

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

Сборник трудов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета

Под редакцией
акад. А.Н. Тихонова,
акад. А.А. Самарского

Из содержания 1993г.,

- В.И. Дмитриев, Т. Ю. Шамеева.* О решении одной обратной задачи восстановления параметров ионосферы. **75**
- А. Л. Гусаров.** О единственности решения обратной двумерной задачи магнитотеллурического зондирования в H -поляризации. **86**
- В.И. Дмитриев, Н. А. Мерщикова, Т. Г. Павлова.* Исследование эквивалентности некоторых прямых задач магнитотеллурического зондирования. **169**
- И.В. Дмитриева.* Метод расчета диаграммы рассеяния решетки для квазитрехмерного поля. **182**

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ИОНОСФЕРЫ

Рассматривается обратная задача восстановления параметров ионосферы на больших расстояниях при ограниченных данных трассового зондирования и известной исходной модели состояния ионосферы. Состояние ионосферы характеризуется многими параметрами – концентрацией электронов, ионов, нейтральных частиц, частотой столкновения электронов и т.д. Однако основным параметром, влияющим на характеристики радиоволн, проходящих через ионосферу, является концентрация электронов. Распределение концентрации электронов $N(x, y, z)$ в изотропном случае непосредственно связано с диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - aN(x, y, z)/\omega^2,$$

где ω – частота электромагнитного поля, a – константа, определяемая массой и зарядом электрона.

Известно [1], что функция распределения концентрации электронов зависит в основном от высоты z и от координаты x – широты точки измерения. Вдоль направления y – координаты долготы – концентрация меняется значительно медленнее. Таким образом, в рассматриваемой модели ионосферы полагается $N(x, y, z) = N(x, z)$.

Время запаздывания сигнала τ на частоте ω в точке $(x_i, z = 0)$ существенным образом зависит от состояния ионосферы $N(x, z)$. Рассчитаем время запаздывания сигнала τ при заданном расстоянии x_i . Для расчета необходимо построить траекторию из точки $(x = 0, z = 0)$ в точку $(x_i, z = 0)$ при заданной частоте ω и $N(x, z)$:

$$\tau(\omega, x_i) = A(\omega, x_i, N(x, z)). \quad (1)$$

Исходная модель состояния ионосферы нам известна – $N_0(x, z)$. Считая, что состояние ионосферы меняется "в окрестности" $N_0(x, z)$ достаточно медленно, линеаризуем уравнение (1) в окрестности $N_0(x, z)$:

$$\tau(\omega, x_i) = A(\omega, x_i, N_0(x, z)) + \delta A(\omega, x_i, N_0). \quad (2)$$

Левая часть уравнения (2) представляет собой ограниченные экспериментальные данные трассового зондирования для модельного состояния ионосферы. Требуется, зная

$$\delta\tau(\omega, x_i) = \tau(\omega, x_i) - A(\omega, x_i, N_0(x, z)) = \delta A(\omega, x_i, \delta N), \quad (3)$$

вычислить $\delta N(x, z)$, т.е. восстановить параметры ионосферы. Поскольку данных трассового зондирования мало (т.е. набор $\delta\tau$ ограничен), то для определения $\delta N(x, z)$ требуется сделать некоторые дополнительные предположения:

- 1) $\|\delta N(x, z)\| \leq \delta$, т.е. состояние ионосферы меняется несильно;
- 2) $\delta N(x, z)$ представимо в виде ряда

$$\delta N(x, z) = \sum_{k=1}^m a_k(x, z) * p_k, \quad (4)$$

где $a_k(x, z)$ – некоторая известная ортонормированная система функций, p_k – неизвестные коэффициенты разложения.

Линейность оператора δA означает, что

$$\delta\tau_k(w, x_i) = \delta A(w, x_i, a_k(x, z)). \quad (5)$$

Тогда обратная задача восстановления параметров ионосферы $N(x, z)$ сводится к задаче отыскания коэффициентов p_k разложения $N(x, z)$ в ряд по $a_k(x, z)$. Требуется решить задачу минимизации функционала

$$J(p) = \left\| \delta\tau(w) - \sum_{k=1}^m p_k \delta\tau_k(w) \right\|_{L_2}^2, \quad (6)$$

где $p = \{p_k, k = \overline{1, m}\}$.

Для решения задачи минимизации функционала $J(p)$

$$J(p) \rightarrow \inf, \quad p \in E^m, \quad (7)$$

прежде всего необходимо исследовать его свойства. Нетрудно показать, что этот функционал является непрерывным и выпуклым функционалом на выпуклом множестве E^m . Для доказательства дифференцируемости функционала $J(p)$ выпишем приращение функционала:

$$\delta J = J(p + \delta p) - J(p) =$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_b} \left(\left| \delta\tau(w) - \sum_{k=1}^m (p_k + \delta p_k) \delta\tau_k(w) \right|^2 - \left| \delta\tau(w) - \sum_{k=1}^m p_k \delta\tau_k(w) \right|^2 \right) dw =$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega_b} \left| \sum_{k=1}^m \delta p_k \delta\tau_k(w) \right|^2 dw - 2 \int_{\omega_0}^{\omega_b} \sum_{k=1}^m \delta p_k \delta\tau_k(w) \left(\delta\tau(w) - \sum_{l=1}^m p_l \delta\tau_l(w) \right) dw =$$

$$\left\| \sum_{k=1}^m \delta p_k \delta\tau_k(w) \right\|_{L_2}^2 - 2 \sum_{k=1}^m \delta p_k \left(\int_{\omega_0}^{\omega_b} \delta\tau_k(w) \left(\delta\tau(w) - \sum_{l=1}^m p_l \delta\tau_l(w) \right) dw \right).$$

Нетрудно показать, что

$$\lim \left\| \sum_{k=1}^m \delta p_k \delta\tau_k(w) \right\|_{E^m}^2 / \|\delta p\|_{E^m} = 0, \quad \|\delta p\| \rightarrow 0.$$

Поэтому приращение функционала $J(p)$ представимо в виде

$$\delta J = \langle g(p), \delta p \rangle + O(\delta p),$$

где

$$g(p) = \left(-2 \int_{\omega_0}^{\omega_b} \delta\tau_k(w) \left(\delta\tau(w) - \sum_{l=1}^m p_l \delta\tau_l(w) \right) dw, k = \overline{1, m} \right). \quad (8)$$

Таким образом, функционал $J(p)$ типа (6) является непрерывно дифференцируемым на E , т.е. $J(p) \in C^1(E^m)$. Главная часть приращения δJ будет определять дифференциал функции $dJ(p) = \langle g(p), \delta p \rangle_{E^m}$ и функция $g(p)$ вида (8) определяет градиент функционала [2].

Для решения задачи минимизации функционала $J(p)$ вида (6) можно использовать различные универсальные методы (например, градиентные методы и др. [2]). Для данного функционала нам представляется более удобным воспользоваться одним из специальных алгоритмов, разработанных для задач о наименьших квадратах [3]. Опишем применение метода Левенберга–Маркардта к нашей задаче.

Для этого прежде всего заменим интеграл в формуле (6) суммой с помощью квадратурной формулы и сведем задачу (6) к задаче о наименьших квадратах:

$$\sum_{l=1}^L \left(\delta\tilde{\tau}(w_l) - \sum_{k=1}^m p_k \delta\tilde{\tau}_k(w_l) \right)^2 + \alpha_k \sum_{k=1}^m (p_k - p_k^0)^2 \rightarrow \inf, \quad p \in E^m, \quad (9)$$

где $\delta\tilde{\tau}(w)$, $\delta\tilde{\tau}_k$ – произведения $\delta\tau$ и $\delta\tau_k$ на веса принятой квадратурной схемы.

Для применения метода Левенберга–Маркардта прежде всего выпишем матрицу Якоби $Y(p)$ для $\delta\tau$, пользуясь вычисленной формулой (8) градиента функционала $g(p)$:

$$Y(p) = \left(-2 \sum_{l=1}^m \left(\delta\tilde{\tau}(w_l) - \sum_{n=1}^m p_n \delta\tilde{\tau}_n(w_l) \right) \delta\tilde{\tau}_k(w_l) + \right. \\ \left. \alpha_k (p_k - p_k^0); \quad k = \overline{1, m} \right). \quad (10)$$

и вычислим матрицу Гессе $G(p)$; $G_k(p)$ для $p_k \delta \tau_k(w)$ имеет вид

$$G_k(p) = Y_k(p)^T Y_k(p) + \sum_{l=1}^m p_l \delta \tau_l(w) G_l(p). \quad (11)$$

Градиент $g(p)$ функционала $J(p)$ и матрица Гессе $G(p)$ функционала $J(p)$ представляются в виде

$$g(p) = Y(p)^T; \quad G(p) = Y(p)^T Y(p) + Q(p), \quad \text{где } Q(p) = \sum_{l=1}^m G_l(p). \quad (12)$$

Алгоритм решения задачи методом Левенберга-Маркардта опирается на предположение о том, что слагаемое $Y(p)^T Y(p)$ в $G(p)$ рано или поздно станет доминирующим.

Направление поиска определяется как решение системы уравнений

$$(Y_k)^T Y_k + \lambda_k I) s_k = -Y_k^T, \quad (13)$$

где λ_k - некоторое положительное число.

Шаг вдоль s_k всегда полагается единичным, т.е. следующей точкой будет

$$p_{k+1} = p_k + s_k. \quad (14)$$

Можно показать, что s_k представляет собой решение задачи на условный минимум вида $\min \|Y_k s + p_k \delta \tau_k(w)\|_{L_2}^2$, $s \in E^m$, при ограничении типа $\|s\| \leq d$, где параметр d связан с λ_k .

Монотонное убывание минимизируемого функционала достигается в методе Левенберга-Маркардта за счет подбора "хороших" значений. При $\lambda_k = 0$ s_k будет направлением метода Гаусса-Ньютона [3], при $\lambda_k \rightarrow \infty$ норма $\|s_k\| \rightarrow 0$ и вектор s_k в пределе становится параллельным антиградиенту. Следовательно, неравенство $J(p_k + s_k) < J(p)$ всегда можно обеспечить, выбрав λ_k достаточно большим.

Применение метода Левенберга-Маркардта для решения задачи минимизации функционала (6) позволяет построить минимизирующую последовательность $\{p_k\}$, сходящуюся к набору коэффициентов p^* , определяющих функцию $\delta N(x, z)$ - изменение состояния ионосферы по формуле (4).

Из физического смысла обратной задачи восстановления параметров ионосферы следует, что эта задача является неустойчивой и приближенное решение задачи (6), отвечающее неточным входным данным, может как угодно сильно отличаться от искомого точного решения.

Для решения таких некорректных экстремальных задач необходимо построить регуляризующий функционал, который позволит получить приближенное решение задачи (6), устойчивое

к малым изменениям исходных данных [4]. Важную роль играет правильный выбор стабилизирующего функционала $Q(p)$, определенного для всех $p \in E^m$. Введение стабилизирующего функционала позволяет гарантировать построение такой минимизирующей последовательности $\{p_k\}$ для решения задачи (6), (7), которая обладает, во-первых, свойством компактности в E^m (так как множество $\Omega_C = \{p : \Omega(p) < C\}$ компактно, и $\{p_k\} \in \Omega_C$ и, во-вторых, свойством сходимости $\{p_k\}$ ко множеству P^* -решений задачи (6), (7) (в силу свойства непрерывности минимизируемого функционала $J(p)$ и непустоты множества $P^* \neq \emptyset$).

В качестве такого стабилизатора $\Omega(p)$ выберем для нашей задачи функционал следующего вида:

$$\Omega(p) = \|p - p_0\|^2, \quad p \in E^m. \quad (15)$$

Нетрудно проверить, что этот функционал удовлетворяет всем свойствам стабилизатора.

Для построения минимизирующей последовательности $\{p_k\}$, сходящейся к множеству P^* -точек минимума $J(p)$ на E^m , определим функцию Тихонова [4, 5]:

$$T_k(p) = J(p) + \alpha_k \Omega(p), \quad p \in E^m, \quad (16)$$

при каждом $k = 1, 2, \dots$. Здесь $\{\alpha_k\}$ - некоторая положительная последовательность, сходящаяся к нулю.

Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала

$$T_k(p) = \int_{\omega_0}^{\omega_b} \left| \delta \tau(w) - \sum_{l=1}^m p_l \delta \tau_l(w) \right|^2 dw + \alpha_k \|p - p_0\|^2. \quad (17)$$

Для каждого $k = 1, 2, \dots$ определяется точка p_k , удовлетворяющая условиям

$$T_k^* = \inf T_k(p) \leq T_k(p_k) \leq T_k^* + \varepsilon_k, \quad p_k \in E^m, \quad (18)$$

где ε_k характеризует точность решения задачи минимизации (17) на E^m , $\varepsilon_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$. Такая точка p_k существует по определению нижней грани, так как $\varepsilon_k > 0$, а $T_k(p)$ ограничена снизу на E^m , поскольку $T_k(p) \geq J(p) \geq J^* > -\infty$, $p \in E^m$ (так как $\Omega(p) \geq 0$, $\alpha_k > 0$, $\inf J(p) = J^* > -\infty$).

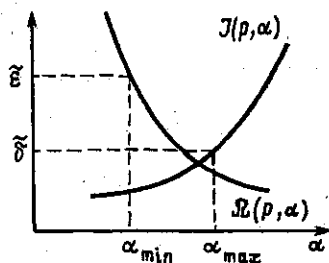
Задача минимизации функционала $T_k(p)$ на E^m обладает большим "запасом устойчивости", чем исходная задача. Однако это не гарантирует того, что последовательность $\{p_k\}$, определяемая условием (18), будет минимизирующей и регулярной в метрике

пространства E^m . При уменьшении значения параметра уменьшается второе слагаемое в (17) и, следовательно, тем меньше становится "запас устойчивости" в задаче минимизации $T_k(p)$ на E^m .

Для получения последовательности $\{p_k\}$ с требуемыми свойствами уменьшение "запаса прочности" должно быть компенсировано согласованным изменением величин α_k, ε_k , являющихся параметрами метода. Произвол в выборе этих параметров может привести к тому, что последовательность $\{p_k\}$, определяемая условиями (18), не будет сходиться к P^* . Условия согласования параметров α_k и ε_k для данного метода таковы [5]:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0, \quad \sup_{k \geq 1} \varepsilon_k / \alpha_k < \infty. \quad (19)$$

Условия (19) можно проиллюстрировать следующим образом (см. рисунок).



В качестве оптимального значения параметра α_{opt} будем выбирать минимальное α из всех возможно допустимых, т.е.

$$\alpha_{opt} = \alpha_{min},$$

$$\alpha_{min} = \min\{\alpha : J(p, \alpha) \leq \delta, \quad \Omega(p, \alpha) \leq \tilde{\varepsilon}\}.$$

Отметим, что в случае если $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k / \alpha_k = 0$, гарантируется сходимость построенной последовательности $\{p_k\}$ к множеству Ω -нормальных решений задачи минимизации $J(p)$ на E^m , т.е. $\{p_k\} \rightarrow p^*$ такому, что $\Omega(p^*) = \inf \Omega(p), p \in E^m$.

Таким образом, для получения устойчивого решения обратной задачи восстановления параметров ионосферы, сформулированной как задача минимизации функционала вида (6) на E^m , при численной реализации алгоритма метода Левенберга-Маркардта необходимо использовать регуляризующий функционал вида (17), значения параметров λ_k, α_k и ε_k должны быть согласованы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грудинская Г.В. Распространение радиоволн. М.: Наука, 1977.
2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
3. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
5. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1984.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ В H -ПОЛЯРИЗАЦИИ

Обратная задача магнитотеллурического зондирования (МТЗ) состоит в определении электропроводности глубинных слоев Земли по измеренным на поверхности Земли вариациям магнитного поля Земли. К настоящему времени подробно изучена, численно и аналитически, одномерная модель, и ведется изучение двумерных моделей обратной задачи МТЗ. В одномерном случае теорема единственности решения обратной задачи МТЗ доказана А.Н. Тихоновым [1], в двумерном случае в E -поляризации - в работах [2], [3]. Некоторые частные случаи теоремы единственности в H -поляризации разобраны в работах [4], [5], одна из которых [4] носит полуэвристический характер. В данной работе будет доказана теорема единственности решения обратной двумерной задачи МТЗ в H -поляризации в классе гладких кусочно-аналитических проводимостей.

Точная постановка задачи такова. Имеется система уравнений Максвелла в H -поляризации в \mathbb{R}^2 (токами смещения пренебрегаем):

$$\begin{cases} \partial E_2 / \partial x_1 - \partial E_1 / \partial x_2 = i\omega \mu_0 H_3, \\ \partial H_3 / \partial x_2 = \sigma E_1, \\ -\partial H_3 / \partial x_1 = \sigma E_2. \end{cases} \quad (1)$$

Магнитную проницаемость μ_0 считаем постоянной во всем \mathbb{R}^2 и равной 1. Проводимость σ равна нулю в верхней полуплоскости $x_1 < 0$ и заключена между двумя положительными константами c_1 и c_2 в нижней полуплоскости $x_1 \geq 0$. Падающая на нижнюю полуплоскость волна характеризуется в верхней полуплоскости своей амплитудой $H_3 = \text{const}$. Проводимость σ считается C^{20} -гладкой в $Q = \{x | x_1 \geq 0\}$, при этом предполагаем, что все производные σ - ограниченные в Q функции. Кроме того, σ считаем кусочно-аналитической в следующем смысле: в Q имеется конечное число аналитических кривых $x_1 = \varphi_j(x_2)$ (φ_j - аналитические функции $x_2, x_2 \in \mathbb{R}^1, \varphi_0 \equiv 0$), причем разность $\varphi_j - \varphi_{j-1}, j \geq 1$ заключена между двумя положительными постоянными. Кроме того, $\varphi_j(x_2) \rightarrow C_j, x_2 \rightarrow \infty, C_j = \text{const} > 0, d\varphi_j/dx_2 \rightarrow 0$ при $x_2 \rightarrow \infty$. Предположим еще, что в каждом слое может находиться конечное число ограниченных непересекающихся вместе с замыканием областей Ω_i с аналитическими границами, компактно

принадлежащих S_j . Проводимость σ будем считать аналитической в замыкании всех тех областей, на которые Q делится всеми упомянутыми кривыми, т.е. границами слоев и границами Ω_i . Кроме того, предположим, что $\sigma(x_1, x_2) = \sigma_\infty(x_1) + \sigma'(x_1, x_2)$, где $\sigma_\infty \in C^{20}(\mathbb{R}_+)$ и $\sigma' \in C^{20}(Q)$ (при этом подразумевается, что все производные σ_∞ по x_1 и σ' по x_1 и x_2 - ограниченные соответственно в \mathbb{R}_+ и Q функции). Относительно σ' предполагается $D^\alpha \sigma'(x_1, x_2) \rightarrow 0$ при $x_2 \rightarrow \infty, |\alpha| = 0, 1, 2$ равномерно по $x_1 \in [0, \infty)$. Единственное решение системы (1) выделяется требованиями:

- а) H_3 ограничено равномерно по $x_1 \in [0, \infty)$ при $x_2 \rightarrow \infty,$ (2)
- б) $H_3 \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow +\infty$ равномерно по $x_2 \in \mathbb{R}_+^1.$

На "поверхности Земли" $s_0 = \{x | x_1 = 0\}$ считается известным импеданс $I(x_2, \omega) = E_2/H_3(x_2, \omega) = \sigma^{-1}(-\partial H_3/\partial x_1)/H_3.$

Теорема. Проводимость из указанного класса однозначно определяется по известному $I(x_2, \omega)$ в некотором интервале частот (ω_1, ω_2) и $x_2 \in \mathbb{R}_1.$

Доказательство. Вместо системы (1), (2) рассмотрим в Q эквивалентное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + i\omega u = 0, \quad (3)$$

где $u = H_3,$ единственное решение которого в Q выделяется требованиями

- а) $u = \text{const}$ при $x_1 = 0$
- б) u ограничено равномерно по $x_1 \in [0, \infty)$ при $x_2 \rightarrow \infty.$ (4)
- в) $u \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow +\infty$ равномерно по $x_2 \in \mathbb{R}^1.$

Нам надо показать, что если в Q имеются два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + i\omega u_1 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + i\omega u_2 = 0 \quad (6)$$

($a_i = 1/\sigma_i, i = 1, 2,$ принадлежат указанному выше классу), единственные решения которых выделяются условиями (4), то из равенства

$$a_1(-\partial u_1/\partial x_1)/u_1 = a_2(-\partial u_2/\partial x_1)/u_2 \quad (7)$$

при $x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}^1, \omega \in (\omega_1, \omega_2)$ следует, что $a_1 \equiv a_2.$

Для доказательства теоремы в полном объеме требуется рассмотреть ряд случаев, мы ограничимся описанием основного. Рассмотрим множество Q_1 точек, где априори предполагается $a_1 \equiv a_2$, содержащее связное открытое множество, имеющее s_0 частью своей границы.

Пронормируем u_i таким образом, чтобы на s_0

$$u_1 = u_2 = 1. \quad (8)$$

Тогда из равенства импедансов (7) следует

$$\partial u_1 / \partial x_1(0, x_2, \omega) = \partial u_2 / \partial x_1(0, x_2, \omega), \quad \omega \in (\omega_1, \omega_2), \quad x_2 \in \mathbb{R}^1. \quad (9)$$

Из условий (8) и (9) мы выведем, что $a_1 \equiv a_2$, и тем самым теорема (в указанном случае) будет доказана. Заменим (5), (6) на уравнения, получающиеся из (5), (6) аналитическим продолжением по ω :

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) - \omega u_1 = 0, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right) - \omega u_2 = 0, \quad (11)$$

где $\omega \in (0, \infty)$. Условия (8) и (9) считаем выполненными и для решений (10), (11). Для разности $v_0 = u_1 - u_2$ имеем уравнение

$$(L_1 - \omega)v_0 \equiv \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_1(x) \frac{\partial v_0}{\partial x_j} \right) - \omega v_0 = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left((a_2 - a_1) \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right). \quad (12)$$

По теореме единственности решения задачи Коши для эллиптических уравнений $v_0 = 0$ на Q'_1 , где Q'_1 — замыкание наибольшего открытого связного множества, имеющего s_0 частью своей границы. Пусть $Q_2 = Q \setminus Q'_1$. Введем в Q риманову метрику $ds^2 = 1/a_2(x)(dx_1^2 + dx_2^2)$. На ∂Q_2 может существовать либо не существовать точка x_0 , ближайшая к s_0 во введенной метрике. Представим схему доказательства лишь в случае, когда такая точка существует.

Будем разыскивать на Q'_1 в окрестности x_0 точку y_0 , в которой $v_0(y_0, \omega) \neq 0$ при достаточно большом ω . Это приведет к противоречию с предыдущим утверждением и тем самым теорема будет доказана.

Пусть $z_0 \in \partial Q_2$ — точка, лежащая в достаточно малой окрестности x_0 , и $r > 0$ достаточно мало (условия на близость z_0 к

x_0 и малость r возникают постепенно в ходе доказательства теоремы). Пока потребуем лишь, чтобы r было так мало, что в открытом полукруге $Q_r^{z_0} \cap Q_z(Q_r^{z_0} = \{x \mid |x - z_0| < r\})$ функция $a_2 - a_1$ сохраняла бы знак.

Пусть n_0 — внешняя нормаль к ∂Q_2 в точке z_0 и y_0 лежит на n_0 на евклидовом расстоянии $r/10$ от точки z_0 . Покажем, что при некоторых условиях на z_0 и r точка y_0 является искомой.

Из (12) имеем

$$v_0(y_0, \omega) = \int_{Q_2} G_1(y_0, y, \omega) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ [a_2(y) - a_1(y)] \frac{\partial u_2}{\partial y_j} \right\} dy, \quad (13)$$

где $G_1(y_0, y, \omega)$ — функция Грина уравнения (10) с нулевыми условиями Дирихле на бесконечности и s_0 . Пусть $T = \bar{Q}_2 \cap \bar{Q}_r^{y_0}$ и $r(x)$ — кратчайшее расстояние от s_0 до x во введенной метрике. Основную роль в доказательстве теоремы играет следующая лемма.

Лемма 1. При z_0 , достаточно близком к x_0 , можно подобрать столь малое $r > 0$, что на T имеет место асимптотика

$$u_2(x, \omega) = \Phi(x) \exp(-\sqrt{\omega}r(x))(1 + q(x, \omega));$$

где $\Phi(x) \in C^3(T)$, $\Phi > 0$ на T , $q(x, \omega) = o(1)$ при $\omega \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in T$. Кроме того, $r(x) \in C^{19}(T)$, $|\nabla r| > 0$ на T и при $x \in T$

$$\nabla_x u_2(x, \omega) = -\omega^{1/2}(\nabla r(x)\Phi(x) + \Phi_1(x, \omega)) \exp(-\sqrt{\omega}r(x)),$$

где $\Phi(x, \omega)$ — вектор-функция со значениями в \mathbb{R}^2 , такая, что $|\Phi_1(x, \omega)| = o(1)$ при $\omega \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in T$.

Заметим, что доказательство этой леммы существенно использует локальную асимптотику функции $G_2(x, x_0, \omega)^*$ при $\omega \rightarrow \infty$ (т.е. асимптотику G_2 при достаточно близких x, x_0), которая для C^∞ коэффициентов легко может быть выведена из результатов Молчанова [6] и Каннаи [7]. Однако непосредственно в данной работе этот результат применен быть не может, так как C^∞ и кусочно-аналитические в смысле данной работы функции — это, как нетрудно видеть, аналитические во всем Q функции, в классе которых результат данной работы малоинтересен. Но, следуя рассуждениям Каннаи [7], можно вывести утверждение о локальной асимптотике G_2 , сделав преобразование Лапласа в результатах Адамара [8] об "асимптотике по гладкости" фундаментального решения гиперболического уравнения $\partial^2 u / \partial t^2 = L_2 u^*$. В

* $L_2 = \sum_{j=1}^2 \partial / \partial x_j (a_2(x) \frac{\partial}{\partial x_j})$, $L_2 G_2 - \omega G_2 = -\delta_{x_0}$, $G_2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

книге Адамара рассуждения проводятся для случая аналитических коэффициентов, однако несколько первых членов асимптотики выписываются и для коэффициентов конечной (к сожалению, довольно высокой) гладкости, а невязка может быть оценена с помощью энергетической оценки и подходящей теоремы вложения $W_2^m(\mathbf{R}^3) \rightarrow C^3(\mathbf{R}^3)$. На этом пути и возникает требование о коэффициентах гладкости C^{20} .

Доказательство леммы 1 проводится следующим образом. Сначала доказывается существование криволинейного четырехугольника P , обладающего следующими свойствами: 1) P ограничен отрезками линий уровня $l_{r(x_0)-\varepsilon}$, $l_{r(x_0)+\Delta}$, где $\varepsilon > 0$, $\Delta > 0$ и непересекающимися отрезками геодезических, проходящих через концы упомянутых отрезков линий уровня ортогонально им; 2) $T \subset P$; 3) замкнутый отрезок l_1 линии уровня $l_{r(x_0)-\varepsilon}$, ограничивающий P , обладает следующими свойствами: а) на l_1 нет точек, сопряженных точкам прямой s_0 вдоль хотя бы одной кратчайшей геодезической, соединяющей точку l_1 с s_0 , и нет ближайших фокальных точек прямой s_0 (определения и свойства таких точек см. в приложении); б) $r - C^{19}$ -гладкая функция в некоторой окрестности l_1 ; в) $l_1 \cap Q_2 = \emptyset$; г) $r(T, \partial P \setminus l_1) \geq 2(r(T, l_1) + 2a_2(y_0)^{-1/2}r)$, где $r(A, B)$ - расстояние между множествами A и B во введенной метрике; д) для любого $x \in T$ существует единственная точка $\sigma(x) \in l_1$, $\sigma(x)$ не попадает в концы l_1 , $\sigma - C^{19}$ -гладкая вектор-функция $x \in T$, такая, что $r(x, \sigma)$ как функция σ достигает глобального минимума на l_1 в точке $\sigma(x)$, причем этот минимум единственный на l_1 , и имеет место разложение

$$r(x, \sigma) = r(x, \sigma(x)) + c_1(x)|\sigma - \sigma(x)|^2 + c_2(x, \sigma),$$

где $c_1 \in C^3(T)$, $c_1 > 0$ в T и $c_2 \in C^3(T \times l_1)$, $c_2(x, \sigma) = 0$ $|\sigma - \sigma(x)|^3$ при $\sigma \rightarrow \sigma(x)$, $\sigma \in l_1$, равномерно по $x \in T$.

Затем доказывается, что $\varepsilon > 0$ можно выбрать таким образом, чтобы в окрестности U отрезка l_1 имела место такая асимптотика: для любого $y \in \bar{U}$

$$u_2(y, \omega) = \varphi(y) \exp(-\sqrt{\omega}r(y))(1 + q(y, \omega)), \quad (14)$$

где $\varphi(y) \in C^3(\bar{U})$, $\varphi > 0$ на \bar{U} , $r \in C^{19}(\bar{U})$ и $q(y, \omega) = o(1)$ при $\omega \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in \bar{U}$ (при доказательстве этого факта существенно используется свойство а) отрезка l_1). Далее рассматривается отрезок l_3 линии уровня $l_{r(x_0)-\varepsilon-\varepsilon'}$, полученный сдвигом l_1 вдоль геодезических, ортогональных l_1 , на расстояние ε' и несколько продолженный за его концы так, чтобы $l_3 \subset U$. Мы доказываем, что существует такая положительная C^3 -гладкая функция $\chi_1(y)$

на l_3 , что

$$\sqrt{\omega} \int_{l_3} G_2(x, y, \omega) u_2(y, \omega) \chi_1(y) ds_y \cdot u_2^{-1}(x, \omega) = 1 + o(1), \quad (15)$$

равномерно по $x \in l_1$. Это делается с использованием локальной асимптотики G_2 , асимптотики (14) для u_2 и метода Лапласа для вычисления асимптотики интеграла в левой части (15). Затем рассматривается следующая функция в P :

$$v(x, \omega) = \sqrt{\omega} \int_{l_3} G_2(x, y, \omega) u_2(y, \omega) \chi_1(y) ds_y. \quad (16)$$

Функция u_2 в P представляется в виде суммы $u_2(x, \omega) = v(x, \omega) + v_1(x, \omega) + v_2(x, \omega)$, где $v_1(x, \omega)$, $v_2(x, \omega)$ - решения следующих задач

$$\text{Дирихле } (L_2 = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (a_2(x) \frac{\partial}{\partial x_j}), \omega > 0):$$

$$\begin{aligned} (L_2 - \omega)v_1 &= 0 \text{ в } P, & v_1|_{\partial P} &= \tilde{v}_1, \\ (L_2 - \omega)v_2 &= 0 \text{ в } P, & v_2|_{\partial P} &= \tilde{v}_2, \end{aligned}$$

а $\tilde{v}_1 = v - u_2$ на l_1 , $\tilde{v}_1(z, \omega) = 0$ на $\partial P \setminus l_1$, $\tilde{v}_2 = u_2 - v$ на $\partial P \setminus l_1$, $\tilde{v}_2 = 0$ на l_1 . Асимптотика интеграла в правой части (16) и $\nabla_x v(x, \omega)$ на T вычисляется по методу Лапласа с использованием асимптотик при $\omega \rightarrow \infty$ $G_2(x, y, \omega)$, $u_2(y, \omega)$ и свойства 5) четырехугольника P . Использование оценок Варадана [9] и свойства 4) P показывает, что при $x \in T$ $v_2(x, \omega) = o(v(x, \omega))$, $|\nabla_x v_2(x, \omega)| = o(|\nabla_x v(x, \omega)|)$, $\omega \rightarrow \infty$. Далее, удается показать, что при $x \in T$ $v_1(x, \omega) = o(v(x, \omega))$, $|\nabla_x v_1(x, \omega)| = o(|\nabla_x v(x, \omega)|)$, $\omega \rightarrow \infty$. Этим доказательство леммы 1 заканчивается.

Теперь можно продолжить доказательство теоремы, вернувшись к интегральному представлению (13). Разделим интеграл в правой части (13) на сумму двух интегралов:

$$\int_{Q_2} = \int_T + \int_{Q_2 \setminus T}$$

Граница ∂T при достаточно малом r состоит из двух частей: части S окружности ∂Q_2^0 и части ∂Q_2 . Так как на ∂Q_2 $a_2(y) -$

$a_1(y) = 0$, то, интегрируя по частям, получаем

$$\int_T G_1(y_0, y, \omega) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_2(y) - a_1(y) \frac{\partial u_2}{\partial y_j} \right) dy =$$

$$\int_S \sum_{j=1}^2 \nu_j(y) \frac{\partial u_2}{\partial y_j} G_1(y_0, y, \omega) (a_2(y) - a_1(y)) ds_y -$$

$$\int_T (a_2(y) - a_1(y)) \nabla_y G_1(y_0, y, \omega) \nabla_y u_2(y, \omega) dy.$$

Использование леммы 1 и оценок Варадана показывает, что

$$\left| \int_S \sum_{j=1}^2 \nu_j(y) \frac{\partial u_2}{\partial y_j} G_1(y_0, y, \omega) (a_2(y) - a_1(y)) ds_y \right| \leq$$

$$\sup_{y \in S} \exp(-\sqrt{\omega}(r(y) + r_1(y_0, y) - 2\delta))$$

для любого $\delta > 0$ при достаточно большом ω (здесь $r_1(y_0, y)$ - расстояние между y_0 и y в метрике $ds^2 = 1/a_1(x)(dx_1^2 + dx_2^2)$). Аналогично оценивается интеграл по $Q_2 \setminus T$.

Использование леммы 1 и аналогичной лемме 1 оценки $\nabla_y G_1(y_0, y, \omega)$ показывает, что

$$\left| \int_T (a_2(y) - a_1(y)) \nabla_y G_1(y_0, y, \omega) \nabla_y u_2(y, \omega) dy \right| \geq$$

$$C\omega^{3/4} \inf_{y \in Cl} \exp[-\sqrt{\omega}(r_1(y_0, y) + r(y))],$$

где Cl - "полукольцо" $[(Q_{r/3}^{y_0} \setminus Q_{r/4}^{y_0}) \cap Q_2]$ (некоторая окрестность ∂Q_2). Таким образом, все свелось к доказательству неравенства

$$\inf_{y \in Q_2 \setminus T} (r(y) + r_1(y_0, y)) > \sup_{y \in Cl} (r(y) + r_1(y_0, y)), \quad (17)$$

так как из (17) следует, в силу вышеприведенных оценок, что $v_0(y_0, \omega) \neq 0$ при достаточно большом ω . Неравенство (17) доказывается несложными геометрическими рассуждениями. набросок доказательства теоремы закончен.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О п р е д е л е н и е. Кусочно-аналитической кривой в Q называется объединение не более чем счетного числа C^1 -гладких компактных кривых $C_i \subset Q$, каждая из которых в системе декартовых координат Oy_1y_2 , начало 0 которых лежит на C_i и ось Oy_1 направлена по касательной к C_i , может быть задана уравнением $y_2 = f(y_1^{1/n})$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq y_1 \leq \delta$, $\delta \geq 0$ (касательная к точке имеет любое направление) и f - аналитическая функция своего аргумента на $[0, \delta^{1/n}]$, причем в компактной части Q таких кривых конечное число.

Л е м м а А 1. При сделанных относительно σ предположениях линия уровня $l_b = \{x | r(x) = b\}$ при любом $b \geq 0$ - кусочно-аналитическая кривая.

О п р е д е л е н и е. Точка $y \in \text{Int } Q$ называется сопряженной точке $(0, s) \in s_0$ вдоль геодезической $\gamma(s)$, ортогональной s_0 в точке $(0, s)$, если $y \in \gamma(s)$ и на $\gamma(s)$ существует якобиево поле $\tilde{y}(\tau)$ (τ - натуральный параметр на $\gamma(s)$, отсчитываемый от s_0), ортогональное $\gamma(s)$ и такое, что $\tilde{y}(0) = 0$, $d\tilde{y}/d\tau(0) \neq 0$, и хотя бы при одном $\tau_y \tilde{y}(\tau_y) = 0$ (τ_y - значение τ , при котором $\gamma(s)$ проходит через точку y). Точка $y \in \text{Int } Q$ называется ближайшей фокальной точкой прямой s_0 , если хотя бы на одной кратчайшей геодезической $\gamma_y(s)$, соединяющей y с s_0 , существует якобиево поле $\tilde{y}(\tau)$, ортогональное $\gamma_y(s)$, такое, что $d\tilde{y}/d\tau(0) = 0$, $\tilde{y}(0) \neq 0$ и $\tilde{y}(\tau_y) = 0$ (здесь τ_y определено однозначно).

Л е м м а А 2. При сделанных относительно σ предположениях множество точек $\text{Con} \subset \text{Int } Q$, сопряженных точкам s_0 вдоль хотя бы одной кратчайшей геодезической, соединяющей $y \in \text{Con}$ с s_0 - подмножеством кусочно-аналитической кривой Con . Более того, существует последовательность c_n , $n \in \mathbb{N}$, $c_n > 0$, $c_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, такая, что если обозначить $C = \{x | x_1 = c_n, n \in \mathbb{N}\}$, то $\lim_{x_2 \rightarrow \infty} r(\overline{\text{Con}}, C) = 0$ равномерно по $x_1 \in [0, M]$ при любом $M > 0$ (расстояние между \emptyset и любым другим равно нулю по определению).

Л е м м а А 3. Множество $\text{Foc} \subset \text{Int } Q$ ближайших фокальных точек s_0 - подмножеством кусочно-аналитической кривой Foc , и для любого $M > 0$ существует $N > 0$ такое, что на множестве $0 \leq x_1 \leq M$, $|x_2| > N$ таких точек нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований // ЖВМ и МФ. 1965. № 3. С. 545-547.
2. Гусаров А.Л. К вопросу о единственности решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерных сред // Математические модели задач геофизики. М., 1981. С. 31-60.
3. Гусаров А.Л. О единственности решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования для двумерных сред с локальными неоднородностями // Математические модели прикладной электродинамики. М., 1984. С. 44-47.
4. Гусаров А.Л. Одна теорема единственности решения обратной двумерной задачи магнитотеллурического зондирования // Актуальные вопросы прикладной математики. М., 1989. С. 21-25.
5. Гусаров А.Л. Об одной теореме единственности решения двумерной обратной задачи магнитотеллурического зондирования в H -поляризации // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1989. № 3. С. 25-29.
6. Молчанов С.А. Диффузионные процессы и риманова геометрия // УМН. Т. XXX, вып. 1. С. 3-59.
7. Kannai Y. Off diagonal short time asymptotics for fundamental solutions of diffusion equations // Comm. Part. Diff. Equat. 1977. V. 2, № 8. P. 781-830.
8. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
9. Varadhan S.R.S. On the behaviour of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20, № 4. P. 431-455.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ
НЕКОТОРЫХ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ
МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО
ЗОНДИРОВАНИЯ**

Электромагнитные методы исследования земных недр широко применяются в геофизической практике. Теория электромагнитных методов базируется на математическом моделировании процессов распространения электромагнитных полей различных источников в Земле. Основные принципы моделирования предъявляют к модели среды, описывающей строение земных недр, определенные требования. Прежде всего модель должна быть достоверной, т.е. описывать реальное строение Земли, с другой стороны, выбранная модель должна допускать достаточно простую математическую реализацию на основе имеющейся вычислительной техники. Уровень сложности моделей зависит от развития численных методов, ориентированных на ЭВМ. По мере развития вычислительных средств идет усложнение моделей.

В настоящее время арсенал программных средств позволяет рассчитывать достаточно сложные среды с локальными неоднородными включениями. Однако класс моделей, поддающихся численной реализации, ограничен. Например, в случае двумерных неоднородных сред созданы эффективные алгоритмы, позволяющие рассчитывать локальные включения в виде бесконечного цилиндра, имеющего в сечении прямоугольник с кусочно-постоянным распределением проводимости в нем. Дальнейшее приближение модели к реальности (например, учет сложной, отличной от прямоугольных форм границы сечения протяженных неоднородных включений или переменной проводимости неоднородности) вызывает большие математические трудности.

Для расширения класса моделей, численно реализуемых с помощью созданных программных средств, может быть предложен следующий путь. В методах электромагнитных зондирований широко известен принцип эквивалентности, когда среды с различными параметрами дают очень близкие значения электромагнитного поля на поверхности исследуемой среды. Наличие этого свойства электромагнитного поля значительно усложняет решение обратной задачи, но может быть эффективно использовано при решении прямой задачи расчета электромагнитного поля в среде сложной структуры.

Рассмотрим такую возможность на примере моделирования двумерно-неоднородных сред в поле плоской волны в случае E поляризации. В качестве общей модели двумерно-неоднородной среды выберем слоисто-однородный разрез, описываемый кусоч-

но-постоянной функцией

$$\sigma_n(z) = \begin{cases} \sigma_0, & z < 0, \\ \sigma_1, & 0 < z < h_1, \\ \sigma_2, & h_1 < z < h_2, \\ \dots & \\ \sigma_N, & z > h_N. \end{cases}$$

В некотором произвольном слое располагается двумерная неоднородность, моделируемая бесконечным вдоль оси Ox цилиндром прямоугольного сечения S ; проводимость внутри прямоугольника задается кусочно-постоянной функцией на некоторой прямоугольной сетке. Решение задачи расчета электромагнитного поля плоской волны на поверхности среды проводится методом двумерных интегральных уравнений по площади сечения S . Этот метод подробно описан в работах [1], [2].

Предложенная модель может достаточно хорошо описать двумерную локальную неоднородность с любой сложной границей. Сетка задания функции распределения проводимости внутри S может быть выбрана сколь угодно малой, чтобы реальная граница неоднородности могла быть описана кусочно-постоянной функцией. Однако увеличение числа точек разбиения неоднородности сопряжено с большой вычислительной работой и необходимостью дополнительных ресурсов ЭВМ.

Попытаемся сформулировать некоторые правила, базирующиеся на принципе эквивалентности, дающие возможность заменить исходную модель более простой эквивалентной моделью, допускающей простую численную реализацию.

Сначала остановимся на исследовании влияния формы и размеров постоянной по проводимости неоднородности на значение электромагнитного поля на дневной поверхности. Численный анализ был проведен по кривым кажущегося сопротивления $\rho_1(\lambda)$ и $\rho_2(\lambda)$ (λ – частотный параметр, представляющий собой длину волны в первом слое). Для оценки близости двух кривых кажущегося сопротивления $\rho_1(\lambda)$ и $\rho_2(\lambda)$ был введен параметр

$$\varepsilon_{1,2}(\rho_1, \rho_2) = \max_{\lambda} \left| \frac{2(\rho_1(\lambda) - \rho_2(\lambda))}{\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)} \right|.$$

Полученные выводы проиллюстрируем на моделях, изображенных на рис. 1, 2, где неоднородность имеет постоянное значение проводимости $\sigma = 10$, а форма неоднородности меняется, как показано на рис. 2.

Основным параметром, влияющим на кривые кажущегося сопротивления, является площадь неоднородности. Кривые кажущегося сопротивления для моделей, имеющих одинаковую площадь

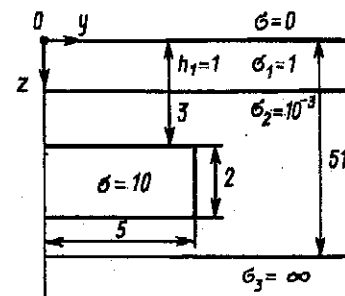


Рис. 1

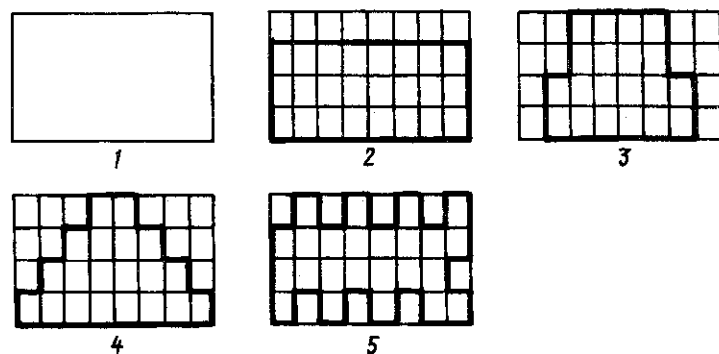


Рис. 2

постоянной по проводимости неоднородности, близки между собой, при этом параметр $\varepsilon \leq 0.08$. Такие модели можно считать эквивалентными.

Форма неоднородности при постоянной площади оказывает пренебрежимо малое влияние на значение электромагнитного поля на дневной поверхности. Отличающиеся по форме модели 2 и 5 имеют одинаковую площадь и эквивалентны между собой ($\varepsilon_{2,5} = 0.08$). Модель 4 эквивалентна более простой, равной по площади модели 3, имеющей прямоугольную форму ($\varepsilon_{3,4} = 0.06$).

При изменении площади эквивалентность модели нарушается. Так, изменение площади на 20% дает существенное отклонение

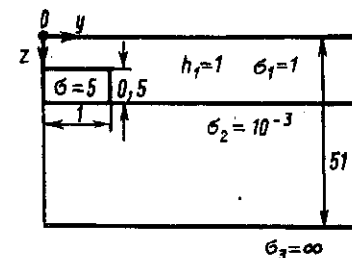


Рис. 3

кривой кажущегося сопротивления ρ_k для модели 2 от ρ_k для модели 1, характеризуемое $\varepsilon_{1,5} = 0.5$.

Аналогичные выводы можно сделать при анализе моделей, изображенных на рис. 3, 4, где неоднородность расположена в первом слое и оказывает более сильное влияние на компоненты электромагнитного поля. Имеющие одинаковую площадь модели 2-5, несмотря на существенно различную форму неоднородности, можно считать эквивалентными ($\varepsilon < 0.07$). Модели 1 и 2 характеризуются $\varepsilon_{1,2} = 0.45$.

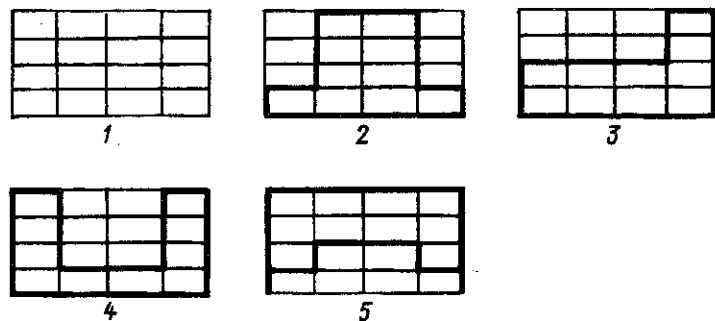


Рис. 4

Отметим, что для рассмотренных здесь размеров неоднородных включений вклад площадей слабо зависит от их погружения. Этот вывод подтверждается эквивалентностью моделей 4 и 5 на рис. 4 ($\varepsilon_{4,5} = 0.07$).

Таким образом, сложная по форме модель неоднородного включения может быть заменена эквивалентной моделью прямоугольной формы, расчет которой не представляет больших трудностей.

Во всех предыдущих примерах неоднородность имела постоянное значение проводимости. Однако постоянное значение проводимости далеко от истинного распределения проводимости в Земле. Выбор модели, детально описывающей изменение проводимости внутри неоднородности, соответствующее представлениям исследователя о реальной структуре, приводит к необходимости, как и в случае переменной границы, к увеличению точек разбиения области, моделирующей неоднородность. Как и ранее, упрощение полученной модели может быть проведено на основе принципа эквивалентности.

Введем в рассмотрение величину σ_{cp} , представляющую собой усредненное значение проводимости неоднородности. В случае исследуемой нами модели кусочно-постоянного значения проводи-

мость σ_{cp} задается формулой

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

Численный анализ влияния распределения проводимости внутри неоднородности на кривые кажущегося сопротивления позволил сделать ряд выводов об эквивалентности моделей по параметру σ_{cp} .

Прежде чем описывать результаты исследования, остановимся на следующем вопросе. Интегральное соотношение для электрической составляющей электромагнитного поля имеет следующий вид:

$$E_x(M) = E_x^0(M) + i\omega\mu_0 \iint_S (\sigma_n(z_0) - \sigma(M_0)) G(M < M_0) E_x(M_0) dS_{\mu_0}, \quad (1)$$

где $G(M, M_0)$ - функция Грина, описывающая свойства вмещающей среды.

Интегральное соотношение (1) показывает, что площадь неоднородности и ее проводимость не являются независимыми параметрами, электромагнитное поле зависит от интегральной проводимости $\iint_S \sigma(y, z) dS_M$.

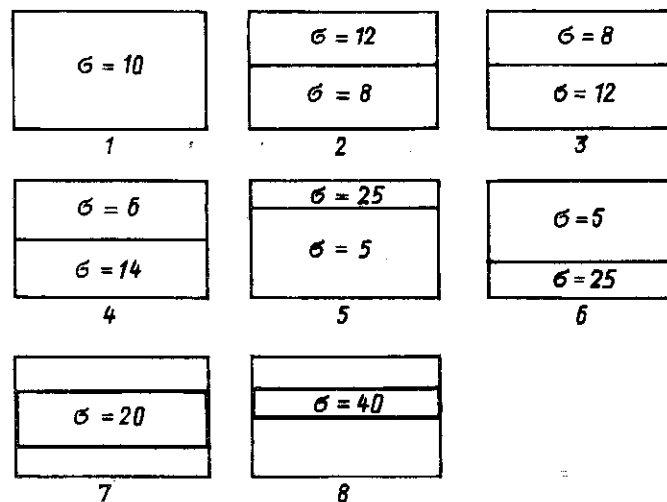


Рис. 5

На рис. 5 приведены примеры моделей, эквивалентных по интегральной проводимости: модель 1 эквивалентна моделям 7, 8 ($\epsilon < 0.09$).

Эквивалентность по площади и средней проводимости является следствием эквивалентности по интегральной проводимости. Введение же этих дополнительных параметров имеет своей целью упростить процесс моделирования, состоящий в замене сложной, максимально приближенной к практике модели более простой моделью, допускающей быстрый расчет электромагнитного поля.

Границы эквивалентности параметров, как следует из выражения (1), зависят не только от $\sigma(y, z)$, но и от свойств функции Грина $G(M < M_0)$. Эти границы могут быть установлены численным путем.

Вернемся к вопросу о возможности замены изучаемой модели эквивалентной моделью с усредненной проводимостью. Сформулируем некоторые выводы, проиллюстрировав их некоторыми примерами. Для этого рассмотрим модели, изображенные на рис. 1, 5 (во всех этих моделях площадь неоднородности одинакова). При постоянном значении средней проводимости σ_{cp} модели будут эквивалентны между собой при выполнении определенных условий, накладываемых на изменение проводимости внутри аномалии. Если значение проводимости отдельных участков неоднородности отличается от среднего значения σ_{cp} менее, чем на 30%, то такая модель будет эквивалентна модели с постоянной проводимостью, равной среднему значению проводимости неоднородности. Так, модели 1 и 3 на рис. 5 можно считать эквивалентными ($\epsilon_{1,3} = 0.04$). Если контрастность проводимости отдельных участков неоднородности увеличивается, то эквивалентность начинает нарушаться. Модели 1 и 4 на рис. 5 с более контрастными областями проводимости характеризуются $\epsilon_{1,4} = 0.1$, а модели 1 и 5 на рис. 5 характеризуются еще большим значением $\epsilon_{1,5} = 0.15$. Если контрастность проводимости отдельных участков невелика, то глубина их погружения слабо влияет на расчеты. Модели 1 и 2 на рис. 5 также эквивалентны ($\epsilon_{1,2} = 0.06$). Если же проводимость меняется более резко, то глубина погружения отдельных участков оказывает более существенное влияние на поле на поверхности. Для моделей 5 и 6 на рис. 5 принцип эквивалентности по параметру σ_{cp} не выполняется, отклонение кривых кажущегося сопротивления характеризуется $\epsilon_{5,6} = 0.6$.

Поскольку функция $G(M, M_0)$ убывает с увеличением расстояния между точками M и M_0 , то вклад отдельных участков неоднородности в аномальное поле на поверхности различен, причем в основном он зависит от глубины погружения неоднородности. Поэтому участки повышенной и пониженной проводимости, расположенные на одном уровне, допускают усреднение, если же эти участки погружены на разную глубину, то эквивалентность при усреднении нарушается.

Таким образом, используя полученные выше результаты, можно предложить ряд рекомендаций по замене исходной модели более простой моделью, для которой существуют эффективные, численно реализованные алгоритмы расчета.

1) Прежде всего следует разбить неоднородность на участки, внутри которых допустимо усреднение проводимости.

Усреднение допустимо:

а) если контрастность отдельных участков не превышает 30% среднего значения;

б) если области повышенной и пониженной проводимости располагаются на одном уровне;

в) если резко контрастные участки глубоко погружены.

2) Участки постоянной проводимости следует заменить равными по площади прямоугольниками, имеющими то же значение проводимости.

Результаты проведенных исследований могут быть использованы при решении обратной задачи магнитотеллурического зондирования двумерно-неоднородных сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитриев В.И., Мерцикова Н.А. Метод интегральных уравнений при моделировании электромагнитных зондирований неоднородных сред // Вычислительные методы и программирование. Вып. XXXII. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. С. 200-215.
2. Дмитриев В.И., Мерцикова Н.А. Метод интегральных уравнений для задач магнитотеллурического зондирования в случае сред с произвольной двумерной неоднородностью // Математические модели прикладной электродинамики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 3-11.

МЕТОД РАСЧЕТА ДИАГРАММЫ РАССЕЙЯНИЯ РЕШЕТКИ ДЛЯ КВАЗИТРЕХМЕРНОГО ПОЛЯ

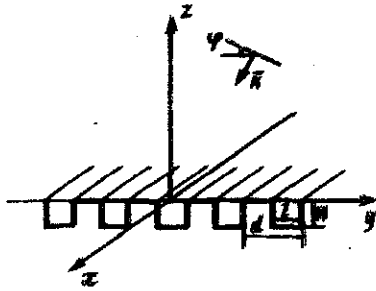


Рис. 1. Схема отражательной решетки

В настоящей работе описывается метод расчета диаграммы рассеяния решетки и проводится ее численное исследование. Считается, что решетка представляет собой идеально отражательную поверхность, периодическую в направлении оси OY и однородную вдоль оси OX . Решетка состоит из $(2N + 1)$ элементов представляющих собой чередование впадины и ступеньки. Начало системы координат расположено в центральном элементе решетки,

параметры решетки приведены на рис. 1.

Пусть на решетку из бесконечности падает электромагнитная волна под углом φ к оси OZ в плоскости ZOY , т.е.

$$e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t}, \quad \vec{k} = (\sin \varphi, 0, -k \cos \varphi).$$

Так как решетка однородна по x , то поле будет зависеть от x как $e^{i\alpha x}$, где $\alpha = k \sin \varphi$. Из уравнений Максвелла следует, что в данном случае электромагнитное поле выражается через E_x и H_x , которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$\Delta_{y,z} u + \beta^2 u = 0, \quad (1)$$

где $u = E_x$ или $u = H_x$, а $\beta = k \cos \varphi$. Поля на бесконечности удовлетворяют парциальным условиям излучения, а на границе поверхности решетки Γ тангенциальная составляющая электрического поля равна нулю, т.е.

$$E_x|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial n}|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Если в первичном поле имеется H_x^0 и не имеется E_x^0 , то $E_x^0 \equiv 0$ и y электромагнитного поля будет существовать пять компонент:

$$\vec{E} = (0, E_y, E_z), \quad \vec{H} = (H_x, H_y, H_z).$$

Такое поле называется H -модой. Если для отраженного поля ввести обозначение \vec{E}^{aH} и $-\vec{H}^{aH}$, то $E_x^{aH} = 0$, а для H_x^{aH} имеем краевую задачу

$$\Delta_{y,z} H_x^{aH} + \beta^2 H_x^{aH} = 0 \text{ в } D, \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial n}|_{\Gamma} = -\frac{\partial H_x^0}{\partial n}|_{\Gamma},$$

где D — область над решеткой. Остальные компоненты отраженного поля E_y^{aH} , E_z^{aH} , H_y^{aH} , H_z^{aH} будут рассчитываться по следующим формулам:

$$E_y^{aH} = i \frac{\omega \mu_0}{\beta^2} \frac{\partial H_x^{aH}}{\partial z}, \quad E_z^{aH} = -i \frac{\omega \mu_0}{\beta^2} \frac{\partial H_x^{aH}}{\partial y},$$

$$H_y^{aH} = i \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial H_x^{aH}}{\partial y}, \quad H_z^{aH} = i \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial H_x^{aH}}{\partial z}.$$

Если в первичном поле имеется E_x^0 и не имеется H_x^0 , то в этом случае также получаем для E_x и H_x краевую задачу (1)–(2), при этом $H_x \equiv 0$. Такое поле называется E -модой, $H_x^{aH} = 0$ в области D , а для E_x^{aH} имеем следующую краевую задачу:

$$\Delta_{y,z} E_x^{aH} + \beta^2 E_x^{aH} = 0 \text{ в } D, \quad (4)$$

$$E_x^{aH} = -E_x^0.$$

Остальные компоненты отраженного поля рассчитываются по формулам:

$$E_y^{aH} = i \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial E_x^{aH}}{\partial y}, \quad E_z^{aH} = i \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial E_x^{aH}}{\partial z}$$

$$H_y^{aH} = -i \frac{\omega \epsilon_0}{\beta^2} \frac{\partial E_x^{aH}}{\partial z}, \quad H_z^{aH} = i \frac{\omega \epsilon_0}{\beta^2} \frac{\partial E_x^{aH}}{\partial y}.$$

Рассмотрим теперь отдельно каждую из поставленных задач.

1. Пусть на решетку падает волна H -моды

$$\vec{E} = (0, E_y^0, 0), \quad E_y^0 + e^{i\alpha x - i\beta z},$$

$$\vec{H} = (H_x^0, 0, H_z^0), \quad H_x^0 = \frac{\beta}{\omega, \mu_0} E_y^0, \quad H_z^0 = \frac{\alpha}{\omega \mu_0} E_y^0.$$

Тогда для H_x^{aH} имеем краевую задачу (3). При определении H_x^{aH} будем приближенно считать, что решетка бесконечна. Такое приближение правомерно, так как в работе [1] показано, что

для больших конечных решеток поле в центральной части решетки совпадает с полем для бесконечной решетки. Отличие поля конечной решетки от поля бесконечной решетки наблюдается только для первых трех - пяти элементов, находящихся на краю решетки, что слабо сказывается при расчете диаграммы рассеяния решетки.

Таким образом, при определении коэффициентов рассеяния поля будем считать, что решетка бесконечна по y . В силу периодичности решетки по y поле будет так же периодически по y с периодом решетки. Следовательно, H_x^{aH} будем искать в области

$$\bar{D} = D_1 + D_2,$$

где

$$D_1 = \left\{ -\infty < x < \infty, -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}, 0 < z < \infty \right\},$$

$$D_2 = \left\{ -\infty < x < \infty, -\frac{l}{2} \leq y \leq \frac{l}{2}, -H \leq z < 0 \right\}.$$

В силу периодичности поля по y с периодом d должно выполняться условие $\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\pm \frac{d}{2}} = 0$, $u(x, y, z) = H_x^{aH}$, тогда в области D_1 верно равенство

$$u(x, y, z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=0}^{\infty} R_n e^{i\gamma_n z} \cos \frac{2\pi n}{d} y,$$

$$\gamma_n = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{2\pi n}{d}\right)^2}, \quad \text{Im } \gamma_n > 0, \quad (5)$$

где R_n - амплитуда парциальных волн, периодичных по y и распространяющихся по z с постоянной распространения γ_n . Полное поле в области D_1 , $H_x = V(x, y, z)$ представимо в виде

$$V(x, y, z) = \frac{\beta}{\omega \mu_0} e^{i\alpha x - i\beta z} + u(x, y, z).$$

Поскольку $\frac{\partial H_x}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$, то полное поле в области D_2 представимо в виде

$$V(x, y, z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(e^{i\Gamma_n(z+H)} + e^{-i\Gamma_n(z+H)} \right) \cos \frac{2\pi n}{l} y,$$

где $\Gamma_n = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}$, $\text{Im } \Gamma_n > 0$. Для определения R_n и a_n нужно воспользоваться условиями сшивания поля при переходе из области D_2 в область D_1 , т.е.

$$U(x, y, z)|_{z=+0} = V(x, y, z)|_{z=-0}, \quad -\frac{l}{2} \leq y \leq \frac{l}{2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}|_{z=+0} = \begin{cases} 0, & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}, \frac{l}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}, \\ \frac{\partial U}{\partial z}|_{z=-0}, & -\frac{l}{2} \leq y \leq \frac{l}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, для определения коэффициентов рассеяния R_n и a_n получили уравнения, аналогичные уравнениям, полученным для нормального падения волны на решетку, с той лишь только разницей, что в этом случае вместо k стоит β . Следовательно, мы можем воспользоваться решением этих уравнений для нормального падения волны на решетку, приведенном в работе [2], которое удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a_m e_m^+ \Delta_m - \frac{l}{d} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Gamma_k e_k^- A_{mk} = \frac{2\beta a m_0}{\omega \mu_0} \\ R_m = \frac{l}{d \Delta_m \gamma_m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n e_n^- \alpha_{nm} + \frac{\beta^2 \delta_m}{\omega \mu_0 \gamma_m \Delta_m}, \\ A_{mk} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{mn} \alpha_{kn}}{\Delta_n \gamma_n} \\ m = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$\Delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0.5, & m \neq 0, \end{cases}$$

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$e_m^+ = E^{i\Gamma_m H} + e^{-i\Gamma_m H}, \quad e_m^- = e^{-i\Gamma_m H} e^{-i\Gamma_m H} - e^{i\Gamma_m H},$$

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cos \frac{2\pi n}{d} y \cos \frac{2\pi m}{d} y dy = \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{(-1)^{mndl}}{\pi((nl)^2 - (md)^2)} \sin \frac{\pi nl}{d}, & ln \neq md, \\ 0.5, & ln = md \neq 0, \\ 1, & ln = md = 0. \end{cases}$$

2. Рассмотрим случай падения на решетку волны E -моды

$$\vec{E} = (E_x^0, 0, E_z^0), \quad E_x^0 = -\frac{\beta}{\omega \epsilon_0} H_y^0, \quad E_z^0 = -\frac{\alpha}{\omega \epsilon_0} H_y^0,$$

$$\vec{H} = (0, H_y^0, 0), \quad H_y^0 = e^{i\alpha x - i\beta z}.$$

Тогда для E_x^{aH} имеем краевую задачу (4). В этом случае рассеянное поле $u(x, y, z) = E_x^{aH}$ в области D_1 рассчитывается по формуле (5), а полное поле $U(x, y, z) = E_x$ в области D_1 представимо в виде

$$U(x, y, z) = -\frac{\beta}{\omega \epsilon_0} e^{i\alpha x - i\beta z} + u(x, y, z).$$

Учитывая, что $E_x|_{\Gamma} = 0$, получаем, что в области D_2 полное поле представимо в виде

$$U(x, y, z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{i\Gamma_n(z+H)} - e^{-i\Gamma_n(z+H)}) \cos \frac{\pi(2n+1)}{l} y,$$

$$\Gamma_n = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\pi(2n+1)}{l}\right)^2}, \quad \text{Im} \Gamma_n > 0.$$

Для определения коэффициентов R_n и a_n нужно воспользоваться условиями сшивания при переходе из области D_2 в область D_1 , т.е.

$$U(x, y, z)|_{z=+0} = \begin{cases} 0, & -\frac{d}{2} \leq y \leq -\frac{l}{2}, \quad \frac{l}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}, \\ U(x, y, z)|_{z=-0}, & -\frac{l}{2} \leq y \leq \frac{l}{2}, \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}|_{z=+0} = \frac{\partial U}{\partial z}|_{z=-0}, \quad -\frac{l}{2} \leq y \leq \frac{l}{2}.$$

Таким образом, для определения коэффициентов рассеяния R_n и a_n получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Gamma_m a_m e_m^+ = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Gamma_k e_k^- A_{km} + \frac{2\alpha_{0m} \beta^2}{\omega \varepsilon_0}, \\ R_m = \frac{l}{d \Delta_m} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n^- \alpha_{mn} + \frac{\beta \delta_m}{\omega \varepsilon_0}, \\ A_{km} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\Delta_n} \alpha_{nm} \alpha_{nk}, \\ m = 0, 1, 2, \dots, \infty, \end{cases}$$

где $\delta_m, \Delta_n, e_n^+$ и e_n^- рассчитываются по формулам (6), (7), а

$$\alpha_{mn} = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \cos \frac{2\pi m}{d} y \cos \frac{\pi(2n+1)}{l} y dy = \frac{2d^2 (-1)^n (2n+1) \cos \frac{\pi ml}{d}}{\pi((2n+1)d)^2 - (2ml)^2}, \quad (2n+1)d \neq 2ml.$$

Перейдем теперь к выводу диаграммы рассеяния решетки. По определению диаграммой рассеяния решетки называется функция $P(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, удовлетворяющая условию

$$P(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u(x = r \cos \beta_1, y = r \cos \beta_2, z = r \cos \beta_3)}{e^{ikr/r}}, \quad (8)$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ углы между радиусом-вектором r и осями координат Ox, Oy, Oz .

Введем область $D_0 = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, z > 0\}$ и применим в ней вторую формулу Грина к функциям $u(x, y, z)$ и $G(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = e^{ikr}/r$, где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Учитывая, что $u(x, y, z)$ и $G(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ в области D_0 удовлетворяют уравнению Гельмгольца, а на бесконечности — условию излучения, получим

$$u(x_0, y_0, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u(x, y, z=0) \frac{\partial G(x, y, z, x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Big|_{z=0} - G(x, y, z=0, x_0, y_0, z_0) \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\} dx dy.$$

Так как решетка в основном излучает в своей центральной части, то приближенно считаем, что рассеянное поле за концами решетки равно нулю, т.е. $u(x, y, z) = 0$ и $\partial u(x, y, z)/\partial z = 0$ при $-\infty < x < \infty, -\infty < y < -Nd - d/2$ и $Nd + d/2 < y < \infty, z = 0$. Тогда

$$u(x_0, y_0, z_0) = \int_{-\frac{D_x}{2}}^{\frac{D_x}{2}} dx \int_{-Nd - \frac{d}{2}}^{Nd + \frac{d}{2}} \left\{ u(x, y, z=0) \frac{\partial G(x, y, z, x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Big|_{z=0} - G(x, y, z=0, x_0, y_0, z_0) \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\} dy =$$

$$\sum_{j=-N}^N \int_{-\frac{D_x}{2}}^{\frac{D_x}{2}} dx \int_{-\frac{d}{2} - jd}^{\frac{d}{2} + jd} \left\{ u(x, y, z=0) \frac{\partial G(x, y, z, x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Big|_{z=0} - G(x, y, z=0, x_0, y_0, z_0) \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\} dy,$$

где D_x — длина решетки в направлении оси Ox . Сделав замену переменных $y = y' + jd$ и учитывая, что $u(x, y, z)$ периодична по y с периодом d , получим:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \sum_{j=-N}^N \int_{-\frac{D_x}{2}}^{\frac{D_x}{2}} dx \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left\{ u(x, y', z=0) \frac{\partial G(x, y' + jd, z, x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \Big|_{z=0} - G(x, y' + jd, z=0, x_0, y_0, z_0) \frac{\partial u(x, y', z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\} dy'.$$

Подставляя полученное выражение для $u(x, y, z)$ в формулу (8) и учитывая, что решетка имеет конечные размеры, т.е. $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{y'+jd}{r} = 0$, получим

$$P(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sum_{j=-N}^N e^{-ikjd \cos \beta_2} \int_{-\frac{D_x}{2}}^{\frac{D_x}{2}} dx \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left\{ -ik \cos \beta_3 u(x, y, z=0) - \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\} e^{-ik(x \cos \beta_1 + y \cos \beta_2)} dy.$$

Основное излучение рассеянного поля будет находиться на поверхности конуса, образующего угол $\alpha = \pi/2 - \varphi$ с осью Ox (рис. 2). Точка, лежащая на поверхности этого конуса, задается координатами r и θ , $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, т.е. $x_0 = r \cos \alpha$, $y_0 = r \sin \alpha \sin \theta$, $z_0 = r \sin \alpha \cos \theta$. Учитывая, что $x_0 = r \cos \beta_1$, $y_0 = r \cos \beta_2$, $z_0 = r \cos \beta_3$, получим, что $\cos \beta_1 = \cos \alpha$, $\cos \beta_2 = \sin \alpha \sin \theta$, $\cos \beta_3 = \sin \alpha \cos \theta$. В результате получим следующее выражение для диаграммы рассеяния решетки:

$$P(\theta) = \sum_{j=-N}^N e^{-ikjd \sin \alpha \sin \theta} \int_{-\frac{D_x}{2}}^{\frac{D_x}{2}} dx \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left\{ -ik \sin \alpha \cos \theta \times u(x, y, z=0) - \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\} e^{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha \sin \theta)} dy.$$

Учитывая, что

$$A_N(\theta) = \sum_{j=-N}^N e^{-ikjd \sin \alpha \sin \theta} = \frac{\sin\left(\frac{\pi(2N+1)kd \sin \alpha \sin \theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi kd \sin \alpha \sin \theta}{2}\right)},$$

получим равенство $P(\theta) = A_N(\theta)P_0(\theta)$, где

$$P_0(\theta) = \int_{-\frac{D_x}{2}}^{\frac{D_x}{2}} dx \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left\{ -ik \sin \alpha \cos \theta u(x, y, z=0) - \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\} e^{-ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha \sin \theta)} dy. \quad (9)$$

Функция $A_N(\theta)$ сильно осциллирующая функция. В направлениях θ , таких, что $\sin \theta = \frac{n\lambda}{d \sin \alpha}$, $n \in Z$, функция $A_N(\theta)$ имеет ярко

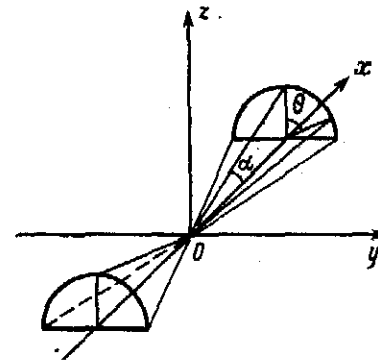


Рис. 2

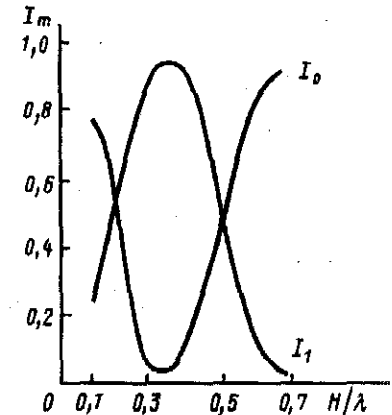


Рис. 3. Зависимость $I_0(\theta)$ и $I_1(\theta)$ от H/λ для H -моды

выраженные максимумы, значения которых равны $(2N+1)$, число этих максимумов $1 + 2\left[\frac{d \sin \alpha}{n\lambda}\right]$. В связи с этим имеет смысл пронормировать диаграмму рассеяния решетки $P(\theta)$ на $(2N+1)$, т.е. $\mathcal{P}(\theta) = P(\theta)/(2N+1)$, $\mathcal{A}(\theta) = A_N(\theta)/(2N+1)$. Функция $P_0(\theta)$ представляет собой диаграмму рассеяния одиночного элемента решетки.

Так как требуется рассчитать диаграмму рассеяния для конечной решетки с большим числом элементов, то приближенно можно считать, что рассеянное поле для такой решетки совпадает с рассеянным полем для бесконечной решетки и поэтому в формулу (9) подставим $u(x, y, z)$, полученное для бесконечной решетки (5).

В случае H -моды, учитывая граничные условия для $u(x, y, z)$, получим

$$P_0(\theta) = -2iD_x \left\{ k^2 \sin^2 \alpha \sin \theta \cos \theta \sin \left(\frac{kd}{2} \sin \alpha \sin \theta \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n R_n}{\kappa_n} - \frac{2\pi}{d} \cos \left(\frac{kl}{2} \sin \alpha \sin \theta \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\gamma_n R_n \sin \frac{\pi n l}{d}}{\kappa_n} + k \sin \alpha \sin \theta \sin \left(\frac{kd}{2} \sin \alpha \sin \theta \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n R_n \cos \frac{\pi n l}{d}}{\kappa_n} + \frac{k \sin \alpha}{\omega \mu_0 \sin \theta} \left(\sin \left(\frac{kd}{2} \sin \alpha \sin \theta \right) - \sin \left(\frac{kl}{2} \sin \alpha \sin \theta \right) \right) \right\},$$

в случае E -моды

$$P_0(\theta) = -2iD_x \left\{ k^2 \sin^2 \alpha \sin \theta \cos \theta \sin \left(\frac{kl}{2} \sin \alpha \sin \theta \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n}{\kappa_n} \cos \frac{\pi n l}{d} - \frac{2\pi}{d} k \sin \alpha \cos \theta \cos \left(\frac{kl}{2} \sin \alpha \sin \theta \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n R_n \sin \frac{\pi n l}{d}}{\kappa_n} + k \sin \alpha \sin \theta \sin \left(\frac{kd}{2} \sin \alpha \sin \theta \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \gamma_n R_n}{\kappa_n} + \frac{k \sin \alpha \operatorname{ctg} \theta}{\omega \varepsilon_0} \left(\sin \left(\frac{kd}{2} \sin \alpha \sin \theta \right) - \sin \left(\frac{kl}{2} \sin \alpha \sin \theta \right) \right) \right\},$$

$$\kappa_n = k^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \theta - \left(\frac{2\pi n}{d} \right)^2.$$

Амплитуды парциальных волн R_n и диаграмма рассеяния решетки связаны между собой следующим энергетическим соотношением:

$$\frac{1}{D_x D_y \cos \varphi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |P(\theta)|^2 d\theta = |R_0|^2 + \frac{1}{2k \cos \varphi} \sum_{n=-N_1}^{N_1} \gamma_n |R_n|^2 = \cos^2 \varphi,$$

где $N_1 = [d \cos \varphi / \lambda]$, D_y — длина решетки в направлении y , D_x — длина решетки в направлении x .

Таким образом, используя метод, приведенный выше, можно рассчитывать диаграмму рассеяния решетки в полной электродинамической постановке. Диаграмма рассеяния решетки $\mathcal{P}(\theta)$ представляет собой сильно осциллирующую функцию с остронаправленными максимумами в направлениях θ_m , удовлетворяющих условию $\sin \theta_m = m\lambda/d$, $m = \overline{1, N_1}$.

При проектировании ответвителей, делителей лазерного пучка нужно проводить исследование зависимости интенсивности рассеянного поля в направлениях θ_m от параметров решетки, в частности от H/λ . Так как диаграмма рассеяния решетки имеет остронаправленные максимумы в направлениях θ_m , то интенсивность рассеянного поля можно приближенно рассчитывать по формулам $I_m = \frac{1}{2} |\mathcal{P}(\theta_m)|^2 \Delta \theta_m$, где $\Delta \theta_m = m\lambda / (d \sin \alpha)$ — ширина m -го лепестка диаграммы рассеяния решетки.

Рассматривалась бинарная решетка с периодом $d = 20$ мк. На решетку подана плоская волна с $\lambda = 10.6$ мк под углом $\varphi = 45^\circ$ к оси Oz в плоскости xOz . В данном случае в рассеянном поле будут существовать три распространяющиеся гармоники (нулевого, первого и минус первого порядков), причем интенсивности

отраженного поля в первый и минус первый порядки всегда будут равны. Меняя высоту впадины решетки, можно добиться того, что будут равны между собой интенсивности отраженного поля в первый, минус первый и нулевой порядки, т.е. решетка будет делить лазерный пучок на три пучка равной интенсивности. На рис. 3 приведена зависимость интенсивностей отраженного поля в нулевой и первый порядки от H/λ в случае H -моды. Из графика видно, что при $H/\lambda = 0.153$ решетка работает как делитель на три.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скорозватова И.В. (Дмитриева И.В.) Метод расчета возбуждения конечной волноводной решетки // Численные методы электродинамики. Вып. 2. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977. С. 7–22.
2. Дмитриева И.В. Метод расчета диаграммы рассеяния конечной периодической отражательной решетки // Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. С. 153–166.