1. Пусть A и B — линейные операторы в конечномерном унитарном пространстве,
$$\|A\|^2 = \sup_{x\neq\theta} \frac{(Ax, Ax)}{(x, x)},$$
$\|AB\| \leqslant 1$, $\|BA\| \leqslant 1$, $A = A^* > 0$. Доказать, что $\left\|A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\right\| \leqslant 1$.

2. Доказать, что всякий линейный оператор в унитарном пространстве представим в виде линейной комбинации четырёх унитарных операторов.

3. Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — рациональные числа: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$ Сходится ли ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+n_k}}?$$

4. Найти главный член интеграла $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{i\mu} \frac{e^{-ix}dx}{x+1}$ при $\mu \to +\infty$.

5. Доказать, что интервал $(0, 1)$ можно покрыть системой интервалов так, что каждое рациональное число будет покрыто конечным числом интервалов, а каждое иррациональное число — бесконечным числом интервалов.

6. Прямоугольник разрезан на конечное число прямоугольников (со сторонами, параллельными сторонам большого), у которых хотя бы одна из сторон целая. Доказать, что по крайней мере одна из сторон большого прямоугольника целая.

7. «Чёрный ящик» реализует неизвестную монотонную булеву функцию трёх переменных. На вход «черного ящика» можно последовательно подавать наборы, получая на выходе значения функции. Каждое последующее значение можно выбирать с учётом предыдущих. Какое количество наборов потребуется для восстановления функции в наихудшем случае?

8. Код в n-мерном булевом кубе называется $\langle n, 2d+1\rangle$-плотно упакованным, если при кодовом расстоянии $2d+1$ любой набор лежит внутри шара радиуса d с центром в кодовом слове. Известно, что для некоторого $n > 7$ существует $\langle n, 7\rangle$-плотно упакованный код. Найти это n.

9. Найти решение уравнения $u^2(u^2 - u'^2) = (u'^2 - uu'')^2$, удовлетворяющее начальным условиям $u(0) = u'(0) = 1$.

10. В самолете N мест, на которые купили билеты N пассажиров ($N > 1$). Первый пассажир садится на случайным образом выбранное место. Каждый следующий пассажир садится на своё место, если оно свободно, или на случайным образом выбранное свободное место, если его место занято. Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на своё место?