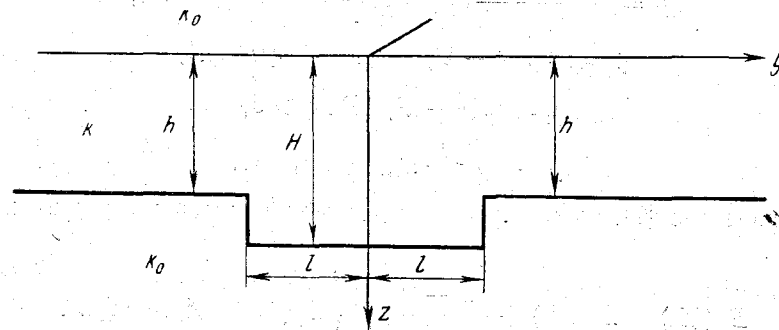


Рис. 1

Представим E_x в виде

$$E_x = E_x^0 + E_x^1, \quad (3)$$

где E_x^0 — решение уравнений (2) для $z(y) \equiv h$. (H_y также равно $H_y^0 + H_y^1$, причем $H_y^0 = \frac{1}{i\omega\mu} \cdot \frac{\partial E_x^0}{\partial z}$.) Из условия непрерывности электрического поля и его нормальной производной легко находим E_x^0 :

$$E_x^0 = 2 \frac{k_0 k \cos k(z-h) + i k_0^2 \sin k(z-h)}{2k_0 k \cos kh - i(k^2 + k_0^2) \sin kh}, \quad 0 < z < h. \quad (4)$$

Выпишем теперь функцию Грина для одного слоя в случае E -поляризации [6]:

$$G(M, M_0) = \int_0^\infty \cos \lambda(y - y_0) g_i(z, z_0, \lambda) d\lambda, \quad (5)$$

где при $z_0 > h$

$$g_1 = \frac{1}{\eta_0} e^{-\eta_0 |z-z_0|} + \frac{2(k^2 - k_0^2) \operatorname{sh} \eta h e^{-\eta_0(z+z_0-2h)}}{\eta_0 \rho}, \quad (6)$$

$$z > h,$$

при $0 < z_0 < h$

$$g_2 = \frac{1}{\eta} e^{-\eta |z-z_0|} + \frac{2[(\eta - \eta_0)^2 e^{-\eta h} \operatorname{ch} \eta(z-z_0) - (k^2 - k_0^2) \operatorname{ch} \eta(z+z_0-h)]}{\eta \rho},$$

$$0 < z < h,$$

$$g_3 = \frac{4e^{-\eta_0(z-h)}}{\rho} (\eta \operatorname{ch} \eta z_0 + \eta_0 \operatorname{sh} \eta z_0), \quad z > h,$$

$$\rho = 2[(2\lambda^2 - k^2) \operatorname{sh} \eta h + 2\lambda \eta \operatorname{ch} \eta h],$$

$$\eta = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \operatorname{Re} \eta > 0,$$

$$\eta_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}, \quad \operatorname{Re} \eta_0 > 0.$$

Как известно [7], электрическое поле может быть представлено в виде

$$E_x(M_0) = E_x^0(M_0) + \frac{k^2 - k_0^2}{2\pi} \int_{-l}^l \int_h^H E_x(M) G(M, M_0) dy dz. \quad (7)$$

Учитывая, что высота геометрической неоднородности много меньше длины волны в слое, т. е.

$$|k| |H - h| \ll 1,$$

можно считать, что электрическое поле практически не меняется по z внутри неоднородности. Поэтому заменим соотношение (7) следующим:

$$E_x(M_0) = E_x^0(M_0) + \frac{k^2 - k_0^2}{2\pi} \int_{-l}^l E_x(y, h) K(y, y_0, z_0) dy, \quad (8)$$

где

$$K(y, y_0, z_0) = \int_h^H G(y, y_0, z, z_0) dz, \quad (9)$$

причем функция $G(y, y_0, z, z_0)$ интегрируема в квадратурах при $H = \text{const}$.

Данная задача решалась при $k_0 = 0$. Легко видеть, что первичное поле E_x^0 в этом случае непосредственно не вычисляется. Однако, учи-

тывая, что мы считаем импеданс $Z = \frac{E_x}{H_y} \Big|_{z=0}$ магнито-теллурического поля, можно обойтись без вычисления E_x^0 при $k_0 = 0$. Сделаем это таким образом: пронормируем электрическое поле на первичное поле в точке $z = h$, т. е. введем функцию $u(y, z)$:

$$u(y, z) = \frac{E_x(M)}{E_x^0(h)}. \quad (10)$$

Из (4), считая $|k_0| \ll |k|$, получим

$$E_x^0(0) = \frac{2ik_0}{k} \operatorname{ctg} kh, \quad H_y^0(0) = \frac{2k_0}{\omega \mu}, \quad E_x^0(h) = \frac{2ik_0}{k \sin kh}.$$

Теперь

$$Z = \frac{E_x}{H_y} \Big|_{z=0} = \frac{E_x^0 + E_x^1}{H_y^0 + H_y^1} \Big|_{z=0} = Z_0 Q(y), \quad (11)$$

где $Z_0 = \frac{i\omega \mu}{k} \operatorname{ctg} kh$ — импеданс плоскопараллельного слоя,

$Q(y) = k \operatorname{tg} kh \frac{u(y, z=0)}{\frac{du(y, z=0)}{dz}}$ — функция влияния неоднородности.

Из (8) получим теперь интегральное соотношение для функции $u(y, z)$:

$$u(y_0, z_0) = \frac{E_x^0(z_0)}{E_x^0(h)} + \frac{k^2}{2\pi} \int_{-l}^l u(y, h) K(y, y_0, z_0) dy. \quad (12)$$

Для уменьшения объема вычислений, используя симметрию функции $u(y, z)$ относительно оси z , преобразуем (12) к виду

$$\int_{-l}^l u(y, h) K(y, y_0, z_0) dy = \int_{-l}^0 + \int_0^l = \int_0^l u(y, h) K(-y, y_0, z_0) dy +$$

$$+ \int_0^l u(y, h) K(y, y_0, z_0) dy = \int_0^l u(y, h) \Phi(y, y_0, z_0) dy$$

и

$$u(y_0, z_0) = \frac{E_x^0(z_0)}{E_x^0(h)} + k^2 \int_0^l u(y, h) \Phi(y, y_0, z_0) dy, \quad (13)$$

где

$$\Phi(y, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} (K(y, y_0, z_0) + K(-y, y_0, z_0)).$$

Опустив точку M_0 на границу $z=h$ (положив $z_0=h$), получим одномерное интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$u(y_0, h) - k^2 \int_0^l u(y, h) \Phi_1(y, y_0) dy = 1, \quad (14)$$

где при $H > h$

$$\Phi_1(y, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda y \cos \lambda y_0}{\lambda^2} \left[1 - e^{-\lambda s} + \frac{2k^2 \operatorname{sh} \eta h (1 - e^{-\lambda s})}{\rho} \right] d\lambda$$

и при $H < h$

$$\Phi_1(y, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda y \cos \lambda y_0}{\eta^2} \left[-1 + \frac{4\eta^2 \operatorname{sh} \eta H + 4\eta \lambda \operatorname{ch} \eta H + 2k^2 \operatorname{sh} \eta h}{\rho} \right] d\lambda,$$

где $s = H - h$.

Решив уравнение (14), получим $u(y, h)$. Теперь легко определить u и $\frac{\partial u}{\partial z}$ на поверхности слоя.

Из (13), положив $z_0 = 0$, имеем

$$u(y_0, 0) = \cos kh + k^2 \int_0^l u(y, h) \Phi_2(y, y_0) dy, \quad (15)$$

где при $H > h$

$$\Phi_2(y, y_0) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda y \cos \lambda y_0}{\lambda} \cdot \frac{\eta [1 - e^{-\lambda s}]}{\rho} d\lambda$$

и при $H < h$

$$\Phi_2(y, y_0) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda y \cos \lambda y_0}{\eta \rho} [\lambda + \eta \operatorname{sh} \eta s - \lambda \operatorname{ch} \eta s] d\lambda.$$

Дифференцируя (13) по z_0 при $z_0 = 0$, для $\frac{\partial u}{\partial z_0}$ получим

$$\frac{\partial u(y_0, 0)}{\partial z_0} = k \sin kh + k^2 \int_0^l u(y, h) \Phi_3(y, y_0) dy, \quad (16)$$

где при $H > h$

$$\Phi_3(y, y_0) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda y \cos \lambda y_0 \frac{\eta (1 - e^{-\lambda s})}{\rho} d\lambda$$

и при $H < h$

$$\Phi_3(y, y_0) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda y \cos \lambda y_0 \frac{\lambda}{\eta \rho} [\lambda + \eta \operatorname{sh} \eta s - \lambda \operatorname{ch} \eta s] d\lambda.$$

При вычислении несобственных интегралов $\Phi_i(y, y_0)$ встречаются определенные трудности, так как подынтегральные функции медленно стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Так, подынтегральная функция в Φ_1 ведет себя на бесконечности как $\frac{\cos \lambda y \cos \lambda y_0}{\lambda^2}$ и верхний предел интегрирования приходится брать очень большим. Однако, используя то, что подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{\cos \lambda y \cos \lambda y_0}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty,$$

будем считать Φ_1 таким образом: выберем верхний предел интегрирования A для второго слагаемого. Для Φ_1 получим

$$\Phi_1 \approx \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^A + \int_A^\infty \frac{\cos \lambda y \cos \lambda y_0}{\lambda^2} d\lambda \right\}.$$

Взяв по частям второй интеграл в полученном равенстве, выберем верхний предел B для него. Таким образом,

$$\Phi_1 \approx \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^A + \frac{2}{y^2 - y_0^2} \int_A^B \frac{v(\lambda)}{\lambda^3} d\lambda + \frac{y_0 \sin Ay \cos Ay_0 - y \sin Ay_0 \cos Ay}{A^2 (y^2 - y_0^2)} \right\},$$

где $v = y \cos \lambda y \sin \lambda y_0 - y_0 \sin \lambda y \cos \lambda y_0$. Здесь Φ_1 приведено при $H > h$. Для случая $H < h$ все рассуждения аналогичны.

В Φ_2 и Φ_3 подынтегральные функции ведут себя на бесконечности как $\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda q}$ и $\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda q}$, где $q = \min(h, H)$. Оценка таких интегралов не представляет трудностей.

Кроме того, при замене интегрального оператора системой линейных алгебраических уравнений, считать приходится только строку и столбец матрицы, так как ядро зависит от модуля разности и суммы аргументов.

Таким образом, используя приведенные выше рассуждения, удалось добиться приемлемого времени счета данной задачи.

Примечание. Используя данный метод решения задачи для E -поляризованного магнито-теллурического поля, можно, конечно, решать задачи в более общем случае, предполагая

$H=H(y)$. В этом случае интегральные операторы (14—16) будут содержать интегралы по контуру $H(y)$, $|y| \leq l$, а ядром будет

$$K(y, y_0, z_0) = \int_h^{H(y)} G(y, y_0, z, z_0) dz \quad (\text{ср. с (9)}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В. И. Метод расчета магнито-теллурического поля в неоднородном слое с произвольным изгибом нижней поверхности. «Прикладная геофизика», 1965, вып. 41.
2. Дмитриев В. И. К вопросу о расчете магнито-теллурического поля в слое с произвольным изгибом нижней поверхности в случае H -поляризации. «Прикладная геофизика», 1968, вып. 51.
3. Дмитриев В. И., Кокотушкин Г. А. Исследование метода расчета магнито-теллурического поля в слое переменной мощности. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.
4. Дмитриев В. И., Кокотушкин Г. А. Метод интегральных уравнений в задаче о магнито-теллурическом слое переменной мощности. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.
5. Дмитриев В. И., Кокотушкин Г. А. Магнито-теллурическое поле в слое со ступенчатым изменением толщины слоя. «Прикладная геофизика», 1968, вып. 52.
6. Дмитриев В. И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде. В сб.: «Вычислительные методы и программирование», вып. X. Изд-во МГУ, 1968.

РАЗДЕЛ V

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА

Е. П. ВЕДЕНЕЕВ, Н. П. ЖИДКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ К ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЮ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ЗАДАННОЙ ТАБЛИЧНО

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на $[a, b]$ задана непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$. Тогда ее производная $f'(x)$, по определению, удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра I рода:

$$f(x) = \int_c^x f'(t) dt + f(c), \quad (1)$$

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq c \leq b.$$

Задача нахождения $f'(x)$ из уравнения (1) некорректна по Адамару, поэтому для решения этого уравнения нами был применен метод регуляризации, предложенный А. Н. Тихоновым в работе [1]. Рассмотрим функционал

$$\mathfrak{M}_\beta [y] = \int_a^b [y(x) - f(x)]^2 dx + \beta^2 \int_a^b [y''(x)]^2 dx \quad (2)$$

и будем его минимизировать на классе функций $\{y(x)\}$, четырежды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ и удовлетворяющих следующим краевым условиям:

$$\left. \begin{aligned} y(a) &= f(a), & y(b) &= f(b), \\ y'(a) &= f'(a), & y'(b) &= f'(b). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь

$$y(x) = \int_c^x z(t) dt + f(c), \quad (4)$$