

# **ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ**

Учебное пособие факультета вычислительной  
математики и кибернетики Московского  
государственного университета

Под редакцией чл.-корр. РАН Д. П. Костомарова,  
акад. РАЕН В. И. Дмитриева

*МОСКОВСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
1997*

## *Из содержания 1997г.,*

|  |            |
|--|------------|
| <i>В.И. Дмитриев.</i> Обратная задача зондирования становлением магнитного поля петли.   | <b>87</b>  |
|  | <b>96</b>  |
| <i>В.И. Дмитриев, А.В. Титов.</i> Обратная задача электромагнитного зондирования формы проводящего тела.                                 |            |
| <i>В.И. Дмитриев, Е. Г. Салтыков.</i> Высокочастотное приближение функции Грина уравнения Гельмгольца для аксиальной неоднородной среды. | <b>104</b> |
| <i>Е. В.Захаров, С. Н. Левченко, Ю.Я. Харланов.</i> Численное решение задачи осесимметричного возбуждения диэлектрического тора.         | <b>109</b> |
| <i>В. И.Дмитриев, Н.А. Мерщикова.</i> Математическое моделирование вертикального электрического зондирования квазислоистых сред.         | <b>123</b> |
| <i>Е. В. Захаров, Е. Ю. Карасева.</i> Исследование гемодинамики артериальной части миокарда методом вычислительного эксперимента.        | <b>159</b> |

## Раздел II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ГЕОФИЗИКИ

Дмитриев В.И.

### Обратная задача зондирования становлением магнитного поля петли

#### п.1. Постановка задачи.

В настоящее время в практике геофизической разведки широко используется метод становления магнитного поля петли в ближней зоне, в котором по измерению поля во времени определяется распределение электропроводности по глубине. Суть метода заключается в следующем. На земной поверхности ( $z = 0$ ) находится круговая петля радиуса "а", в которой течет постоянный ток  $I$ . Такая петля возбуждает магнитное поле, независимое от распределения электропроводности в Земле. Вертикальная компонента этого поля для магнито-однородной Земли равна:

$$B_z^0(r, z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) J_1(\lambda a) e^{-\lambda |z|} \lambda d\lambda. \quad (1)$$

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) ток в петле выключается и возникает переменное квазистационарное поле, убывающее во времени, которое подчиняется уравнениям Максвелла:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E}; \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2)$$

Так как задача осесимметрична, то  $\vec{E} = \{0, E_\varphi, 0\}$ ,  $\vec{B} = \{B_r, 0, B_z\}$  и мы имеем из (2):

$$\mu_0 \sigma(z) \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) \right) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}; \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi). \quad (4)$$

Из (3-4) с учетом  $B_z \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  следует, что  $B_z(r, z, t)$  является решением следующей задачи: найти непрерывную с непрерывными частными производными по  $r$  и  $z$  убывающую на бесконечности функцию  $B_z(r, z, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\sigma(z) \mu_0 \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2}; \quad t > 0, r \geq 0, -\infty < z < \infty \quad (5)$$

и начальному условию

$$B_z(r, z, t=0) = B_z^0(r, z). \quad (6)$$

Измеряемой величиной является изменение во времени магнитного потока в центре петли

$$2\pi \int_0^{a_0} \frac{\partial B_z(r, z=0, t)}{\partial t} r dr = F(t), \quad a_0 < a. \quad (7)$$

Обратная задача состоит в определении распределения электропроводности  $\sigma(z)$ , входящее в прямую задачу (5-6), по дополнительному условию (7), где  $F(t)$  известно из эксперимента.

### п.2. Преобразование обратной задачи.

Представим магнитное поле  $B_z$  в виде:

$$B_z(r, z, t) = \frac{\mu_0 I a_0}{2} \int_0^\infty J_0(\lambda r) J_1(\lambda a) u(z, t, \lambda) \lambda d\lambda. \quad (8)$$

Тогда из (5-6), с учетом (1), получим прямую задачу для функции  $u(z, t, \lambda)$ , зависящую от параметра  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \sigma(z)\mu_0 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \lambda^2 u, & t > 0, \quad -\infty < z < \infty, \\ u(z, t=0, \lambda) = e^{-\lambda|z|}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $u, \frac{\partial u}{\partial z}$  непрерывны по  $z$  на разрывах  $\sigma(z)$ , функция  $u \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $|z| \rightarrow \infty$ .

Обратная задача состоит в определении  $\sigma(z)$  по дополнительному условию

$$\int_0^\infty J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) \frac{\partial u(z=0, t, \lambda)}{\partial t} d\lambda = w_0(t), \quad t \geq 0, \quad (10)$$

где  $w_0(t) = \frac{F(t)}{2\mu_0 I a_0 a}$ .

При решении обратной задачи значительно удобнее использовать не временной, а частотный режим. В этом случае

$$U(z, \omega, \lambda) = \int_0^\infty u(z, t, \lambda) e^{i\omega t} dt;$$

$$W_0(\omega) = \frac{1}{2\mu_0 I a_0 a} \int_0^\infty F(t) e^{i\omega t} dt. \quad (11)$$

При этом прямая задача имеет вид:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \eta^2(z) U = -\sigma(z)\mu_0 e^{-\lambda|z|}, \quad \eta^2 = \lambda^2 - k^2(z), \quad k^2 = i\omega\mu_0\sigma(z), \quad (12)$$

$$U \in C_1 \text{ и } U \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty,$$

а дополнительное условие:

$$\int_0^\infty J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) (1 + i\omega U(z=0, \omega, \lambda)) d\lambda = -W_0(\omega).$$

Учитывая, что при  $z < 0$   $\sigma = \sigma_0 \approx 0$ , а при  $z > H$ ,  $\sigma = \sigma_H$ , мы можем задачу (12) свести к краевой задаче на отрезке  $[0, H]$ :

$$U(z, \omega, \lambda) = \frac{i}{\omega} \left( e^{-\lambda|z|} + v(z, \omega, \lambda) \right),$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 v}{dz^2} - \eta^2(z)v = 0, & z \in (0, H), \\ \frac{d v(z=0, \omega, \lambda)}{dz} - \lambda v(z=0, \omega, \lambda) = 2\lambda, \\ \frac{d v(z=H, \omega, \lambda)}{dz} + \eta_H v(z=H, \omega, \lambda) = 0, & \eta_H = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \\ v \in C_1. \end{cases} \quad (13)$$

Обратная задача заключается в определении  $\sigma(z)$  из дополнительного условия

$$\int_0^\infty J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) v(z=0, \omega, \lambda) d\lambda = W_0(\omega). \quad (14)$$

Часто удобнее решать не краевую задачу (13), а задачу Коши для функции, так называемого адмитанса

$$Y(z, \omega, \lambda) = \frac{1}{v} \frac{dv}{dz}; \quad (15)$$

$$\begin{cases} \frac{d Y}{dz} + Y^2 = \lambda^2 - i\omega\mu_0\sigma(z), & 0 < z < H; \\ Y(z=H, \omega, \lambda) = -\eta_H = -\sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu_0\sigma_H}, & \text{Re } \eta_H > 0. \end{cases} \quad (16)$$

Дополнительное условие (14) в этом случае имеет вид:

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) \frac{\lambda d\lambda}{-\lambda + Y(z=0, \omega, \lambda)} = \frac{W_0(\omega)}{2} \quad (17)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать обратную задачу частотного зондирования в постановке (16-17).

### п.3. Единственность решения обратной задачи.

В начале рассмотрим высокочастотную асимптотику ( $\omega \rightarrow \infty$ ) условия (17). Несобственный интеграл в (17) понимается в следующем смысле:

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) f(\lambda) d\lambda = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_0^{\infty} J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) e^{-\lambda \gamma} f(\lambda) d\lambda, \quad (18)$$

поэтому мы можем вычислять интеграл для любой функции  $f(\lambda)$ , имеющей ограниченный рост на бесконечности. Известный интеграл

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) e^{-\lambda \gamma} d\lambda = \frac{F(k)}{(a + a_0)}, \quad (19)$$

$$F(k) = \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2} \right) K(k) - \frac{1}{k^2} E(k)$$

где  $k = \frac{2\sqrt{aa_0}}{\sqrt{(a+a_0)^2 + \gamma^2}}$ , а  $K(k)$  и  $E(k)$  — эллиптические интегралы первого и

второго рода.

Тогда вычислим

$$c_n = \int_0^{\infty} J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) \lambda^n d\lambda = (-1)^n \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{d^n F(k)}{d\gamma^n} \quad (20)$$

При этом  $c_{2n+1} = 0$   $n \in [0, \infty)$ . Используя (20), получаем асимптотику при  $(a + a_0) \rightarrow \infty$  интеграла (18) в виде:

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) f(\lambda) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(\lambda=0). \quad (21)$$

Рассмотрим теперь условие (17) в обратной задаче. Подынтегральная функция в (17) может быть разложена в ряд по  $\lambda$ . Тогда

$$\frac{\lambda}{-\lambda + Y(z=0, \omega, \lambda)} = \frac{\lambda}{Y_0(\omega)} + \frac{\lambda^2}{Y_0^2(\omega)} (1 - Y_0'(\omega)) + O(\lambda^3), \quad (22)$$

где

$$Y_0(\omega) = Y_0(z=0, \lambda=0, \omega); \quad Y_0'(\omega) = \frac{d}{d\lambda} (Y_0(z=0, \lambda=0, \omega)) \Big|_{\lambda=0}$$

Заметим, что  $\tilde{Y}(z, \omega) = Y(z, \lambda=0, \omega)$ , согласно (16), является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{Y}}{dz} + \tilde{Y}^2 = -i\omega\mu_0\sigma(z), & 0 < z < H; \\ \tilde{Y}(z=H, \omega) = \sqrt{-i\omega\mu_0\sigma_H} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_H}{2}} \end{cases} \quad (23)$$

При этом  $Y_0(\omega) = \tilde{Y}(z=0, \omega)$ . Функция

$$\dot{Y}(z, \omega) = \frac{dY(z, \lambda=0, \omega)}{d\lambda}$$

является, согласно (16), решением задачи

$$\begin{cases} \frac{d\dot{Y}}{dz} + 2\tilde{Y}\dot{Y} = 0, & 0 < z < H; \\ \dot{Y}(z=H) = 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что  $\dot{Y}(z, \omega) \equiv 0$  и  $Y_0'(\omega) = \dot{Y}(z=0, \omega) = 0$ .

Следовательно, из (22) имеем асимптотику:

$$\frac{\lambda}{-\lambda + Y(z=0, \omega, \lambda)} = \frac{\lambda}{\tilde{Y}(z=0, \omega)} + \frac{\lambda^2}{\tilde{Y}^2(z=0, \omega)} + O(\lambda^3), \quad (24)$$

где  $\tilde{Y}(z, \omega)$  — решение задачи (23).

Подставив (24) в условие (17) и учитывая (21), получим высокочастотную асимптотику для известной экспериментальной информации:

$$\frac{c_2}{\tilde{Y}^2(z=0, \omega)} = \frac{W_0(\omega)}{2} \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Таким образом, мы знаем высокочастотную асимптотику  $\tilde{Y}(z=0, \omega)$ . Тогда, согласно теореме единственности магнитотеллурического зондирования [1], мы получаем, что  $\sigma(z)$  задачи (23) однозначно определяется заданием высокочастотной асимптотики  $\tilde{Y}(z=0, \omega)$ . Таким образом, мы имеем теорему единственности решения нашей обратной задачи.

### п.4. Устойчивость определения интегральной проводимости.

Решение обратной задачи (16-17) неустойчиво, т.е. малым ошибкам в заданом  $W(\omega)$  могут соответствовать как угодно большие ошибки в определении электропроводности  $\sigma(z)$ . Однако, определение из обратной задачи интегральной проводимости

$$S(z) = \int_0^z \sigma(\xi) d\xi \quad 0 \leq z \leq H, \quad (26)$$

как будет показано ниже, устойчиво. Для этого покажем в начале, что адмитанс  $Y(z, \lambda, \omega)$  непрерывно зависит от  $S(z)$ .

Проинтегрируем уравнение (16) от  $z$  до  $H$  и получим нелинейное интегральное уравнение для  $Y(z, \lambda, \omega)$ :

$$Y(z) - \int_z^H Y^2(\xi, \lambda, \omega) d\xi = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu_0\sigma_H} - \lambda^2(H-z) + i\omega\mu_0(S(H) - S(z)). \quad (27)$$

Пусть при известных  $H$  и  $\sigma_H$  мы имеем два распределения интегральной проводимости  $S_1(z)$  и  $S_2(z)$  и, соответственно, два адмитанса  $Y_1(z, \lambda, \omega)$  и  $Y_2(z, \lambda, \omega)$ . Тогда из (27) имеем:

$$\delta Y(z, \lambda, \omega) - \int_0^H (Y_1(\xi, \lambda, \omega) + Y_2(\xi, \lambda, \omega)) \delta Y(\xi, \lambda, \omega) d\xi = i\omega\mu_0 \delta S(z), \quad (28)$$

где  $\delta Y = Y_1 - Y_2$ ,  $\delta S = S_1(H) - S_2(H) - S_1(z) + S_2(z)$ .

Если  $\max_z |Y_1(z, \lambda, \omega) + Y_2(z, \lambda, \omega)| \leq M$ , то из (28) имеем:

$$0 \leq |\delta Y| \leq M \int_0^H |\delta Y| d\xi + \omega\mu_0 |\delta S|. \quad (29)$$

Из (29), согласно лемме Гронуолла-Беллмана, получаем оценку для  $|\delta Y|$ :

$$0 \leq |\delta Y| \leq \omega\mu_0 \left( |\delta S(z)| + M \int_0^z |\delta S(\xi)| e^{M(z-\xi)} d\xi \right).$$

Откуда, окончательно, получаем:

$$\max_z |\delta Y| \leq \omega\mu_0 C \max_z |\delta S|. \quad (30)$$

Таким образом, при  $\|\delta S\|_C \rightarrow 0$  имеем  $\|\delta Y\|_C \rightarrow 0$ . Непрерывность зависимости  $Y(\omega)$  от  $S(z)$  доказана.

Заметим, что, согласно (26),  $S(z)$  является монотонно возрастающей непрерывной функцией с кусочно-непрерывной ограниченной производной, т.к. выполняется условие  $0 < \sigma(z) < \sigma_M$ . Следовательно,  $S(z)$  принадлежит компактному множеству.

Таким образом, если рассмотреть обратную задачу

$$I(S(z)) = Y(\omega), \quad (31)$$

в которой должна быть определена интегральная проводимость  $S(z)$  по известному импедансу  $Y(\omega)$ , то можно утверждать следующее:

1. Оператор  $I$  является непрерывным, т.к. было показано, что, согласно (26), малым изменениям  $S(z)$  соответствует малое изменение  $Y(\omega)$ .
2. Решение обратной задачи единственно.
3. Решение обратной задачи  $S(z)$  принадлежит компактному множеству.

Тогда, согласно теореме Тихонова [2], обратное отображение должно быть непрерывным и, следовательно, интегральная проводимость в обратной задаче (31) определяется устойчиво.

Полученное утверждение имеет важное практическое значение, т.к. определяет нам множество эквивалентных решений обратной задачи зондирования  $\Sigma_\delta$ . Все распределения электропроводности  $\sigma(z)$ , имеющие близкие интегральные проводимости

$$\max_{z \in [0, H]} \left| \int_0^z (\sigma_1(z) - \sigma_2(z)) dz \right| \leq \varepsilon(\delta), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_\delta \quad (32)$$

составляют множество эквивалентных по точности решений

$$\max |Y(\omega, \sigma_1) - Y(\omega, \sigma_2)| \leq \delta. \quad (33)$$

Кроме того, мы можем проводить  $S$ -интерпретацию. Определив каким-либо способом, например, методом подбора некоторое  $\sigma_\delta(z) \in \Sigma_\delta$ , которое может сильно отличаться от истинного, мы находим интегральную проводимость

$$S_\delta(z) = \int_0^z \sigma_\delta(z) dz, \quad z \in [0, H]. \quad (34)$$

Эта интегральная проводимость близка к истинной, т.к. малым изменениям адмитанса  $Y(\omega)$  соответствуют малые изменения интегральной проводимости. Теперь мы можем использовать  $S_\delta(z)$  как предварительный результат интерпретации, а для определения  $\sigma(z)$  нам необходимо решить интегральное уравнение первого рода:

$$\int_0^z \sigma(\xi) d\xi = S_\delta(z). \quad (35)$$

Для решения этой задачи имеется хорошо разработанные методы регуляризации.

#### п.5. Алгоритм решения обратной задачи.

Рассмотрим в начале алгоритм решения прямой задачи (16). Обычно решение прямой и обратной задачи рассматривают для кусочно-постоянного распределения электропроводности

$$\sigma(z) = \sigma_n \text{ при } z_{n-1} < z < z_n, \quad n \in [1, N-1], \quad z=0, \quad z_{N-1} = H. \quad (36)$$

Решение уравнения Риккати (16) при постоянном  $\sigma$  имеет вид:

$$Y(z, \omega, \lambda) = -\eta_n \frac{1 - c_n e^{-2\eta_n(z_n - z)}}{1 + c_n e^{-2\eta_n(z_n - z)}} \text{ при } z_{n-1} < z < z_n, \quad (37)$$

где  $\eta_n = \sqrt{\lambda^2 - i\omega\mu_0\sigma_n}$ .

Из условия непрерывности  $Y$  при  $z = z_{n-1}$  имеем:

$$\eta_{n-1} \frac{1 - c_{n-1}}{1 + c_{n-1}} = \eta_n \frac{1 - c_n e^{-2\eta_n h_n}}{1 + c_n e^{-2\eta_n h_n}}, \quad h_n = z_n - z_{n-1}.$$

Откуда получаем рекуррентную формулу для определения  $c_n$ :

$$c_{n-1} = \frac{(\eta_{n-1} - \eta_n) + c_n(\eta_{n-1} + \eta_n)e^{-2\eta_n h_n}}{(\eta_{n-1} + \eta_n) + c_n(\eta_{n-1} - \eta_n)e^{-2\eta_n h_n}}, \quad c_N = 0. \quad (38)$$

Определив  $c_1$ , мы находим, согласно (37),

$$Y(z=0, \omega, \lambda) = -\eta_1 \frac{1 - c_1 e^{-2\eta_1 h_1}}{1 + c_1 e^{-2\eta_1 h_1}}, \quad (39)$$

которое входит в дополнительное условие обратной задачи (17). Заметим, что это условие комплексное, поэтому возникает вопрос о том, что выгоднее использовать  $\text{Re}W_0(\omega)$  или  $\text{Im}W_0(\omega)$ . Учитывая, что экспериментально наблюдаемое  $F(t)$  имеет особенность при  $t \rightarrow 0$ , естественно, необходимо использовать

$$\varphi(\omega) = \text{Im}W_0(\omega) = \frac{1}{2\mu_0 I a a_0} \int_0^{\infty} F(t) \sin \omega t dt. \quad (40)$$

Таким образом, дополнительное условие (17), с учетом (39-40), теперь имеет вид:

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) f(\lambda, \omega) \lambda d\lambda = -\frac{\varphi(\omega)}{2}, \quad (41)$$

где

$$f(\lambda, \omega) = \text{Im} \frac{1 + c_1 e^{-2\eta_1 h_1}}{(\eta_1 + \lambda) - (\eta_1 - \lambda)c_1 e^{-2\eta_1 h_1}}. \quad (42)$$

Отметим, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеем:

$$f(\lambda, \omega) = \text{Im} \frac{1}{(\eta_1 + \lambda)} \rightarrow \text{Im} \left( \frac{1}{2\lambda} + \frac{i\omega\mu_0\sigma_1}{8\lambda^3} \right) = \frac{\omega\mu_0\sigma_1}{8\lambda^3}. \quad (43)$$

Поэтому интеграл в (41) сходится и при  $a = a_0$ .

При решении обратной задачи используется метод регуляризованного подбора. Если обозначить множество  $N$ -слойных кусочно-постоянных распределений  $\sigma(z)$  через  $\Sigma_N$ , а оператор условия (41) в виде:

$$I(\sigma, \omega) = \int_0^{\infty} J_1(\lambda a) J_1(\lambda a_0) \text{Im} \frac{1 + c_1 e^{-2\eta_1 h_1}}{(\eta_1 + \lambda) - (\eta_1 - \lambda)c_1 e^{-2\eta_1 h_1}} \lambda d\lambda,$$

где  $c_1$  определяется через  $\sigma(z) \in \Sigma_N$  по рекуррентной формуле (38), то имеем вариационную задачу для определения  $\sigma$ :

$$\inf_{\sigma \in \Sigma_N} \left\| I(\sigma, \omega) + \frac{\varphi(\omega)}{2} \right\|^2 + \alpha \left[ \sum_{n=1}^N (\sigma_n - \sigma_n^0)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{N-1} \left( \frac{\sigma_n^0}{h_n^0} \right)^2 (h_n - h_n^0)^2 \right\}, \quad (44)$$

где  $\{\sigma_n^0\}$  и  $\{h_n^0\}$  - гипотетическое решение обратной задачи, в окрестности которого ищется истинное решение.

Описанный алгоритм позволяет эффективно решать обратные задачи зондирования становлением магнитного поля петли.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00410).

#### Литература

1. Тихонов А.Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований //ЖВМ и МФ, 1965, 5, №3, 545-547
2. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач //ДАН, 39, 1943, №5, 195-198.

## Обратная задача электромагнитного зондирования формы проводящего тела

### п.1. Постановка задачи.

Рассматривается двумерная модель строения среды, где в слоистой среде находится цилиндрическое тело произвольного сечения (рис.1). В этой среде возбуждается двумерное электромагнитное поле ( $\partial/\partial x \equiv 0$ ) электрической поляризации  $\vec{E} = \{E_x, 0, 0\}$ ,  $\vec{H} = \{0, H_y, H_z\}$ , которое является решением следующей задачи

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2(M)E_x = -i\omega\mu_0 j(M), \quad k^2 = i\omega\mu_0 \sigma(M) \quad (1)$$

$$\sigma(M) = \begin{cases} \sigma(z) & \text{при } M \in S \\ \sigma_T & \text{при } M \in S_T \end{cases}$$

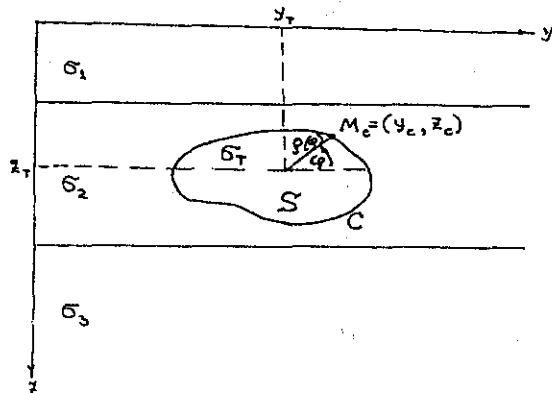


Рис.1

$E_x$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial z}$  — непрерывны на границах  $z = z_m, m \in [0, N-1]$ , на которых терпит разрыв  $\sigma(z)$ , а на контуре  $S$ , ограничивающем область сечения  $S$  непрерывных  $E_x$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial n}$ , где  $\vec{n}$  — нормаль к  $S$ . На бесконечности поле затухает ( $\sigma \neq 0$ ).

Обратная задача электромагнитного зондирования состоит в определении  $\sigma(z)$ ,  $\sigma_T$  и контура  $S$  по известному электромагнитному полю на земной поверхности  $z = z_0 = 0$  как функции частоты  $\omega$  и координаты  $y$ . Обычно измеряют

$$H_z(y, z=0) = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y} = q(y, \omega) \quad \text{или} \quad E_x(y, z=0) = p(y, \omega) \quad (2)$$

Любое из условий (2) дает возможность однозначно решить поставленную обратную задачу.

При решении обратной задачи предполагается, что область  $S$  является звездной, а контур  $S$  — гладким. Это означает, что контур  $S$  может быть задан в виде:

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (3)$$

где  $\rho$  расстояние от центра тела с координатами  $(y_T, z_T)$  до контура  $C$

$$\rho = \sqrt{(y - y_T)^2 + (z - z_T)^2}, \quad M(y, z) \in C. \quad (4)$$

Координаты точки на контуре  $C$  записываются в виде:

$$\begin{aligned} y_c &= y_T + \rho(\varphi) \cos \varphi \\ z_c &= z_T - \rho(\varphi) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Функция  $\rho(\varphi)$  дважды непрерывно дифференцируема, т.е. контур  $C$  имеет непрерывную касательную и кривизну. При решении обратной задачи считается, что координаты центра тела  $(y_T, z_T)$  и некоторое начальное приближение формы тела  $\rho_0 = \rho_0(\varphi)$  — известны. Поэтому решение обратной задачи состоит в коррекции формы тела. Для этого мы должны линеаризовать обратную задачу и вывести интегральное уравнение, связывающее изменение формы тела  $\delta\rho(\varphi)$  с изменением электромагнитного поля на земной поверхности.

### п.2. Вывод интегрального уравнения для идеально проводящего тела.

Рассмотрим вначале для простоты определение формы идеально проводящего тела ( $\sigma_T = \infty$ ). Тогда вместо условия сопряжения на контуре  $C$  мы будем иметь граничное условие

$$E_x(M_c) = 0, \quad M_c \in C. \quad (6)$$

В этом случае решение прямой задачи (1) представляется в виде потенциала двойного слоя:

$$E_x(M) = E_x^0(M) + \int_C v(M'_c) \frac{\partial G(M, M'_c)}{\partial n_{M'_c}} dl_{M'_c}, \quad M'_c \in C, \quad (7)$$

где  $G(M, M_c)$  — функция Грина для слоистой среды.

$$\Delta G + k^2(z)G = -\delta(r_{M_c}), \quad (8)$$

на границах разрыва  $\sigma(z)$  ( $z = z_m, m \in [0, N-1]$ ) непрерывны  $G$  и  $\frac{\partial G}{\partial z}$ , а на

бесконечности  $G \rightarrow 0$ . Функция  $E_x^0(M)$  в (7) представляет собой первичное поле, возбуждаемое в слоистой среде распределением тока  $j$ :

$$E_x^0(M) = i\omega\mu_0 \int_V j(M') G(M, M') dv_{M'} \quad (9)$$

Подставив (7) в граничное условие (6), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода для функции  $v(M_c)$ :

$$\frac{v(M_c)}{2} - \int_C v(M'_c) \frac{\partial G(M_c, M'_c)}{\partial n_{M'_c}} dl_{M'_c} = E_x^0(M_c) \quad (10)$$

Если в уравнении (10) перейти к полярным координатам (5), то мы получим уравнение для  $v(\varphi)$ :



$$\frac{v(\varphi)}{2} - \int_0^{2\pi} v(\varphi') K_\rho(\varphi, \varphi') d\varphi' = \tilde{E}_x^0(\varphi) \quad (11)$$

Это уравнение для заданного  $\rho(\varphi)$  легко решается численно, и это решение будем записывать в виде

$$v(\varphi) = N(\varphi, \rho), \quad (12)$$

где  $\rho$  в выражении (12) обозначает, что решение получено при фиксированном  $\rho(\varphi)$ .

Зная  $v(\varphi)$ , согласно (7), можно вычислить электромагнитные поля на земной поверхности. Для этого функцию Грина  $G(M, M'_c)$  мы запишем как функцию четырех переменных

$$G(M, M'_c) = G(y, z, y'_c, z'_c)$$

и, соответственно, ее нормальную производную

$$\frac{\partial G(M, M'_c)}{\partial n_{M'_c}} = \frac{\partial G(y, z, y'_c, z'_c)}{\partial y'_c} \cos \varphi - \frac{\partial G(y, z, y'_c, z'_c)}{\partial z'_c} \sin \varphi \quad (13)$$

Если в (13) подставить  $y'_c, z'_c$  из (5) и положить  $z=0$ , то мы найдем ядро для расчета полей на земной поверхности

$$\left. \frac{\partial G(M, M'_c)}{\partial n_{M'_c}} \right|_{z=0} = Q(y, \varphi, \rho(\varphi)) \quad (14)$$

Тогда, согласно (7) находим

$$E_x(y, z=0, \rho) = E_x^0(y, z=0) + \int_0^{2\pi} N(\varphi, \rho) Q(y, \varphi, \rho(\varphi)) \rho(\varphi) d\varphi, \quad (15)$$

$$H_z(y, z=0, \rho) = H_z^0(y, z=0) + \frac{i}{\omega \mu} \int_0^{2\pi} N(\varphi, \rho) \frac{\partial Q(y, \varphi, \rho(\varphi))}{\partial y} \rho(\varphi) d\varphi, \quad (16)$$

где параметр  $\rho$  в обозначении поля говорит о том, что поле вычислено для тела  $\rho(\varphi)$ . Если мы теперь воспользуемся условиями (2) обратной задачи, то получим нелинейные интегральные уравнения для определения  $\rho(\varphi)$ .

Линеаризуем полученное интегральное уравнение. Пусть нам известно некоторое  $\rho_{n-1}(\varphi)$ . Решим прямую задачу и найдем  $N(\varphi, \rho_{n-1})$ . Пересчет же поля на земную поверхность сделаем для  $\rho_n(\varphi) = \rho_{n-1}(\varphi) + \delta \rho_{n-1}(\varphi)$ . Считая, что  $|\delta \rho_{n-1}| \ll |\rho_{n-1}|$ , возьмем линейное приближение для функции

$$Q(y, \varphi, \rho_n(\varphi)) = Q(y, \varphi, \rho_{n-1}(\varphi)) + \delta \rho_{n-1}(\varphi) Q_1(y, \varphi, \rho_{n-1}), \quad (17)$$

где  $Q_1(y, \varphi, \rho_{n-1}) = \left. \frac{\partial Q}{\partial \rho} \right|_{\rho = \rho_{n-1}}$

Тогда, согласно (15-16), мы получим поля на земной поверхности в виде:

$$E_x(y, z=0, \rho_n) \cong E_x(y, z=0, \rho_{n-1}) + \int_0^{2\pi} \delta \rho_{n-1}(\varphi) N(\varphi, \rho_{n-1}) \{Q(y, \varphi, \rho_{n-1}) + \rho_{n-1}(\varphi) Q_1(y, \varphi, \rho_{n-1})\} d\varphi, \quad (18)$$

$$H_z(y, z=0, \rho_n) \cong H_z(y, z=0, \rho_{n-1}) + \frac{i}{\omega \mu_0} \int_0^{2\pi} \delta \rho_{n-1}(\varphi) N(\varphi, \rho_{n-1}) \left\{ \frac{\partial Q(y, \varphi, \rho_{n-1})}{\partial y} + \rho_{n-1}(\varphi) \frac{\partial Q_1(y, \varphi, \rho_{n-1})}{\partial y} \right\} d\varphi, \quad (19)$$

Подставив (18-19) в условия (2), получим интегральные уравнения Фредгольма первого рода для  $\delta \rho_{n-1}(\varphi)$ :

$$\int_0^{2\pi} \delta \rho_{n-1}(\varphi) M(y, \varphi) d\varphi = P(y, \omega) - E_x(y, z=0, \rho_{n-1}), \quad (20)$$

$$\int_0^{2\pi} \delta \rho_{n-1}(\varphi) \frac{\partial M(y, \varphi)}{\partial y} d\varphi = -i \omega \mu_0 (q(y, \omega) - H_z(y, z=0, \rho_{n-1})), \quad (21)$$

где

$$M(y, \varphi) = N(\varphi, \rho_{n-1}) (Q(y, \varphi, \rho_{n-1}) + \rho_{n-1}(\varphi) Q_1(y, \varphi, \rho_{n-1})). \quad (22)$$

Таким образом, решая уравнение (20) при измерении электрического поля  $E_x(y, z=0) = p(y, \omega)$  или уравнение (21) при измерении магнитного поля  $H_z(y, z=0) = q(y, \omega)$ , мы найдем поправку к описанию формы сечения тела  $\delta \rho_{n-1}(\varphi)$ , а, следовательно, новое приближение формы тела

$$\rho_n(\varphi) = \rho_{n-1}(\varphi) + \delta \rho_{n-1}(\varphi). \quad (23)$$

Теперь мы можем получить уравнение новой поправки  $\delta \rho_n(\varphi)$  и т.д.

Так как для поправки к форме тела мы получили интегральное уравнение Фредгольма первого рода, то для его решения мы должны использовать метод регуляризации [1].

### п.3. Вывод интегрального уравнения для тела конечной проводимости.

Обычно для решения прямой задачи вычисления аномального электромагнитного поля от тела конечной проводимости используют интегральное уравнение по сечению тела. Однако для линеаризации обратной задачи целесообразно иметь форму пересчета поля в виде интегрирования по контуру  $C$ , ограничивающему сечение  $S$ . Поэтому при решении прямой задачи воспользуемся методом редукции к интегральному уравнению, описанном в [2].

Для получения интегрального уравнения применим во внешней области формулу Грина к искомой функции  $E_x(M')$  и функции Грина для слоистой среды  $G(M, M')$ :

$$E_x^0(M) + \int_C \left\{ E_x(M') \frac{\partial G(M, M')}{\partial n_{M'}} - G(M, M') \frac{\partial E_x(M')}{\partial n_{M'}} \right\} dl_{M'} =$$

$$= \begin{cases} E_x(M) & M \notin S \\ 0 & M \in S, \end{cases} \quad (24)$$

а затем применим во внутренней области  $S$  формулу Грина к  $E_x(M')$  и функции Грина для однородной среды с проводимостью, равной проводимости тела  $G_0(M, M') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_T r_{MM'})$ :

$$- \int_C \left\{ E_x(M') \frac{\partial G_0(M, M')}{\partial n_{M'}} - G_0(M, M') \frac{\partial E_x(M')}{\partial n_{M'}} \right\} dl_{M'} =$$

$$= \begin{cases} 0 & M \notin S \\ E_x(M) & M \in S. \end{cases} \quad (25)$$

Сложив (24) и (25), получим интегральное представление поля во всем пространстве через  $E_x(M')$  и  $\frac{\partial E_x(M')}{\partial n}$  на контуре  $C$ :

$$E_x(M) = E_x^0(M) + \int_C \left\{ E_x(M') \frac{\partial(G - G_0)}{\partial n_{M'}} - (G - G_0) \frac{\partial E_x(M')}{\partial n_{M'}} \right\} dl_{M'} \quad (26)$$

Заметим, что в выражение (26) входит только разность функций Грина  $(G(M, M') - G_0(M, M'))$ , которая сама и ее нормальная производная не имеют особенностей при совпадении аргументов ( $M' \rightarrow M$ ), поэтому мы имеем право продифференцировать (26) по нормали и опустить точку  $M$  на контур  $C$  ( $M = M_c \in C$ ):

$$\frac{\partial E_x(M_c)}{\partial n_{M_c}} = \frac{\partial E_x^0(M_c)}{\partial n_{M_c}} +$$

$$+ \int_C \left\{ E_x(M') \frac{\partial^2(G - G_0)}{\partial n_{M'} \partial n_{M_c}} - \frac{\partial(G - G_0)}{\partial n_{M_c}} \frac{\partial E_x(M')}{\partial n_{M'}} \right\} dl_{M'} \quad (27)$$

Если в (26) положить  $M = M_c \in C$ , то (26-27) дают нам систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода для  $E_x(M_c)$  и  $\frac{\partial E_x(M_c)}{\partial n_{M_c}}$ , которая достаточно просто решается численно. Эти решения являются функциями угла  $\varphi$  и зависят от формы тела  $\rho(\varphi)$ . Мы будем их обозначать:

$$E_x(M_c) = e(\varphi, \rho); \quad \frac{\partial E_x(M_c)}{\partial n_{M_c}} = h(\varphi, \rho) \quad (28)$$

Зная  $e(\varphi, \rho)$  и  $h(\varphi, \rho)$ , можно, согласно (28), определить поле  $E_x(y, z = 0, \rho)$  на земной поверхности

$$E_x(y, z = 0, \rho) = E_x^0(y, z = 0) + \int_0^{2\pi} e(\varphi, \rho) R(y, \varphi, \rho) \rho(\varphi) d\varphi -$$

$$- \int_0^{2\pi} h(\varphi, \rho) \Phi(y, \varphi, \rho) \rho(\varphi) d\varphi, \quad (29)$$

где

$$R(y, \varphi, \rho) = \frac{\partial(G(y, z = 0, y_c, z_c) - G_0(y, z = 0, y_c, z_c))}{\partial n_{M_c}}, \quad (30)$$

$$\Phi(y, \varphi, \rho) = G(y, z = 0, y_c, z_c) - G_0(y, z = 0, y_c, z_c) \quad (31)$$

при  $y_c = y_T + \rho(\varphi) \cos \varphi$ ,  $z_c = z_T - \rho(\varphi) \sin \varphi$ .

Магнитное поле на земной поверхности при этом равно

$$H_x(y, z = 0, \rho) = H_x^0(y, z = 0) + \frac{i}{\omega \mu_0} \int_0^{2\pi} e(\varphi, \rho) \frac{\partial R(y, \varphi, \rho)}{\partial y} \rho(\varphi) d\varphi -$$

$$- \int_0^{2\pi} h(\varphi, \rho) \frac{\partial \Phi(y, \varphi, \rho)}{\partial y} \rho(\varphi) d\varphi. \quad (32)$$

Если  $E_x(y, z = 0, \rho)$  и  $H_x(y, z = 0, \rho)$  из (29) и (32) подставить в условие (2), мы получим нелинейные интегральные уравнения для  $\rho(\varphi)$ . Линеаризуем эти интегральные уравнения. Пусть нам известно  $\rho(\varphi) \cong \rho_{n-1}(\varphi)$  и мы хотим найти поправку к форме  $\delta\rho(\varphi) \approx \delta\rho_{n-1} = \rho_n(\varphi) - \rho_{n-1}(\varphi)$ . Итерационный процесс для интегральных уравнений запишем в виде:

$$\int_0^{2\pi} \{ e(\varphi, \rho_{n-1}) R(y, \varphi, \rho_n) - h(\varphi, \rho_{n-1}) \Phi(y, \varphi, \rho_n) \} \rho_n(\varphi) d\varphi =$$

$$= P(y, \omega) - E_x^0(y, z = 0)$$

$$\int_0^{2\pi} \{ e(\varphi, \rho_{n-1}) \frac{\partial R(y, \varphi, \rho_n)}{\partial y} - h(\varphi, \rho_{n-1}) \frac{\partial \Phi(y, \varphi, \rho_n)}{\partial y} \} \rho_n(\varphi) d\varphi =$$

$$= i\omega\mu_0 (h_z^0(y, z = 0) - q(y, \omega)) \quad (33)$$

## Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М. Изд. "Наука", 1986, с.287.
2. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. ЖВМ МФ, т.10, №6, 1970, с.1458-1464.

Считая, что  $|\delta\rho_{n-1}(\varphi)| \ll \rho_{n-1}(\varphi)$ , линеаризуем выписанные уравнения. Для этого запишем:

$$\begin{aligned} R(y, \varphi, \rho_n) &\approx R(y, \varphi, \rho_{n-1}) + \delta\rho_{n-1}(\varphi)R_1(y, \varphi, \rho_{n-1}) \\ \Phi(y, \varphi, \rho_n) &\approx \Phi(y, \varphi, \rho_{n-1}) + \delta\rho_{n-1}(\varphi)\Phi_1(y, \varphi, \rho_{n-1}) \end{aligned} \quad (34)$$

Подставив (34) в (33), получим линеаризованные интегральные уравнения для определения  $\delta\rho_{n-1}(\varphi)$  по электрическому полю:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left\{ e(\varphi, \rho_{n-1}) (R(y, \varphi, \rho_{n-1}) + \rho_{n-1}(\varphi)R_1(y, \varphi, \rho_{n-1})) - \right. \\ &- h(\varphi, \rho_{n-1}) (\Phi(y, \varphi, \rho_{n-1}) + \rho_{n-1}(\varphi)\Phi_1(y, \varphi, \rho_{n-1})) \left. \right\} \delta\rho_{n-1}(\varphi) d\varphi = \\ &= p(y, \omega) - E_x(y, z=0, \rho_{n-1}) \end{aligned} \quad (35)$$

или по магнитному полю

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left\{ e(\varphi, \rho_{n-1}) \left( \frac{\partial R(y, \varphi, \rho_{n-1})}{\partial y} + \rho_{n-1}(\varphi) \frac{\partial R_1(y, \varphi, \rho_{n-1})}{\partial y} \right) - \right. \\ &- h(\varphi, \rho_{n-1}) \left( \frac{\partial \Phi(y, \varphi, \rho_{n-1})}{\partial y} + \rho_{n-1}(\varphi) \frac{\partial \Phi_1(y, \varphi, \rho_{n-1})}{\partial y} \right) \left. \right\} \delta\rho_{n-1}(\varphi) d\varphi = \\ &= i\omega\mu_0 (H_z(y, z=0, \rho_{n-1}) - q(y, \omega)) \end{aligned} \quad (36)$$

Полученные уравнения являются уравнениями Фредгольма первого рода и их решение неустойчиво так же, как и решение обратной задачи. Поэтому при решении уравнений (35-36) используется метод регуляризации. В качестве стабилизатора используется норма  $\delta\rho_{n-1}(\varphi)$ , что одновременно гарантирует применимость метода линеаризации.

При применении предложенного итерационного метода решения обратной задачи определения формы сечения цилиндрического тела необходимо предварительно знать  $\sigma(z), y_T, z_T$  и гипотетическую (начальную) форму  $\rho_0(\varphi)$ . Электропроводность слоистой среды находится из частотной зависимости поля на земной поверхности в точке, где влияние тела практически равно нулю. Координаты центра сечения определяются приближенно по центру аномалии электромагнитного поля и по частотной зависимости максимума аномалии поля. Наиболее сложно определить начальную форму тела  $\rho_0(\varphi)$ . Наиболее целесообразно брать эллиптическое сечение, длина большой оси выбирается близкой к ширине аномалии поля, а малая ось — из априорной информации. Затем форма тела уточняется с помощью предложенного итерационного процесса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 96-01-00410).

### Высокочастотное приближение функции Грина уравнения Гельмгольца для аксиальной неоднородной среды

**1. Введение.** В статье приводится асимптотический метод решения задачи о распространении волны от точечного источника в двумерно-неоднородной среде. Неоднородная среда может быть интерпретирована как ионосфера или плазма с плотностью электронной концентрации  $N(r, \varphi)$ .

Математически задача формулируется как задача решения уравнения Гельмгольца, записанного в полярной системе координат с переменным, зависящим от двух координат  $r$  и  $\varphi$  коэффициентом. Это уравнение рассматривается в области  $r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Решение должно удовлетворять условию излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Эта задача сводится к интегральному уравнению 2-го рода. В том случае, когда волновое число  $k$  достаточно велико, уравнение допускает решение методом последовательных приближений. Решение этим методом возможно также в случае, когда зависимость функции  $N(r, \varphi)$  от координаты  $r$  является произвольной, а зависимость от другой координаты  $\varphi$  является слабой.

Периодическое по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  решение задачи строится с помощью непериодической функции  $V(r, \varphi)$ , определенной в области  $r \geq 0, -\infty < \varphi < \infty$ . Эта функция как функция переменной  $r$  при фиксированном значении  $\varphi$  разлагается в интеграл по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля на полупрямой  $0 \leq r < \infty$ .

Собственные функции удовлетворяют уравнению

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + [-k^2 + N(r, \varphi)] R = \frac{\lambda^2}{r^2} R \quad (0 < r < \infty). \quad (1)$$

Коэффициент  $N$  рассматривается зависящим от координаты  $\varphi$  как параметра. Собственная функция  $R$  зависит от  $\varphi$  как параметра. Она является ограниченным решением уравнения при  $0 \leq r < \infty$ , кусочно дважды дифференцируемым по  $r$  при  $0 \leq r < \infty$ .

При подстановке функции  $V(r, \varphi)$  в виде интеграла в уравнение Гельмгольца для коэффициента разложения  $\Phi(\varphi, \lambda)$  получаем интегральное уравнение 2-го рода. Оно допускает решение методом последовательных приближений, если параметр  $k$  в уравнении является большим или в случае слабой зависимости среды от координаты  $\varphi$ .

**2. Постановка задачи и метод ее решения.** Построим функцию  $u$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + [k^2 - N(r, \varphi)] u = -\frac{1}{r} \delta(r-r') \delta(\varphi-\varphi') \quad (1)$$

и условию ограниченности при  $0 \leq r < \infty$ . Уравнение (1) рассматривается в области  $0 < r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Функция  $u$  представляет функцию Грина. Функции  $N(r, \varphi), u(r, \varphi)$  периодичны по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Функция  $N$

определена в области  $r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , принимает действительные значения и является кусочно непрерывной функцией переменных  $r$  и  $\varphi$ . Функция  $N \geq 0$ , является ограниченной и  $N \equiv 0$  при  $0 \leq r \leq r_1, r_2 \leq r < \infty (r_1 \leq r_2)$ .

Решение задачи выражается с помощью ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V(r, \varphi + 2\pi m). \quad (2)$$

Здесь  $V(r, \varphi)$  - решение уравнения (1), рассматриваемое на бесконечно-листной римановой поверхности  $r \geq 0, -\infty < \varphi < \infty$ , удовлетворяющее условию ограниченности и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Решение уравнения (1) в области  $r \geq 0, -\infty < \varphi < \infty$  ищем в виде

$$V(k, r, \varphi) = \int_{\Lambda} \Phi(k, \varphi, \lambda) R(k, r, \varphi, \lambda) d\lambda \quad (3)$$

Функция  $R(r, \varphi, \lambda)$  является собственной функцией оператора Штурма-Лиувилля (1.1). Эта функция представляет кусочно дважды дифференцируемое по  $r$ , ограниченное на луче  $r \geq 0$  решение уравнения (1.1).  $\Lambda$  - непрерывный спектр, соответствующий задаче (1.1). Предполагается, что дискретный спектр отсутствует.

Собственные функции  $R(r, \varphi, \lambda)$  имеют следующее асимптотическое поведение в окрестности нуля:

$$R = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin[\lambda \ln r + \gamma(k, \varphi, \lambda)] + o(1), \quad r \rightarrow 0, \quad (4)$$

$\gamma(k, \varphi, \lambda)$  - постоянная, не зависящая от  $r$ .

**3. Сведение задачи к интегро-дифференциальному уравнению.** Подставив (2.3) в (2.1), получаем

$$\int_{\Lambda} \frac{1}{r^2} (\Phi_{\varphi\varphi} R + 2\Phi_{\varphi} R_{\varphi} + \Phi R_{\varphi\varphi}) d\lambda + \int_{\Lambda} \Phi \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + [k^2 - N(r, \varphi)] R \right\} d\lambda = -\frac{1}{r} \delta(r-r') \delta(\varphi-\varphi').$$

Используя (1.1), имеем

$$\int_{\Lambda} \frac{1}{r^2} (\Phi_{\varphi\varphi} R + 2\Phi_{\varphi} R_{\varphi} + \Phi R_{\varphi\varphi}) d\lambda - \int_{\Lambda} \Phi \frac{\lambda^2}{r^2} R = -\frac{1}{r} \delta(r-r') \delta(\varphi-\varphi'). \quad (1)$$

Умножим (1) на  $R(r, \varphi, \lambda)/r$  и проинтегрируем по  $r$  по полупрямой  $[0, \infty)$ . Меняя порядок интегрирования и используя соотношение

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{r} R(r, \varphi, \lambda) R(r, \varphi, \lambda) dr = \delta(\lambda - \lambda'), \quad (2)$$

получаем

$$\Phi_{\varphi\varphi}(\varphi, \lambda) - \lambda^2 \Phi(\varphi, \lambda) = -R(r', \varphi, \lambda) \delta(\varphi - \varphi') - \int_{\Lambda} d\lambda' [K_1(\varphi, \lambda', \lambda) \Phi_{\varphi}(\varphi, \lambda') + \tilde{K}_2(\varphi, \lambda', \lambda) \Phi(\varphi, \lambda')], \quad (3)$$

где

$$K_1(\varphi, \lambda', \lambda) = 2 \int_0^{\infty} R_{\varphi}(r, \varphi, \lambda') R(r, \varphi, \lambda) dr / r,$$

$$\bar{K}_2(\varphi, \lambda', \lambda) = \int_0^{\infty} R_{\varphi\varphi}(r, \varphi, \lambda') R(r, \varphi, \lambda) dr / r.$$

4. Уравнение для функции  $\Phi$ . Применим метод вычисления интегралов  $K_1$  и  $\bar{K}_2$ , изложенный в [1], при условии, что функция  $R$  имеет асимптотическое поведение при  $r \rightarrow 0$ , определяемое формулой (2.4). Используя представление

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\alpha z} dz = \pi \delta(\alpha) - 1/i\alpha, \quad (1)$$

получаем

$$K_1(\varphi, \lambda', \lambda) = \frac{2r_1}{\lambda^2 - \lambda'^2} \times \\ \times \left[ R(r_1, \varphi, \lambda) \partial R_{\varphi}(r_1, \varphi, \lambda) / \partial r_1 - R_{\varphi}(r_1, \varphi, \lambda) \partial R(r_1, \varphi, \lambda) / \partial r_1 \right] + \\ + 2 \int_{r_1}^{\infty} R_{\varphi}(r, \varphi, \lambda') R(r, \varphi, \lambda) dr / r, \\ \bar{K}_2(\varphi, \lambda', \lambda) = -\gamma_{\varphi}^2(\varphi, \lambda) \delta(\lambda' - \lambda) +$$

$$+ \frac{r_1}{\lambda^2 - \lambda'^2} \left[ R(r_1, \varphi, \lambda) \partial R_{\varphi\varphi}(r_1, \varphi, \lambda) / \partial r_1 - R_{\varphi\varphi}(r_1, \varphi, \lambda) \partial R(r_1, \varphi, \lambda) / \partial r_1 \right] + \\ + \int_{r_1}^{\infty} R_{\varphi\varphi}(r, \varphi, \lambda') R(r, \varphi, \lambda) dr / r.$$

С помощью (2) формула (3.3) принимает вид

$$\Phi_{\varphi\varphi}(\varphi, \lambda) - [\lambda^2 + \gamma_{\varphi}^2(\varphi, \lambda)] \Phi(\varphi, \lambda) = -R(r', \varphi, \lambda) \delta(\varphi - \varphi') - \\ - \int_{\Lambda} d\lambda' [K_1(\varphi, \lambda', \lambda) \Phi_{\varphi}(\varphi', \lambda') + K_2(\varphi, \lambda', \lambda) \Phi(\varphi', \lambda')]. \quad (3)$$

Здесь

$$K_2(\varphi, \lambda', \lambda) = \gamma_{\varphi}^2(\varphi, \lambda) \delta(\lambda' - \lambda) + \bar{K}_2(\varphi, \lambda', \lambda). \quad (4)$$

Используем решение  $G(\varphi, \varphi', \lambda)$  уравнения

$$G_{\varphi\varphi}(\varphi, \lambda) - [\lambda^2 + \gamma_{\varphi}^2(\varphi, \lambda)] G(\varphi, \lambda) = -\delta(\varphi - \varphi'). \quad (5)$$

С помощью функции Грина  $G(\varphi, \varphi', \lambda)$  из уравнения (3) для функции  $\Phi$  получаем

$$\Phi(\varphi, \lambda) = G(\varphi, \varphi', \lambda) R(r', \varphi', \lambda) + \int_{\Lambda} d\varphi' G(\varphi, \varphi', \lambda) \times \\ \times \int_{\Lambda} d\lambda' [K_1(\varphi', \lambda', \lambda) \Phi_{\varphi}(\varphi', \lambda') + K_2(\varphi', \lambda', \lambda) \Phi(\varphi', \lambda')]. \quad (6)$$

5. Сведение к интегральному уравнению 2-го рода. Преобразуем член с функцией  $K_1$  в интеграле (4.6)

$$I(\varphi, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' G(\varphi, \varphi', \lambda) \int_{\Lambda} d\lambda' K_1(\varphi', \lambda', \lambda) \Phi_{\varphi}(\varphi', \lambda') = \\ = \int_{\Lambda} d\lambda' \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' K_1(\varphi', \lambda', \lambda) G(\varphi, \varphi', \lambda) \Phi_{\varphi}(\varphi', \lambda').$$

Интегрируя по частям во внутреннем интеграле и принимая во внимание, что функция  $\Phi(\varphi, \lambda) \rightarrow 0$  при  $|\varphi| \rightarrow \infty$ , получаем

$$I(\varphi, \lambda) = - \int_{\Lambda} d\lambda' \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \Phi(\varphi', \lambda') \frac{\partial}{\partial \varphi'} [K_1(\varphi', \lambda', \lambda) G(\varphi, \varphi', \lambda)]$$

Таким образом, приходим к интегральному уравнению

$$\Phi(\varphi, \lambda) = F(\varphi, \varphi', r', \lambda) + \int_{\Lambda} d\lambda' \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' K(\varphi, \lambda; \varphi', \lambda') \Phi(\varphi', \lambda'), \quad (1)$$

где

$$F(\varphi, \varphi', r', \lambda) = G(\varphi, \varphi', \lambda) R(r', \varphi', \lambda),$$

$$K(\varphi, \lambda; \varphi', \lambda') = - \frac{\partial}{\partial \varphi'} [K_1(\varphi', \lambda', \lambda) G(\varphi, \varphi', \lambda)] + K_2(\varphi', \lambda', \lambda) G(\varphi, \varphi', \lambda).$$

6. Доказательство сходимости ряда Неймана. От параметра  $k$  зависят как функция Грина  $G(k, \varphi, \varphi', \lambda)$ , в связи с зависимостью функции  $\gamma$  в уравнении (4.5) от параметра  $k$ , так и функции  $K_1$  и  $K_2$ , определяемые формулами (4.2) и (4.4), в связи с зависимостью функции  $R$  от параметра  $k$ .

Функции  $K_1, K_2, \frac{\partial K_1}{\partial \varphi'}$  представляют собой алгебраические выражения и

интегралы с функциями  $R_{\varphi}(k, r, \varphi, \lambda), R_{\varphi\varphi}(k, r, \varphi, \lambda), R(k, r, \varphi, \lambda)$ , определяемые уравнением (1.1), и имеют асимптотику типа ВКБ при  $k \rightarrow \infty$ . Функция  $R$  имеет оценку  $R = O(1/\sqrt{k})$  и  $\partial R / \partial r = O(\sqrt{k})$  вне окрестности точки  $r = 0$ . Первая и вторая производные по  $\varphi$  собственной функции  $R$  имеют оценку

$$R_{\varphi} = O(1/k^{3/2}), R_{\varphi\varphi} = O(1/k^{3/2})$$

и

$$\partial R_{\varphi} / \partial r = O(1/\sqrt{k}), \partial R_{\varphi\varphi} / \partial r = O(1/\sqrt{k}).$$

Поэтому функции  $K_1$  и  $K_2$  имеют оценку  $K_1 = O(1/k), K_2 = O(1/k)$ , и функция  $\partial K_1 / \partial \varphi'$  имеет оценку  $\partial K_1 / \partial \varphi' = O(1/k)$ .

Функция  $G$  является функцией Грина, удовлетворяющей уравнению (4.5) с коэффициентом, выражающимся через первую производную по  $\varphi$  функции  $\gamma$ . Функция Грина имеет оценку  $G = O(1)$ , а ее производная по  $\varphi'$  оценку  $G_{\varphi'} = O(1)$ . Таким образом, ядро интегрального уравнения (5.1) функция  $K$  имеет порядок  $O(1/k)$  и интегрирование по  $\varphi'$  в (5.1) определяет оператор сжатия. Интегрирование по  $\lambda'$  определяет интегральный оператор с ядром типа Коши.

Принимая во внимание теорему Рисса об ограниченности интегрального оператора с ядром типа Коши в  $L_p$  при  $p > 1$  [2] может быть доказана сходимость ряда Неймана для полученного уравнения (1). Ряд сходится в обычном смысле при  $k \gg 1$  и является асимптотическим при  $k \rightarrow \infty$ .

Ряд Неймана также сходится, когда  $k$  фиксировано, а функция  $N$  слабо зависит от координаты  $\varphi$ , т.е. когда  $R_p$  и  $R_{pp}$  и их производная по  $r$  равномерно малы при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  [3,4].

#### Литература

1. Sommerfeld A. Partielle Differentialgleichungen der Physic. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1966. S. 194-197.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966. С. 219.
3. Дмитриев В.И., Салтыков Е.Г. Обоснование равномерной высокочастотной асимптотики функции Грина уравнения Гельмгольца // УМН. 1991. Т. 46. Вып.6 /282/. С. 176.
4. Дмитриев В.И., Салтыков Е.Г. Обоснование равномерной высокочастотной асимптотики функции Грина уравнения Гельмгольца // Математическое моделирование и решение обратных задач математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. С.125-129.

Захаров Е.В., Левченко С.Н., Харланов Ю.Я.

### Численное решение задачи осесимметричного возбуждения диэлектрического тора

**Введение.** Линзовая антенна в виде диэлектрического тора со слабонаправленным облучателем, расположенным вблизи оси вращения, является весьма перспективным типом антенн с круговой диаграммой направленности или кольцевым сканированием в диапазонах миллиметровых и сантиметровых волн [1,2]. Для электродинамического исследования таких антенн могут быть использованы, например, численные методы решения задачи возбуждения диэлектрического тела произвольной формы [3-5] или диэлектрического тела вращения [6-8]. Отметим также работу [9], где на основе метода интегральных уравнений решается задача падения плоской волны на диэлектрическое кольцо. Универсальным является развитый в последние годы метод объёмных сингулярных интегральных уравнений, позволяющий исследовать дифракцию поля на телах произвольной формы, в том числе неоднородных [3,5]. Алгебраизация задачи осуществляется методом коллокации или методом Галёркина, а решение системы уравнений - итерационными методами. Однако применение метода существенно

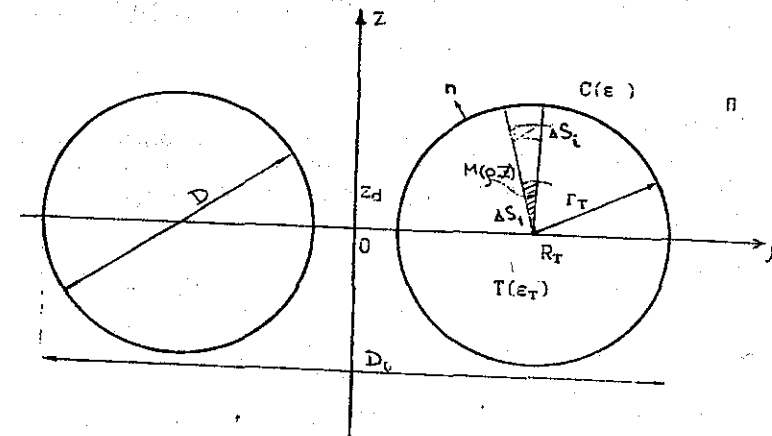


Рис.1

ограничивается возможностями современных ЭВМ при исследовании антенн с линзами, имеющими относительный объём  $V/\lambda^3 > 10$ , что явно недостаточно для решения практических задач. Достаточно эффективные алгоритмы исследования дифракции электромагнитных полей на диэлектрических телах вращения, в том числе на диэлектрическом торе, могут быть построены на основе метода фундаментальных решений и аппарате интегральных представлений и уравнений [10-12]. В случае однородных тороидальных тел задача возбуждения сводится к скалярным задачам на полуплоскости, которые могут быть приведены к интегральным уравнениям различного типа [13,14]. В настоящей работе

Принимая во внимание теорему Рисса об ограниченности интегрального оператора с ядром типа Коши в  $L_p$  при  $p > 1$  [2] может быть доказана сходимость ряда Неймана для полученного уравнения (1). Ряд сходится в обычном смысле при  $k \gg 1$  и является асимптотическим при  $k \rightarrow \infty$ .

Ряд Неймана также сходится, когда  $k$  фиксировано, а функция  $N$  слабо зависит от координаты  $\varphi$ , т.е. когда  $R_p$  и  $R_{pp}$  и их производная по  $r$  равномерно малы при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  [3,4].

#### Литература

1. Sommerfeld A. Partielle Differentialgleichungen der Physic. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1966. S. 194-197.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966. С. 219.
3. Дмитриев В.И., Салтыков Е.Г. Обоснование равномерной высокочастотной асимптотики функции Грина уравнения Гельмгольца // УМН. 1991. Т. 46. Вып.6 /282/. С. 176.
4. Дмитриев В.И., Салтыков Е.Г. Обоснование равномерной высокочастотной асимптотики функции Грина уравнения Гельмгольца // Математическое моделирование и решение обратных задач математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. С.125-129.

Захаров Е.В., Левченко С.Н., Харланов Ю.Я.

### Численное решение задачи осесимметричного возбуждения диэлектрического тора

**Введение.** Линзовая антенна в виде диэлектрического тора со слабонаправленным облучателем, расположенным вблизи оси вращения, является весьма перспективным типом антенн с круговой диаграммой направленности или кольцевым сканированием в диапазонах миллиметровых и сантиметровых волн [1,2]. Для электродинамического исследования таких антенн могут быть использованы, например, численные методы решения задачи возбуждения диэлектрического тела произвольной формы [3-5] или диэлектрического тела вращения [6-8]. Отметим также работу [9], где на основе метода интегральных уравнений решается задача падения плоской волны на диэлектрическое кольцо. Универсальным является развитый в последние годы метод объёмных сингулярных интегральных уравнений, позволяющий исследовать дифракцию поля на телах произвольной формы, в том числе неоднородных [3,5]. Алгебраизация задачи осуществляется методом коллокации или методом Галёркина, а решение системы уравнений - итерационными методами. Однако применение метода существенно

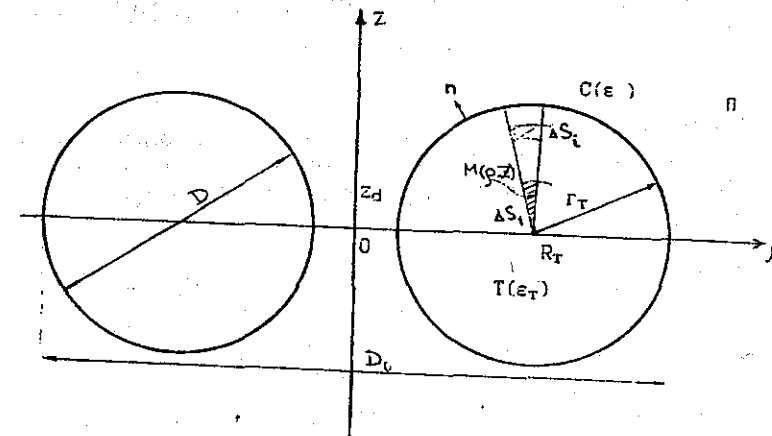


Рис.1

ограничивается возможностями современных ЭВМ при исследовании антенн с линзами, имеющими относительный объём  $V/\lambda^3 > 10$ , что явно недостаточно для решения практических задач. Достаточно эффективные алгоритмы исследования дифракции электромагнитных полей на диэлектрических телах вращения, в том числе на диэлектрическом торе, могут быть построены на основе метода фундаментальных решений и аппарате интегральных представлений и уравнений [10-12]. В случае однородных тороидальных тел задача возбуждения сводится к скалярным задачам на полуплоскости, которые могут быть приведены к интегральным уравнениям различного типа [13,14]. В настоящей работе

рассматривается численное решение задачи возбуждения однородного диэлектрического тора магнитным диполем, расположенным на оси вращения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим диэлектрическое тело в виде тора с радиусом образующей окружности  $r_T$  и расстоянием от оси вращения до центра окружности  $R_T$ . Тор состоит из однородного изотропного диэлектрика с комплексной относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_k = \epsilon_T + i \epsilon_T \operatorname{tg} \delta$ , где  $\epsilon_T$  — относительная диэлектрическая проницаемость,  $\operatorname{tg} \delta$  — тангенс угла диэлектрических потерь, и расположен в однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Магнитную проницаемость всюду будем считать постоянной и равной  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м}$ , а удельную проводимость равной 0.

Пусть в данной среде возбуждается гармоническое во времени (зависимость  $e^{i\omega t}$ ) электромагнитное поле, расположенное в произвольной точке оси  $Oz$  ( $z = z_d$ ) магнитным диполем, момент которого ориентирован вдоль оси. Воспользуемся цилиндрической системой координат  $(\rho, \varphi, z)$ , центр которой совместим с центром тора, а ось  $z$  с осью вращения  $Oz$  (рис. 1). Поскольку рассматриваемая структура среды и электромагнитное поле диполя обладают осевой симметрией, то результирующее электромагнитное поле имеет лишь компоненты  $E_\varphi, H_\rho, H_z$ . При этом компоненты вектора напряженности магнитного поля  $H_\rho$  и  $H_z$  могут быть выражены через компоненту вектора напряженности электрического поля  $E_\varphi$  следующим образом:

$$H_\rho = \frac{i}{\omega \mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}, \quad H_z = -\frac{i}{\omega \mu} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial \rho}$$

Таким образом, для решения электродинамической задачи в соответствии с [10] достаточно определить азимутальную компоненту вектора напряженности электрического поля, которая в полуплоскости  $\Pi \{ \rho > 0, -\infty < z < \infty \}$  удовлетворяет уравнению

$$W(E_\varphi) = \Delta E_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} \left( k(M)^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) E_\varphi = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

где  $k(M)$  — волновое число; граничным условиям на границе разрыва параметров среды

$$[E_\varphi] = 0, \quad \left[ \frac{\partial E_\varphi}{\partial n} \right] = 0;$$

краевому условию на оси  $\{ \rho = 0, -\infty < z < \infty, z = z_d \} \lim_{\rho \rightarrow 0} E_\varphi = 0;$

условию возбуждения в точке источника

$$E_\varphi \sim \frac{i \omega \mu \rho}{4 \pi r}$$

где  $r = \sqrt{\rho^2 + (z - z_d)^2}$  — расстояние от точки  $M(\rho, z)$  до диполя;

условию убывания на бесконечности

$$E_\varphi \sim 0 \left( \frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - i k E_\varphi = 0 \left( \frac{1}{r} \right).$$

**Численный алгоритм.** Исходная электродинамическая задача для азимутальной компоненты  $E_\varphi$  сводится к решению интегрального уравнения применением интегро-дифференциального представления искомой компоненты внутри области  $T \in \Pi$ , ограниченной контуром  $L$ , с помощью значений искомой компоненты и ее производных на контуре. Интегро-дифференциальное представление имеет следующий вид [10]:

$$E(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_L \left( G \frac{E_\varphi(M)}{n} - \frac{G}{n} E_\varphi(M) + \frac{1}{\rho} G \cdot E_\varphi(M) \cos(\overline{np}) \right) dl - \frac{1}{4\pi} \iint_T G \cdot W(E_\varphi) ds, \quad (2)$$

где  $G(M_0, M)$  — фундаментальное решение, удовлетворяющее по координатам точки  $M_0(\rho_0, z_0)$  однородному уравнению (1), а по координатам точки  $M(\rho, z)$  сопряженному уравнению и имеющее особенность типа  $\ln(1/r)$  при совпадении аргументов.

Контуром  $L \{ (\rho - R_T)^2 + z^2 = r_T^2 \}$  полуплоскость  $\Pi$  разбивается на область  $C \{ (\rho - R_T)^2 + z^2 > r_T^2 \}$  и область  $T \{ (\rho - R_T)^2 + z^2 < r_T^2 \}$ . Применяя (2) для  $E_\varphi(M_0)$  в областях  $C$  и  $T$  и складывая полученные результаты, получаем представление для  $E_\varphi(M_0)$  во всей полуплоскости  $\Pi$ :

$$E_\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_T F(M) G ds + \frac{1}{4\pi} \iint_C f(M) G ds = \frac{1}{4\pi} \iint_T G (k_T^2 - k^2) E_\varphi(M) ds + E_\varphi^0(M_0), \quad (3)$$

$$\text{где } R = \sqrt{(z_0 - z)^2 + \rho + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi},$$

$$G_C(M, M_0) = \rho \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik_C R}}{R} \cos \varphi d\varphi - \quad (4)$$

фундаментальное решение уравнения (1) для свободного пространства,

$$E_\varphi^0(M_0) \approx -\frac{i \omega \mu \rho}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \text{поле источника}, \quad (5)$$

$k_C, k_T$  — волновые числа в областях  $C$  и  $T$  соответственно.

При  $R_T - r_T \gg \lambda / 2\pi$  интеграл в (4) можно представить асимптотическим выражением через функции Ханкеля [15]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} \cos \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{\sqrt{\rho_0 \rho}} \left[ i H_0^{(2)}(k_C b) + H_0^{(2)}(k_C d) \right], \quad (6)$$

где  $b = \sqrt{(z_0 - z)^2 + (\rho_0 - \rho)^2}$ ,  $d = \sqrt{(z_0 - z)^2 + (\rho_0 + \rho)^2}$ .

Опуская точку  $M_0$  в область  $T$ , получаем из (3) интегральное уравнение относительно искомой функции:

$$E_\varphi(M_0) - \frac{1}{4\pi} \iint_T G (k_T^2 - k_C^2) E_\varphi(M) ds \quad (7)$$



Для численного решения (7), как и в [12], использован метод интерполяции и коллокации. Разобьем область Т на N элементов одинаковой площади  $\Delta S_i = \Delta S = const \quad \{1 \leq i \leq N\}$  и проведем кусочно-постоянную интерполяцию искомой функции в точках  $M_j, \Delta S_j, \{1 \leq j \leq N\}$ :

$$E\varphi(M) = \sum_{i=1}^N E\varphi_i(M)\psi_i(M), \quad \psi_i(M) = \begin{cases} 0, & M \notin \Delta S_i \\ 1, & M \in \Delta S_i \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных переменных  $E\varphi_i(M)$ :

$$QU = U^0 \quad (9)$$

где  $U = \{E\varphi_1(M), E\varphi_2(M) \dots E\varphi_N(M)\}$  – вектор-решение;

$U^0 = \{E\varphi_1^0(M), E\varphi_2^0(M) \dots E\varphi_N^0(M)\}$  – вектор правой части;

Q – матрица коэффициентов размером  $N \times N$

$$\text{где } Q_{i,j} = \frac{(k_T^2 - k_C^2)}{4\pi} \Delta S \cdot G(M_i, M_j). \quad (10)$$

Вычисление  $Q_{i,j}$  при  $i=j$  производится интегрированием по  $\Delta S$  с заданной

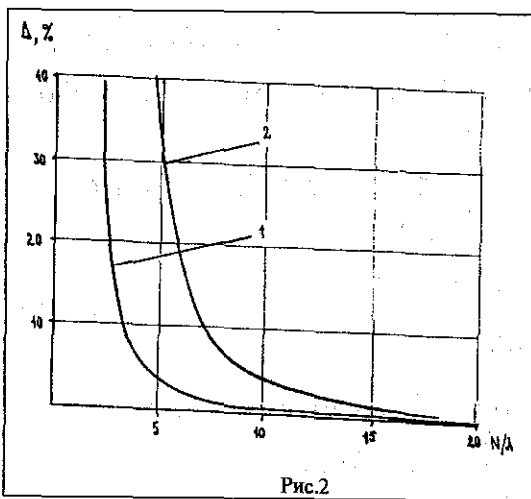


Рис.2

диаграмму направленности (ДН) и коэффициент усиления (КУ) антенны.

**Результаты вычислительных экспериментов.** Разработанный численный алгоритм реализован в виде программы для ЭВМ. На рис.2-4 приведены результаты исследования тороидальной линзовой антенны. Расчеты проведены на ПЭВМ IBM 486DX2/66/8/250.

На рис.2 показана сходимость результатов расчета КУ и уровня первого бокового лепестка антенны от количества точек разбиения на длину волны  $N/\lambda$ . Графики проведены по серединам зависимостей, имеющих осциллирующий характер. Здесь  $\Delta$  в % означает относительное отличие от численных результатов, значения которых практически не меняются с увеличением  $N/\lambda$ . Из рисунка видно,

точностью вне малой окрестности точки особенности. Решение системы уравнений (9) проводится методом Гаусса с выбором главного элемента. При размещении магнитного диполя в центре тора использована симметрия модели в плоскости оси вращения линзы, позволяющая в два раза снизить размерность матрицы Q. Полученные в результате решения (9) значения  $E\varphi_i(M)$  в области Т позволяют вычислить значения  $E\varphi$  в любой точке  $M_0$  полуплоскости П и на их основании определить

что для расчета КУ с приемлемой погрешностью достаточно  $N > 5.7$ , а боковых лепестков –  $N > 10.15$ .

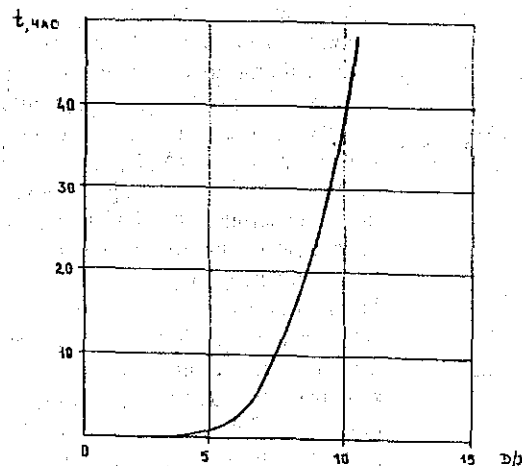


Рис.3

На рис.3 приведена зависимость времени расчета КУ антенны от относительного диаметра образующей окружности тороидальной линзы  $D/\lambda$  при количестве точек на длину волны  $N/\lambda = 5$ . Зависимость показывает, что для значения  $D/\lambda = 5$  время расчета составляет около часа, а максимально возможное значение  $D/\lambda$ , которое может быть использовано при практических расчетах не превышает 6.7. Это соответствует реальным максимальным размерам

тороидальной линзы  $D_0/\lambda \sim 15$  (рис.1).

Для экспериментальной оценки результатов расчета изготовлена и исследована антенна на основе тороидальной линзы из полиэтилена ( $\epsilon_T = 2.31, g\delta = 4 \cdot 10^{-4}$ ) с диаметром образующей окружности  $D = 76.1$  мм и внутренним диаметром 20,2 мм. Измерения проводились на частоте 37,5 ГГц. В качестве облучателя использована резонансная продольная щель в круглом волноводе диаметром 6 мм, расположенным на оси вращения линзы. Ширина ДН облучателя по уровню половинной мощности составляла величину  $180^\circ$ . КУ тороидальной антенны составил 15,8 дБ, ширина ДН в плоскости оси вращения (плоскости Н) – 6,6 град, ширина ДН в плоскости перпендикулярной оси (плоскости Е) – 110 град.

На рис.4 показаны расчетная (сплошная линия) и экспериментальная (штриховая линия) ДН антенны в плоскости Н. Сопоставление зависимостей показывает практическое совпадение главных лепестков ДН (ширина ДН соответственно 6,4 и 6,6 град). Уровни первого бокового лепестка ДН составляют соответственно -9дБ и -11дБ. Отличие результатов связано, в основном, с отличием физической модели антенны от расчетной, поскольку ДН облучателя отличается от круговой, а излучающая щель несколько смещена относительно оси вращения (на 3 мм). Кроме того при расчете взято минимально необходимое количество точек на длину волны ( $N/\lambda = 5$ ), что было вызвано большими затратами машинного времени.

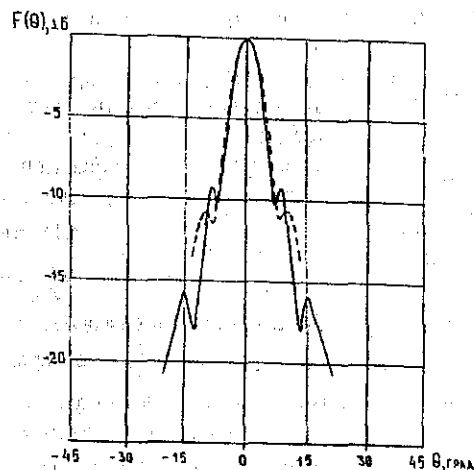


Рис.4

Расчетное задание КУ составило 11,1 дБ. Качественное сравнение расчетного и измеренного значений показывает, что разность между ними (4,7дБ) близка к отношению расчетной и измеренной ширины ДН антенны в плоскости Е (5,1 дБ), что соответствует физическим представлениям и находится на уровне погрешности измерений.

#### Заключение.

Разработанный численный алгоритм может быть использован для исследования характеристик тороидальных линзовых антенн с круговой ДН, в том числе при расположении облучателя в произвольной точке оси вращения. Для расширения области использования алгоритма при больших размерах линз целесообразно провести модификацию вычислительной схемы с целью сокращения времени расчетов, например, используя итерационные методы решения системы уравнений. Аналогичное решение задачи дифракции для случая ортогонально расположенного электрического диполя позволит решать практически важные задачи расчета тороидальных линзовых антенн со слабо направленными облучателями типа элемента Гюйгенса.

#### Литература

1. Horst R.L. Non-uniform dielectric toroidal lens: US patent, N. 3255453, cl. 343-754, 1966.
2. Левченко С.Н., Харланов Ю.Я. Исследование линзовой антенны на основе диэлектрического тора // Тезисы докладов научно-технической конференции "Физика и техника миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн". Харьков: ИРЭ АН УССР, 1992, с.52.
3. Самохин А.Б. Исследование задач дифракции электромагнитных волн в локально-неоднородных средах // ЖВМ и МФ. -1990. -Т.30. -N1. -С. 107-121.
4. Самохин А.Б. Интегральные уравнения электродинамики трехмерных структур и итерационные методы их решения (обзор) // Радиотехника и электроника. -1993. -N8. -С. 1345-1369.
5. Ильинский А.С., Самохин А.Б., Перфилов О.Ю., Харланов Ю.Я. Математическое моделирование диэлектрических линзовых антенн // Тезисы докладов Второй Всесоюзной конф. "Устройства и методы прикладной электродинамики". М. МАИ, 1991. С. 163.
6. Еремин Ю.А., Свешников А.Г. Метод дискретных источников в теории рассеяния // Вестник Моск. ун-та. Сер. Вычисл. матем. и киберн. -1992. -N4. -С. 3-14.
7. Свешников А.Г., Еремин Ю.А., Орлов Н.В. Обоснование и реализация метода неортогональных рядов в задачах дифракции на диэлектрических телах // Вестник Моск. ун-та. Сер.15 Вычислительная математика и кибернетика. -1983. -N3. -С. 3-20.
8. Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987. - 272 с.
9. Doeren R.E. Analysis of dielectric-rings scattering // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. -1972. -N6. -P. 522-525.
10. Захаров Е.В. Метод решения граничных задач электродинамики для неоднородных сред с осевой симметрией // В сб.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1978. -С. 232-238.

11. Захаров Е.В. Математическое моделирование в электромагнитном каротаже. М.: Недра (Лен. отд.), 1982.
12. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во МГУ, 1987.
13. Захаров Е.В., Несмеянова Н.И. Метод решения осесимметричных задач дифракции электромагнитных полей // ЖВМ и МФ. -1978. -N2. -С.512-515.
14. Никитина Е.В. Интегро-дифференциальные уравнения 2 рода в задачах дифракции электромагнитных волн на телах вращения тороидального типа // В сб.: Применение ЭВМ для решения задач математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1985. -С. 68-73.
15. Пименов Ю.В. Сведение некоторых осесимметричных задач дифракции к плоским задачам // Радиотехника и электроника. -1967. -т.12. N12. -С. 2214-2216.

## Математическое моделирование вертикального электрического зондирования квазислоистых сред

### п.1. Постановка задачи.

Вертикальное электрическое зондирование (ВЭЗ) один из основных методов электроразведки на постоянном токе [1]-[3]. Цель метода: по измерениям электрического поля на земной поверхности в зависимости от расстояния между измерительными и питающими электродами определить распределение электропроводности в Земле, а, следовательно, получить данные о строении земных недр. Метод решения обратной задачи ВЭЗ достаточно детально разработан для одномерного случая, когда электропроводность зависит только от глубины [4]. Представляет интерес разработка метода решения обратной задачи для более широкого класса неоднородных сред, когда электропроводность изменяется не только по глубине, но и вдоль земной поверхности. Для создания такого метода необходимо иметь эффективный алгоритм решения прямой задачи ВЭЗ, где рассчитывается электрическое поле при заданных источниках и известном распределении электропроводности.

В настоящей статье предложен и исследован быстрый метод решения прямой задачи ВЭЗ для квазислоистой среды, состоящей из однородных слоев переменной мощности:

$$\sigma(x, y, z) = \begin{cases} \sigma_0 = 0 & z < z_0 = 0, \\ \sigma_n & z_{n-1}(x, y) < z < z_n(x, y), \quad n \in [1, N], \\ \sigma_{N+1} = 0 & z > z_N(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

причем  $z_n \rightarrow z_n^0 = \text{const}$  при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ .

Электрическое поле  $\vec{E}(M)$  выражается через скалярный потенциал  $U(M)$  в виде:

$$\vec{E}(M) = -\text{grad}U(M). \quad (2)$$

Скалярный потенциал является решением граничной задачи для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta U = -\frac{I}{\sigma_1} \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) \delta(z), \\ \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \end{cases} \quad (3)$$

с условиями сопряжения на границах разрыва электропроводности

$$[U]_{z_n} = 0 ; \left[ \sigma \frac{\partial U}{\partial n} \right]_{z_n} = 0 ; \quad n \in [1, N], \quad (4)$$

где  $I$  — ток в источнике,  $M_S = (x_s, y_s, z_s = 0)$  — координаты источника, расположенного на земной поверхности.

## п.2. Вывод интегрального уравнения.

Решение краевой задачи для потенциала (3-4) представляется через потенциалы простого слоя для всех граничных поверхностей  $S_n$   $n \in [1, N]$  в виде

$$U(M) = U_0(M) + \sum_{n=1}^N \int_{S_n} P_n(M_0) G(M_0, M) dS_{M_0}, \quad (5)$$

где

$$U_0(M) = \frac{I}{2\pi\sigma_1 \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + z^2}}, \quad (6)$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right\}, \quad (7)$$

соответственно, первичный потенциал и функция Грина для полупространства с граничным условием  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$  и при  $z = 0$ .

Потенциал, представленный в виде (5), удовлетворяет уравнению и краевому условию при  $z = 0$ , а также условиям непрерывности на границах  $S_n$   $n \in [1, N]$ .

Выбором плотности потенциала  $P_n(M)$   $n \in [1, N]$  мы должны удовлетворить условиям  $\left[ \sigma \frac{\partial U}{\partial n} \right]_{z_n} = 0$ ,  $n \in [1, N]$  (отметим, что при  $z_n = z_N$  получаем

условие  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ ).

Подставив (5) в условия сопряжения для  $\frac{\partial U}{\partial n}$  на поверхностях  $S_m$ , получим систему интегральных уравнений

$$\frac{\sigma_m + \sigma_{m+1}}{2} P_m(M) - (\sigma_{m+1} - \sigma_m) \sum_{n=1}^N \int_{S_n} P_n(M_0) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS_{M_0} = (\sigma_{m+1} - \sigma_m) \frac{\partial U_0}{\partial n} \quad (8)$$

Проведем нормировку, введя функции

$$g(M, M_0) = 4\pi G(M, M_0); \mu_m(M) = \frac{\sigma_1}{I} P_m(M); \kappa_m = \frac{2(\sigma_{m+1} - \sigma_m)}{(\sigma_{m+1} + \sigma_m)}. \quad (9)$$

Тогда система интегральных уравнений примет вид при  $m \in [1, N]$

$$\mu_m(M) - \frac{\kappa_m}{4\pi} \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \mu_n(M_0) \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial n} dS_{M_0} = \frac{\kappa_m}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + z^2}} \right) \quad (10)$$

$m \in [1, N]$ .

Решив систему интегральных уравнений (10) и определив  $\mu_n(M_0)$ , мы можем, согласно (5), вычислить потенциал на земной поверхности:

$$U(x, y, z = 0) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2}} + \sum_{n=1}^N \int_{S_n} \frac{\mu_n(M_0) dS_{M_0}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}} \right\} \quad (11)$$

Измеряемое в методе ВЭЗ электрическое поле зависит от трех параметров: двух координат точки измерения  $M_q = (x_q, y_q, 0)$ ,  $q \in [1, Q]$  и разности  $r = r_s$ ,  $s \in [1, S]$  между точкой измерения и точками  $M_{sq}^1 = (x_{sq}^1, y_{sq}^1, 0)$  и  $M_{sq}^2 = (x_{sq}^2, y_{sq}^2, 0)$ , где расположены питающие электроды. Если зондирование проводится вдоль направления, составляющего с осью  $OX$  угол  $\varphi$ , то координаты точек питания имеют вид:

$$\begin{cases} x_{sq}^1 = x_q - r \cos \varphi \\ y_{sq}^1 = y_q - r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} x_{sq}^2 = x_q + r \cos \varphi \\ y_{sq}^2 = y_q + r \sin \varphi \end{cases} \quad (12)$$

Обычно зондирование проводится либо при  $\varphi = 0$ , либо при  $\varphi = \pi/2$ . В точке  $M_{sq}^1$  расположен источник с током  $I$ , а в точке  $M_{sq}^2$  — с током  $(-I)$ .

Зависимость измеряемого поля от трех параметров  $(x_q, y_q, r)$  позволяет однозначно определить распределение электропроводности  $\sigma(x, y, z)$  при  $z > 0$ .

## п.3. Метод решения интегрального уравнения.

Прежде чем перейти к описанию метода решения интегрального уравнения, отметим, что полученное решение задачи в виде (10-11) не эффективно с вычислительной точки зрения. При каждой фиксированной точке  $M_q$  мы должны вычислить поле для  $2S$  точек расположения питающих электродов. Это означает, что нам необходимо  $2S$  раз решить интегральное уравнение. При этом поле вычисляется только в одной точке. Можно существенно повысить эффективность вычислений, если, используя принцип взаимности, поменять местами точку измерения и точку питающих электродов.

Тогда нам необходимо будет для фиксированной точки измерения решать интегральное уравнение только один раз и вычислять поле в  $S$  точках.

Проведем вывод этого уравнения, ограничиваясь случаем зондирования по оси  $OY$  ( $\varphi = \pi/2$ ). В этом случае в точке  $M_q$  измеряется электрическое поле

$E_y$  от двух источников:  $I$  в точке  $M_{sq}^1$  и  $(-I)$  в точке  $M_{sq}^2$ .

$$E_y = \frac{\partial U(M_q, M_{sq}^1)}{\partial y_q} - \frac{\partial U(M_q, M_{sq}^2)}{\partial y_q}$$

Используя принцип взаимности, имеем

$$E_y = \frac{\partial U(M_{sq}^2, M_q)}{\partial y_q} - \frac{\partial U(M_{sq}^1, M_q)}{\partial y_q} \quad (13)$$

Подставив в (13) выражение для потенциала (11) при  $\varphi = \pi/2$ , где переставлены точки  $M_q$  и  $M_{qs}$ , получим

$$E_y = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left\{ \frac{2}{r^2} + \sum_{n=1}^N \int_{S_n} v_n(M_0) \left[ \frac{1}{\sqrt{(x_q - x_0)^2 + (y_q + r - y_0)^2 + z_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_q - x_0)^2 + (y_q - r - y_0)^2 + z_0^2}} \right] dS_0 \right\}, \quad (14)$$

где  $v_n = \frac{\partial \mu_n}{\partial y_q}$  является решением интегрального уравнения

$$v_m(M) - \frac{\kappa_m}{4\pi} \sum_{n=1}^N \int_{S_n} v_n(M_0) \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial n_M} ds_{M_0} = \frac{\kappa_m}{2\pi} f(M), \quad (15)$$

$M \in S_m, m \in [1, N]$ ,

$$f(M) = \frac{\partial^2}{\partial y_q \partial n} \left( \frac{1}{\sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + z^2}} \right). \quad (16)$$

При фиксированной точке  $M_q(x_q, y_q, 0)$  мы должны один раз решить интегральное уравнение (15), а затем, зная  $\frac{\partial \mu_m}{\partial y_q}$ , согласно (14), вычислить поле

для  $S$  разносов  $r = r_s, s \in [1, S]$ . Такой подход позволяет существенно сократить время расчета, что особенно важно при решении обратных задач.

Полученное интегральное уравнение (15) редуцируется к системе линейных алгебраических уравнений, для решения которых имеется достаточно большое число различных стандартных программ. Единственной проблемой является высокий порядок системы алгебраических уравнений. Эту трудность

можно преодолеть для случая двумерных квазислоистых сред, когда границы слоев изменяются только в направлении оси  $OY$  ( $z = z_n(y), n \in [1, N]$ ). При этом, естественно, точка измерения поля движется только вдоль оси  $OY$ , т.е.  $x_q = 0$ .

В этом случае интегральное уравнение (15) можно записать в виде:

$$v_m(x, y) - \frac{\kappa_m}{4\pi} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} v_n(x_0, y_0) K_{nm}(x - x_0, y, y_0) dy_0 = \frac{\kappa_m}{2\pi} f(M), \quad m \in [1, N], \quad (17)$$

где

$$K_{nm}(x - x_0, y, y_0) = \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial n_M} \Big|_{\substack{z=z_m(y) \\ z_0=z_n(y_0)}} \times \sqrt{1 + z_n'^2(y_0)},$$

$$f_m(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial n \partial y_q} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - y_q)^2 + z^2}} \right) \Big|_{z=z_m(y)}$$

Формула пересчета поля (14) равна:

$$E_y(y_q, r) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left\{ \frac{2}{r^2} + \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} v_n(x_0, y_0) M_n(x_0, y_q, y_0, r) dy_0 \right\}, \quad (18)$$

$$\text{где } M_n = \frac{\sqrt{1 + z_n'^2(y_0)}}{\sqrt{x_0^2 + (y_q + r - y_0)^2 + z_n^2(y_0)}} - \frac{\sqrt{1 + z_n'^2(y_0)}}{\sqrt{x_0^2 + (y_q - r - y_0)^2 + z_n^2(y_0)}}.$$

Легко видеть, что ядра интегральных операторов в (17) и (18) зависят только от разности  $(x - x_0)$ . Следовательно, мы можем применить преобразование Фурье по  $x$  и использовать теорему о свертке. Тогда мы получим одномерное интегральное уравнение для образа Фурье искомой функции

$$\tilde{v}_m(y, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} v_m(x, y) e^{i\lambda x} dx = 2 \int_0^{\infty} v_m(x, y) \cos \lambda x dx \quad (19)$$

$$\tilde{v}_m(y, \lambda) - \frac{\kappa_m}{2\pi} \sum_{n=1-\infty}^{\infty} \int \tilde{v}_n(y_0, \lambda) \tilde{K}_{nm}(y, y_0) dy_0 = \frac{\kappa_m}{\pi} \kappa_m \tilde{f}_m(x, y), \quad m \in [1, N], \quad (20)$$

где ядро интегрального уравнения равно

$$K_{nm}(y, y_0) = \int_0^{\infty} K_{nm}(x, y, y_0) \cos \lambda x dx, \quad (21)$$

а правая часть имеет вид

$$\tilde{f}_m(y) = \int_0^{\infty} f_m(x, y) \cos \lambda x dx. \quad (22)$$

Используя выражение

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = K_0(\lambda \sqrt{y^2 + z^2}), \quad (23)$$

где  $K_0(r) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ir)$  — функция Макдональда (функция Ханкеля мнимого аргумента), мы можем вычислить ядро и правую часть (21-22):

$$\tilde{K}_{nm}(y, y_0) = \sqrt{1 + z_n'^2} \frac{\partial}{\partial n} \left( K_0(\lambda \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}) + K_0(\lambda \sqrt{(y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}) \right) \Big|_{z=z_m(y), z_0=z_n(y_0)} \quad (24)$$

$$\tilde{f}_m(y) = \frac{\partial^2}{\partial y_q \partial n} \left( K_0(\lambda \sqrt{(y - y_q)^2 + z^2}) \right) \Big|_{z=z_m(y)} \quad (25)$$

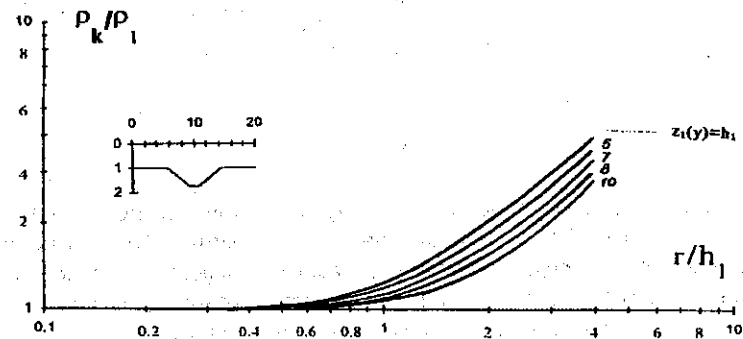
Интегральное уравнение (20) легко решается численно при фиксированном  $y_q$  и для различных  $\lambda \in [0, \infty]$ . Зная  $\tilde{v}_n(y, \lambda)$  для  $\lambda \in [0, \infty]$ , легко вычисляем измеряемое поле  $E_y$ . Согласно (19), имеем

$$v_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_n(x, \lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (26)$$

Подставив (26) в (18), получим

$$E_y(y_q, r) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left\{ \frac{2}{r^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int M_n(x_0, y_q, y_0, r) dy_0 \times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_n(y_0, \lambda) e^{-i\lambda x_0} d\lambda \right\} = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left\{ \frac{2}{r^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1-\infty}^{\infty} \int \sqrt{1 + z_n'^2(y_0)} dy_0 \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_n(y_0, \lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + (y_q - r - y_0)^2 + z_n^2(y_0)}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + (y_q + r - y_0)^2 + z_n^2(y_0)}} \right) e^{-i\lambda x_0} dx_0 \right\}$$



Учитывая (23), получим окончательно

$$E_y(x_q, y_q, r) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left\{ \frac{2}{r^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1-\infty}^{\infty} \int \sqrt{1 + z_n'^2(y_0)} dy_0 \int_0^{\infty} \tilde{v}_n(y_0, \lambda) \times \left( K_0(\lambda \sqrt{(y_q + r - y_0)^2 + z_n^2(y_0)}) - K_0(\lambda \sqrt{(y_q - r - y_0)^2 + z_n^2(y_0)}) \right) d\lambda \right\} \quad (27)$$

#### п.4. Анализ численных результатов.

На основе описанного метода расчета данных вертикального

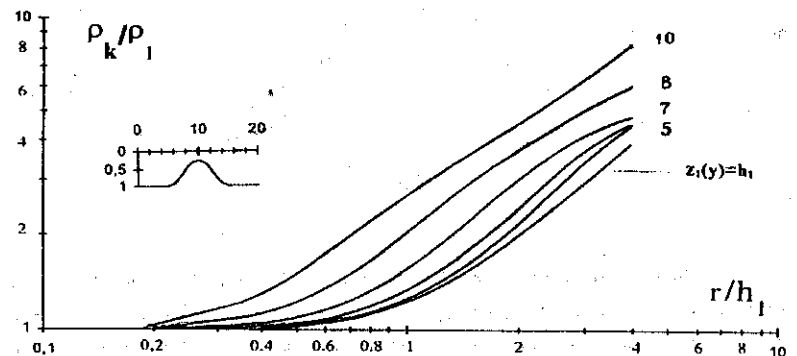


Рис.2

электрического зондирования двумерных квазислоистых сред (20),(27) была

создана программа для персонального компьютера. Эффективность развитого метода иллюстрируется быстротой расчета кривых ВЭЗ на компьютере IBM PC 486. Для 15 точек зондирования и 20 значений разносов для каждого

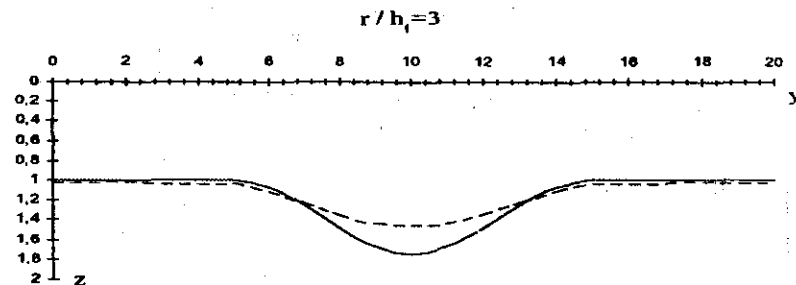


Рис.3

зондирования на расчет кривых ВЭЗ для трехслойной квазислойистой модели затрачивается менее 1.5 минут машинного времени. Это означает, что разработанный метод решения прямой задачи может эффективно использоваться при решении обратной задачи даже в случае, если применяется простой метод перебора моделей в заданном классе моделей строения среды.

При решении прямой задачи ВЭЗ рассчитываются кривые кажущегося сопротивления, нормированного на сопротивление первого слоя

$$\rho_k / \rho_1 = \frac{\pi \sigma_1 r^2}{I} E_y(x_q, y_q, r). \quad (28)$$

Все линейные параметры  $x_q, y_q, r$  измеряются в единицах толщины первого

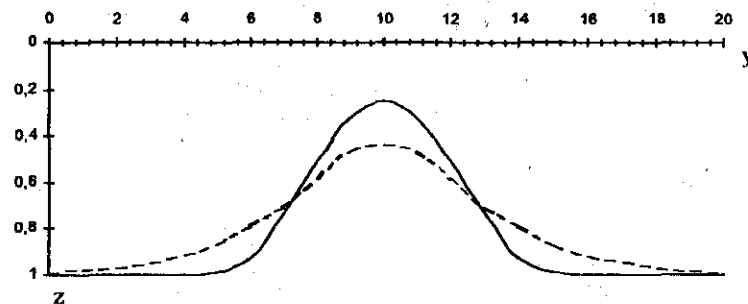


Рис.4

слоя  $h_1$ . На рис.1-2 приведены расчеты кривых кажущегося сопротивления в случае прогиба (рис.1) и поднятия (рис.2) границы первого слоя. На рис.3,4 приведены трансформанты кажущегося сопротивления в кажущуюся толщину первого слоя по формуле

$$h_k / h_1 = \frac{r / h_1}{\rho_k / \rho_1} \quad \text{при } r / h_1 \gg 1. \quad (29)$$

На кривых видно, что в этом случае даже простая трансформанта позволяет найти границу верхнего слоя. Результат, естественно, получается сглаженный, но его можно уточнить, используя линеаризованную обратную задачу.

#### Литература

1. Хмелевской В.К. Электроразведка. - М.:Изд-во МГУ, 1984, с.420.
2. Дмитриев В.И., Сребренникова Н.Н. Численный расчет электрического поля точечного источника в слоистой среде с осесимметричным включением. //Известия ВУЗ, Геология и разведка, 1987, №2.
3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод расчета поля постоянного тока в неоднородных проводящих средах. //Вычислительные методы и программирование. - М.:Изд-во МГУ, 1973, вып. XX. - с.175-186.
4. Колесников В.П. Обработка и интерпретация результатов вертикального электрического зондирования с помощью ЭВМ. - М.:Недра, 1982, 142с.

Раздел III  
**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕХАНИКЕ  
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Захаров Е.В., Карасёва Е.Ю.

**Исследование гемодинамики артериальной части миокарда  
методом вычислительного эксперимента.**

В кардиологии о нормальном функционировании сердца и патологиях можно судить по распределению артериального кровотока в миокарде. До настоящего времени изучение этой проблемы продвигалось достаточно медленно из-за сложности проведения медицинского эксперимента и недостатка анатомических данных [3]. Применение математического моделирования и вычислительного эксперимента в этой области позволяет строить и применять различные модели гемодинамики (преимущественно качественного характера), с помощью которых можно выявить ряд закономерностей и связей, качественно оценить кровеносные потоки, снабжающие различные участки миокарда в норме и патологии.

Перечислим некоторые физиологические факты, которые легли в основу построенной математической модели. Представим кровь как однородную, вязкую жидкость. В действительности кровь является суспензией элементов (эритроцитов, лейкоцитов, тромбоцитов), причём среди этих элементов преобладают эритроциты. [1] Однако, в больших сосудах диаметром от 0,1 до 1 см, наибольший размер эритроцитов ( $8 \cdot 10^{-4}$  см) достаточно мал по сравнению с диаметром сосуда. Это позволяет рассматривать кровь как однородную жидкость. [2], [8] При больших скоростях сдвиговых деформаций кровь ведёт себя как ньютоновская жидкость. [4] Артерии представим как длинные жёсткие цилиндрические трубки с непроницаемыми стенками. Проницаемость стенок существенна для системы микроциркуляции, а для рассматриваемой системы сосудов допустимо предположение о непроницаемости стенок сосудов. [5] Эластичность стенок характерна для крупных артерий, выходящих из сердца. По мере уменьшения диаметра сосуда увеличивается число слоёв мышечной ткани и уменьшается эластичность. [1], [3], [5] В описываемой модели поток крови считается постоянным и ламинарным. Поток крови является практически ламинарным. Расположение сосудов в артериальной части миокарда и схема их распределения даны в Приложениях 1 и 2.

Таким образом, в качестве модели гемодинамики артериальной части сердечной мышцы рассматривается разветвлённая система сосудов, по которым течёт однородная, вязкая, несжимаемая жидкость. Давления на входе и на выходе системы заданы. Заменяем сеть кровеносных сосудов, снабжающих определённый участок миокарда одним сосудом, предположив при этом, что через этот сосуд проходит тот же поток крови, что проходил бы по всей сети. В результате такой замены получим схему сосудов приведённую в Приложении 1, 2, в которой 21 узел, т.е. место разветвления сосудов и этими узлами сосуды



делятся на 41 звено, входом системы назовём те сосуды, которые отходят от аорты,  $J_2 = \{1, 29\}$ , а выходом назовём, те звенья которые никуда не впадают, что означает, что далее начинается сеть капилляров. В нашей модели это такие звенья.  $J_{17} = \{24, 25, 26, 9, 10, 11, 6, 8, 16, 18, 14, 30, 32, 34, 36, 38, 41\}$  Часть отрезка сосуда, заключённую между двумя соседними узлами, либо входом (выходом) системы и узлом назовём участком. Назовём путём любое последовательное соединение участков между входом и выходом системы. Сосуды, представленные в этой модели, имитируют артерии в том смысле, что падение давления по длине всего сосуда приравнивается к падению давления в соответствующей артерии на всём пути её ветвления до капилляров, где, как известно, давление постоянно. По аналогии с теорией электрических цепей [6] в основу модели положены два утверждения:

1). для каждого артериального соединения (узла) справедливо уравнение неразрывности потока

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad (1)$$

где  $x_i$  - потоки, входящие и выходящие из определённого узла, а  $n$  - число участков, входящих или выходящих из данного узла, причём потоки входящие в данный узел берутся со знаком "+", а выходящие со знаком "-", например,  $x_1 - x_2 - x_{19} = 0$ .

2). для каждого участка, заключённого между двумя соседними узлами, записано уравнение Пуазейля, [7]

$$R_j x_j = p_j^0 - p_j^{end},$$

где  $p_j^0$  - давление на входе этого участка,  $p_j^{end}$  - давление на выходе  $R_j$  - гидравлическое сопротивление рассматриваемого участка, равное

$$R_j = 128 \frac{\mu L_j}{\pi d_j^4},$$

где  $\mu$  - вязкость крови,  $L_j$  - длина рассматриваемого участка,  $d_j$  - диаметр сосуда.

Распространим уравнение Пуазейля на путь:

$$\sum_{i \in J_k} \Delta p_i = 128 \sum_{i \in J_k} \frac{\mu L_i x_i}{\pi d_i^4}, \quad (2)$$

где  $\Delta p_i$  - разность давлений на выходе и на входе  $j$ -ого участка пути,  $J_k$  - каждый участок рассматриваемого пути. Выбор путей однозначен в силу геометрии и способа выбора системы сосудов. Для каждого узла запишем 21 уравнение неразрывности типа (1), а для каждого имеющегося в системе пути - 20 уравнение типа (2). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений 41-ого порядка относительно неизвестных потоков на участках при заданной правой части и известной матрице системы.

$$A x = F, \quad (3)$$

Полная запись системы (3) приведена в Приложении 2

Построенная математическая модель отражает течение вязкой несжимаемой жидкости (крови) по разветвлённой системе гидравлических проводников (сосудам). Отметим, что на основании аналогичных рассуждений в [13] была построена гемодинамическая модель для системы артерий головного мозга. При выборе метода численного решения СЛАУ необходимо учитывать информацию о

элементах матрицы. Величины матричных элементов определяются способом построения системы сосудов, их длинами и диаметрами, что, естественно задаётся с некоторой погрешностью. Как правило, в исследованиях по физиологии и анатомии [9], [10], [11], [12] приводятся лишь данные о диапазонах изменения диаметров венечных артерий и их самых крупных ветвей, о длине артерий данных в литературе ещё меньше из-за большой варибельности величин.

Диапазоны изменения диаметров венечных артерий и их основных ветвей в мм.

| Название артерии               | Крайние значения посмертных измерений (по Л.А.Арсентьевой, 1969) | Прижизненные измерения по данным коронаграфии у взрослых (крайние и средние значения) |           |                          |             |
|--------------------------------|--|---|-----------|--------------------------|-------------|
|                                |  | по McAlpin и соавт. (1975)  |           | по А.А. Лиллосону (1978) |             |
| Правая венечная артерия        | 2.2 - 6.8  | 2.3-4.5   | 2.6 - 3.8 | 2.7 - 6                  | 3.23-3.37   |
| Левая венечная артерия         | 4.2 - 6  | 2.6 - 5.5   | 3.3 - 4.7 | 2.9 - 7                  | 4.52 - 4.68 |
| Огибающая ветвь                | 0.5 - 3  | 1.7 - 4.4   | 2.3 - 3.7 | 2 - 5.5                  | 3.03- 3.17  |
| Передняя межжелудочковая ветвь | 2.8 - 4.8  | 2.4 - 3.5   | 2.9 - 3.9 | 1 - 5.5                  | 2.92 - 3.08 |
| Задняя межжелудочковая ветвь   | 1-3  | -   | -         | 1 - 3                    | 1.86 - 1.94 |
| Диагональная ветвь             | 0.5 - 3  | 1.3 - 2.4   | 1.7 - 2.3 | 0.8 - 3.5                | 1.56 - 1.64 |
| Правая краевая ветвь           | -  | 0.8 - 2.7   | 1.1 - 2.3 | 1 - 3                    | 1.75 - 1.85 |
| Левая краевая ветвь            | -  | 1.6 - 3.3   | 1.9 - 2.9 | 1 - 3                    | 1.66 - 1.74 |

Правые части СЛАУ либо равны нулю, либо определяются разностью давлений на входе и выходе системы. Количественная оценка изменения давления за сердечный цикл (в систоле и диастоле) даёт диапазон изменения разности давления на входе и выходе системы от 55 мм рт. ст до 77 мм рт. ст. [3] Модель распределения кровотоков в артериальной части миокарда сформулирована в виде СЛАУ с матрицей  $A$ , матричные элементы которой являются функциями диаметров и длин сосудов. Геометрия системы сосудов может меняться в зависимости от целей исследования и экспериментальных данных. Параметры системы меняются в определённых диапазонах, поэтому нами рассматривается не жёстко фиксированная модель гемодинамики, а класс (множество) таких моделей, в рамках которых возможна постановка и решение задач оптимизации. Матрица  $A$  является квадратной, действительной, разреженной и невырожденной. Рассмотрим вопрос устойчивости решения поставленной задачи. Решение СЛАУ существует и единственно, так как определитель системы отличен от нуля (в рассматриваемом диапазоне изменения параметров и равен в тестовом примере  $\det(A) = 1\ 219\ 192$ ). Как известно оценка

устойчивости численного решения СЛАУ связана с числом обусловленности матрицы  $A$ :  $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ . Пусть  $\|A\|$  - равномерная норма:

$$\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Если  $cond(A)$  относительно мало, то матрица  $A$  является хорошо обусловленной (по отношению к задаче решения СЛАУ), если  $cond(A)$  относительно велико, то матрица  $A$  плохо обусловлена и для нахождения устойчивого решения СЛАУ необходимо иметь дополнительную информацию о решении и применять регуляризирующие алгоритмы. В результате проведённых вычислений на тестовом примере получили  $\|A\| = 5,139$ ,  $\|A^{-1}\| = 18,856$ , а  $cond(A) = 96,902$ . В поставленной задаче элементы матрицы  $A$  естественно заданы приближённо, так как приближённо заданы гидравлические сопротивления участков системы. В правой части приближённо заданы градиенты давления в уравнениях Пуазейля. Следовательно, мы решаем не точное уравнение (3), а приближённое

$$\bar{A} \bar{x} = \bar{F}, \quad (3')$$

Предположим, что градиенты давления заданы точно, тогда (3') можно записать в другом виде:

$$\bar{A} \bar{x} = F, \quad (3'')$$

Обозначим  $\Delta x = x - \bar{x}$ ,  $\Delta A = A - \bar{A}$ , тогда оценка погрешности имеет вид (при заданной разности давлений):

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq cond(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}, \quad (4)$$

Оценим равномерную норму матрицы  $\Delta A$ .

$$\text{где } \Delta A = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta a_i \end{pmatrix}_{i=21, \dots, 41},$$

так как уравнения неразрывности заданы точно, то в первых двадцати строках матрицы  $\Delta A$  стоят нули, а

$$\Delta a_{ij} = \begin{cases} R_j - \bar{R}_j, & i \in J_j, j = 1, \dots, 20 \\ 0, & i \notin J_j, j = 1, \dots, 20 \end{cases},$$

где  $J_j - j=1, \dots, 20$  - множество всех путей модели, приведённой в Приложении 2. В любом пути, принадлежащем множеству  $J_j - j=1, \dots, 20$ , не больше, чем 20 звеньев, следовательно справедлива такая оценка:

$$\|\Delta A\| = \max_i \sum_j |\Delta a_{ij}| = 20 \max_i |R_i - \bar{R}_i|, i = 1, \dots, 41,$$

Обозначим  $\delta = \max_i |R_i - \bar{R}_i|, i = 1, \dots, 41$ . Тогда уравнение (4) примет следующий вид:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq 20\delta \|A^{-1}\| \leq 360\delta. \quad (5)$$

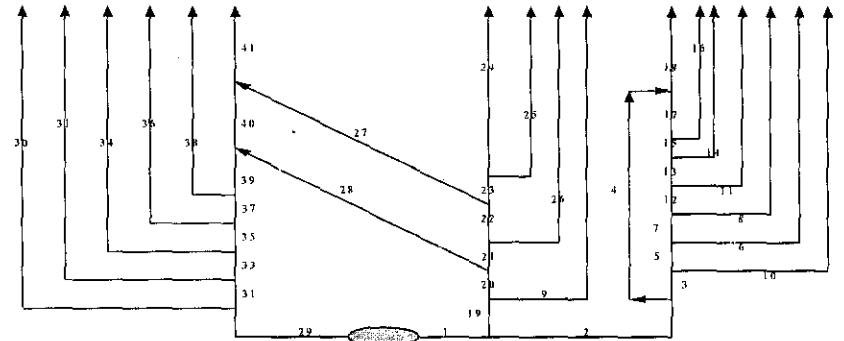
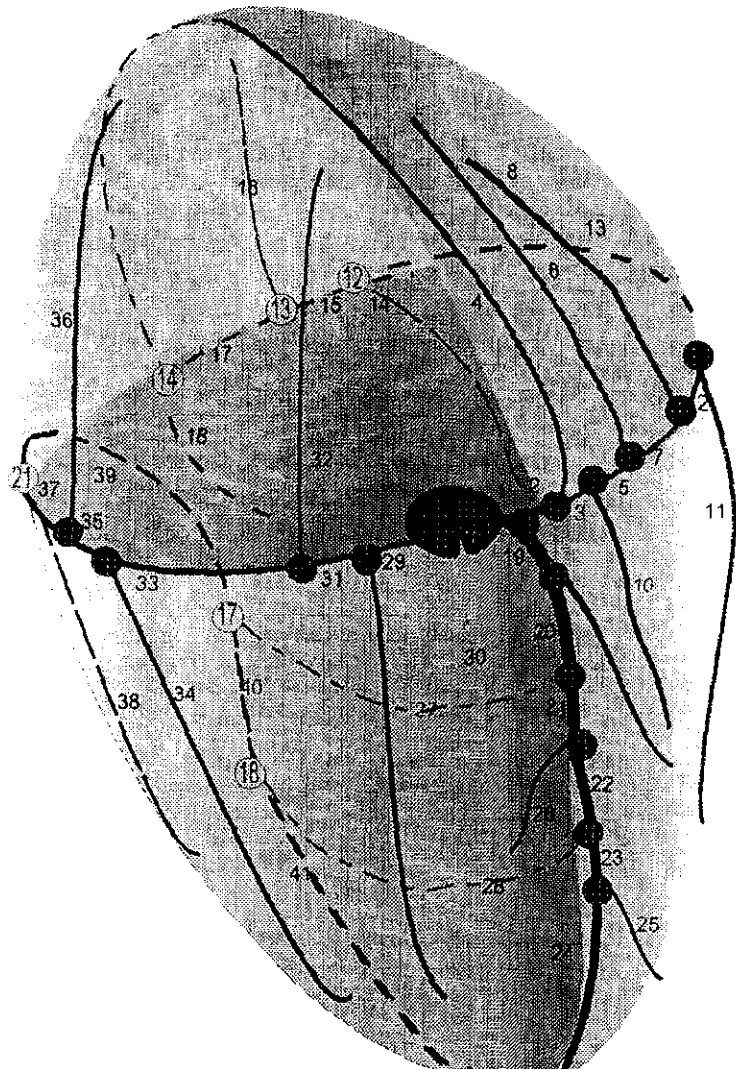
Итак, в рассматриваемом диапазоне изменения параметров сосудов численное решение системы будет устойчиво. Были проведены многочисленные

эксперименты по анализу решения, его устойчивости (в зависимости от изменения параметров сосудов в заданном диапазоне). Исследовалась зависимость потоков от диаметров и длин сосудов в диапазоне их изменения. Обычно задавался диапазон изменения длины или диаметра сосудов и проводились вычислительные эксперименты для конечных точек в этом диапазоне. Проведённые вычислительные эксперименты показывают относительную устойчивость в заданном диапазоне параметров.

Таким образом, решая систему (3) при заданной геометрии, размерах системы, разности давлений на входе и выходе можно получить распределение потоков. В качестве примера приводится схема распределения потоков для каждого пути в левой и в правой венечных артериях и сосудах, отходящих от неё, а также распределение потоков на выходе системы по различным участкам миокарда: правый, левый желудочек, правое, левое предсердие (разделение сосудов по группам условное). Результаты численных экспериментов приведены в Приложениях 3,4,5.

### Литература

1. кн.: Численные методы в динамике жидкостей. М."Мир", с.80-151,1981
2. Лайтфут Э. Явления переноса в живых системах. М., "Мир",1977.
3. Фолков Б., Нил Э. Кровообращение. М., "Медицина",1976
4. Бранков Г. Основы биомеханики. М., "Мир", 1981.
5. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. М., "Мир",1981
6. Мюлер Т.Дж. Применение численных методов к исследованию физиологических течений. В Карни Ш. Теория цепей. Анализ и синтез. М. "Связь",1973
7. Седов Л.И. Механика сплошной Среды. Т.2. М., "Наука", 1973
8. Rubinov S.I. Introduction to mathematical biology, New York, London, Sydney, Toronto, "John Wiley&Sons", 1975
9. Аронова Г.Н. Коронарное кровообращение и его регуляция, М, "Медицина",1970
10. Хубутия Б.И. Клиническая анатомия и оперативная хирургия перикарда и коронарных сосудов, Рязань, Рязанский мединститут им. академика И.П.Павлова, 1974
11. Мельман Е.П., Шевчук М.Г. Кровеносное русло сердца и его потенциальные резервы, М, "Медицина",1976
12. Колесов В.И. Хирургия венечных артерий сердца, Ленинград, 1979
13. Захаров Е.В., Перегудова Т.В. Исследование влияния постоянного магнитного поля на гемодинамику артерий основания головного мозга. Биофизика, т.24, вып.3, с.568, 1979 (полностью деп. в ВИНТИ за № 805-79)



**Схема коронарного кровообращения.**

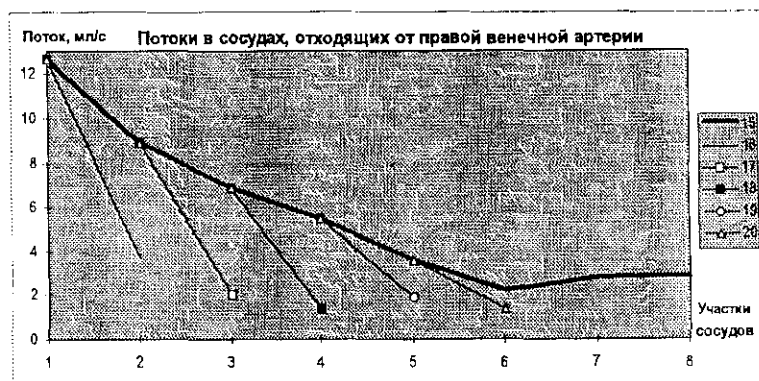
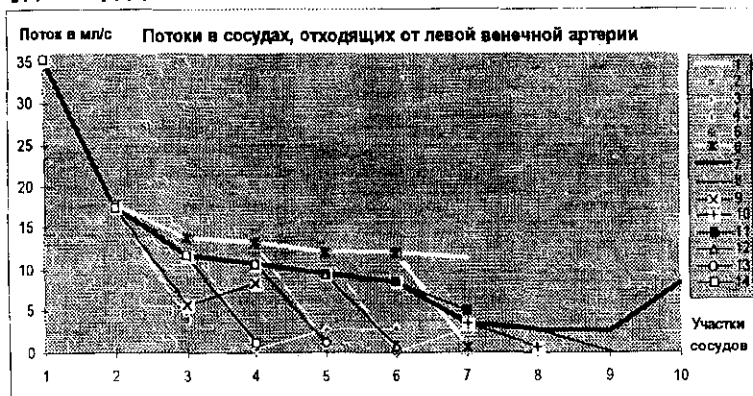
|                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| Левая венечная артерия:           | отрезки: { 1 }  |
| Правая венечная артерия:          | отрезки: { 29, 31, 33, 35, 37, 39, 40, 41 }, узлы: { 15, 16, 19, 20, 21, 17, 18 }, вторичные ветви: { 30, 32, 34, 36, 38 }      |
| Передняя межжелудочковая артерия: | отрезки: { 19, 20, 21, 22, 23, 24 } узлы: { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }, вторичные ветви: { 9, 26, 25 }, септальные ветви: { 27, 28 }    |
| Огибающая артерия:                | отрезки: { 2, 3, 5, 7, 12, 13, 15, 17, 18 }, узлы: { 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 } вторичные ветви: { 4, 10, 6, 8, 11, 14, 16 } |

**Уравнения, описывающие эту систему.**

1.  $x_1 - x_2 - x_{19} = 0$
2.  $x_2 - x_3 - x_4 = 0$
3.  $x_3 - x_5 - x_{10} = 0$
4.  $x_5 - x_6 - x_7 = 0$
5.  $x_7 - x_8 - x_{12} = 0$
6.  $x_{12} - x_{11} - x_{13} = 0$
7.  $x_{13} - x_{14} - x_{15} = 0$
8.  $x_{15} - x_{16} - x_{17} = 0$
9.  $x_{17} - x_{18} - x_4 = 0$
10.  $x_{29} - x_{30} - x_{31} = 0$
11.  $x_{31} - x_{32} - x_{33} = 0$
12.  $x_{33} - x_{34} - x_{35} = 0$
13.  $x_{35} - x_{36} - x_{37} = 0$
14.  $x_{37} - x_{38} - x_{39} = 0$
15.  $x_{39} - x_{27} - x_{40} = 0$
16.  $x_{40} - x_{28} - x_{41} = 0$
17.  $x_{19} - x_9 - x_{20} = 0$
18.  $x_{20} - x_{21} - x_{27} = 0$
19.  $x_{21} - x_{22} - x_{26} = 0$
20.  $x_{22} - x_{28} - x_{23} = 0$
21.  $x_{23} - x_{25} - x_{24} = 0$
22.  $R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3 + R_5 x_5 + R_7 x_7 + R_{12} x_{12} + R_{13} x_{13} + R_{15} x_{15} + R_{17} x_{17} + R_{18} x_{18} = f$
23.  $R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_4 x_4 + R_{18} x_{18} = f$
24.  $R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_5 x_3 + R_{10} x_{10} = f$
25.  $R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3 + R_5 x_5 + R_6 x_6 = f$
26.  $R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3 + R_5 x_5 + R_7 x_7 + R_8 x_8 = f$
27.  $R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3 + R_5 x_5 + R_7 x_7 + R_{12} x_{12} + R_{11} x_{11} = f$
28.  $R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3 + R_5 x_5 + R_7 x_7 + R_{12} x_{12} + R_{13} x_{13} + R_{14} x_{14} = f$
29.  $R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3 + R_5 x_5 + R_7 x_7 + R_{12} x_{12} + R_{13} x_{13} + R_{15} x_{15} + R_{16} x_{16} = f$
30.  $R_1 x_1 + R_{19} x_{19} + R_{20} x_{20} + R_{21} x_{21} + R_{22} x_{22} + R_{23} x_{23} + R_{24} x_{24} = f$
31.  $R_{29} x_{29} + R_{31} x_{31} + R_{33} x_{33} + R_{35} x_{35} + R_{37} x_{37} + R_{39} x_{39} + R_{40} x_{40} + R_{41} x_{41} = f$
32.  $R_{29} x_{29} + R_{30} x_{30} = f$
33.  $R_{29} x_{29} + R_{31} x_{31} + R_{32} x_{32} = f$
34.  $R_{29} x_{29} + R_{31} x_{31} + R_{33} x_{33} + R_{34} x_{34} = f$
35.  $R_{29} x_{29} + R_{31} x_{31} + R_{33} x_{33} + R_{35} x_{35} + R_{36} x_{36} = f$
36.  $R_{29} x_{29} + R_{31} x_{31} + R_{33} x_{33} + R_{35} x_{35} + R_{37} x_{37} + R_{38} x_{38} = f$
37.  $R_1 x_1 + R_{19} x_{19} + R_9 x_9 = f$
38.  $R_1 x_1 + R_{19} x_{19} + R_{20} x_{20} + R_{27} x_{27} + R_{40} x_{40} + R_{41} x_{41} = f$
39.  $R_1 x_1 + R_{19} x_{19} + R_{20} x_{20} + R_{21} x_{21} + R_{26} x_{26} = f$
40.  $R_1 x_1 + R_{19} x_{19} + R_{20} x_{20} + R_{21} x_{21} + R_{22} x_{22} + R_{28} x_{28} + R_{41} x_{41} = f$
41.  $R_1 x_1 + R_{19} x_{19} + R_{20} x_{20} + R_{21} x_{21} + R_{22} x_{22} + R_{23} x_{23} + R_{25} x_{25} = f$



## Приложение 5. Исследование кровеносных потоков в различных сосудах сердца.



### Описание путей, изображённых на графиках

| Левая венечная артерия |                          | Межжелудочковая артерия |                     | Правая венечная артерия |                         |
|------------------------|--------------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|-------------------------|
| Номер                  | Участки пути             | Номер                   | Участки пути        | Номер                   | Участки пути            |
| 7                      | 1,2,3,5,7,12,13,15,17,18 | 1                       | 1,19,20,21,22,23,24 | 15                      | 29,31,33,35,37,39,40,41 |
| 8                      | 1,2,3,5,7,12,13,15,16    | 2                       | 1,19,9              | 16                      | 29,30                   |
| 9                      | 1,2,4,18                 | 3                       | 1,19,20,27,40,41    | 17                      | 29,31,32                |
| 10                     | 1,2,3,5,7,12,13,14       | 4                       | 1,19,20,21,26       | 18                      | 29,31,33,34             |
| 11                     | 1,2,3,5,7,12,11          | 5                       | 1,19,20,21,22,28,41 | 19                      | 29,31,33,35,36          |
| 12                     | 1,2,3,5,7,8              | 6                       | 1,19,20,22,23,25    | 20                      | 29,31,33,35,37,38       |
| 13                     | 1,2,3,5,6                |                         |                     |                         |                         |
| 14                     | 1,2,3,10                 |                         |                     |                         |                         |