

ПРОБЛЕМЫ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ

Под редакцией *А. Н. Тихонова, А. С. Ильинского*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1980

Из содержания 1980г.,

А. Н. Тихонов, В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. Математические модели в электромагнитных методах геофизики и их численный анализ. **40**

А. Н. ТИХОНОВ, В. И. ДМИТРИЕВ, Е. В. ЗАХАРОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МЕТОДАХ ГЕОФИЗИКИ И ИХ ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Введение

В настоящее время в геофизических исследованиях широко применяются методы, основанные на использовании электромагнитных полей. Принципиальная возможность изучения строения Земли с помощью электромагнитных полей основана на том, что наблюдаемое на поверхности Земли поле несет информацию о распределении электропроводности земных недр. Конечной целью методов электромагнитного зондирования Земли является решение обратной задачи, т. е. определение геоэлектрического строения какой-либо части Земли. Поэтому одним из важнейших вопросов является развитие устойчивых методов решения обратных задач. Существующие методы интерпретации фактически сводятся к сравнению наблюдаемых данных с расчетными, полученными из решения соответствующей прямой задачи. Эффективность решения обратной задачи непосредственно связана с созданием методов быстрого решения прямых задач. Именно поэтому важнейшим вопросом теории электромагнитных зондирований является разработка методов расчета электромагнитных полей в неоднородных средах.

Вместе с тем проблема интерпретации — важное, но далеко не единственное направление, стимулирующее развитие численных методов изучения прямых задач. С решением прямых задач тесно связаны вопросы разработки методики измерений, оценки разрешающей способности и глубинности методов электромагнитных зондирований, проектирования новой геофизической аппаратуры, опти-

мизации ее параметров. Ответить на эти вопросы можно только на основе анализа математических моделей, представляющих типичные геологические ситуации. Таким образом, одним из основных этапов построения теории электромагнитных зондирований является построение математических моделей и разработка метода их численного анализа.

Естественно, что исследование моделей, достаточно полно отражающих реальную геологическую ситуацию, приводит к постановке весьма сложных граничных задач электродинамики, решение которых возможно только численными методами с применением современных ЭВМ. При этом большое значение имеет, что разрабатываются универсальные и эффективные методы, решающие широкий класс задач электромагнитных зондирований. Именно описанию современных классов математических моделей, возникающих в теории электромагнитных методов геофизики, и изложению развитых численных методов решения возникающих здесь прямых задач посвящена настоящая работа. Она носит обзорный характер и написана на основе результатов, полученных сотрудниками факультета вычислительной математики и кибернетики и Научно-исследовательского вычислительного центра Московского университета.

§ 1. Математические модели в теории электромагнитных зондирований

В основе математического описания процессов распространения электромагнитных полей в неоднородных проводящих средах лежат краевые задачи макроскопической электродинамики сплошной среды. Векторы электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega \varepsilon(M) \mathbf{E} = \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega \mu(M) \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon(M) = \varepsilon_0 + i\sigma/\omega$; ε_0 — диэлектрическая проницаемость, σ — проводимость, μ — магнитная проницаемость среды, ω — частота изменения поля

во времени (временная зависимость $e^{-i\omega t}$), \mathbf{j} — вектор плотности тока, возбуждающего электромагнитное поле. Построение модели среды связано с заданием функций $\epsilon(M)$ и $\mu(M)$, описывающих коэффициенты уравнений Максвелла. Выбор соответствующего класса моделей (семейств функций $\epsilon(M)$ и $\mu(M)$) определяется целью исследования, для которого строится математическая модель. Цель исследования во многом определяется той геолого-геофизической задачей, которую решает данный метод электромагнитного зондирования. В зависимости от этого фактора электромагнитные методы принято делить на структурные, глубинные, рудные, скважинные.

В структурной геофизике главная цель — это определение мощности и глубины залегания различных слоев осадочного чехла земной коры. Поэтому основной моделью строения среды здесь является модель слоистой Земли, в которой электрические характеристики являются кусочно-непрерывными функциями одной декартовой координаты (глубины). Фундаментальной прямой задачей в структурной электроразведке является задача расчета электромагнитного поля в слоистой среде, возбуждаемого произвольными источниками. Дальнейшее обобщение идет по линии усложнения модели и связано с рассмотрением кусочно-слоистых сред с переменной мощностью слоев. Такая модель позволяет оценить влияние отклонений от слоистой структуры на наблюдаемое на земной поверхности электромагнитное поле.

В глубинных электромагнитных методах главная задача состоит в определении глубинного распределения электропроводности. Для увеличения глубинности зондирования используются инфранизкочастотные колебания естественного электромагнитного поля Земли. Модели среды здесь те же, что и в структурных методах, но в качестве возбуждающего поля берется плоская электромагнитная волна.

В рудной геофизике основным объектом исследования являются аномальные электромагнитные поля локальных тел, отличающихся своими элект-

ромагнитными параметрами от окружающей среды. Окружающая среда считается слоистой и поле в ней, называемое нормальным, считается известным. Наличие в Земле рудных включений приводит к искажению нормального поля, которое регистрируется измерительными приборами. Связь между аномальным полем и параметрами включения делает возможным решение обратной задачи: определение размеров и положения локального тела и оценка величины его электропроводности.

Решение проблемы количественной интерпретации аномальных электромагнитных полей требует изучения их зависимости от параметров рудного тела. На основе анализа математических моделей, описывающих типичные для рудной геофизики геологические ситуации, выясняется вопрос о том, сколько разночастотных измерений и на каких частотах надо провести, чтобы определить электропроводность включения и основные параметры его залегания. Основной моделью в рудной электроразведке является локальное проводящее тело, расположенное в плохо проводящем полупространстве, перекрытом хорошо проводящим слоем.

В скважинной геофизике целью исследования является детальное изучение прискважинной зоны, т. е. определение геоэлектрической структуры среды, пройденной скважиной. Типичной моделью здесь является слоистая плоско-параллельная среда, в которой расположена скважина, моделируемая проводящим цилиндром. При анализе влияния на параметры околоскважинной среды бурового раствора, проникающего из скважины, используют модель цилиндрической слоистой среды. В самом общем случае изучается среда, представляющая из себя комбинацию плоско-слоистой и цилиндрически-слоистой сред. На основе решения прямых задач выясняются информативность наблюдаемых данных, разрешающая способность и глубинность метода.

В следующих разделах статьи мы рассмотрим методы решения прямых задач для типичных геоэлектрических моделей, описанных выше.

§ 2. Методы расчета электромагнитных полей в слоистых средах

Во всех методах решения обратной задачи электромагнитных зондирований основой является алгоритм решения прямой задачи расчета электромагнитного поля в слоистой среде. Внедрение методов электромагнитных зондирований в практику геофизических исследований было невозможно без создания эффективных методов расчета электромагнитных полей в слоистых средах. Таким образом, разработка математических методов расчета электромагнитных полей в слоистых средах явилась определяющим фактором в развитии новых методов электроразведки. В этом направлении решающую роль сыграла работа [1], где был дан эффективный алгоритм расчета поля электрического диполя в слоистой среде при произвольном числе слоев. Этот метод расчета электромагнитных полей на поверхности горизонтально-однородной среды основан на вычислении интегралов от решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от переменной интегрирования как от параметра. При численном интегрировании приходится решать многократно стандартную задачу, что соответствует специфике использования ЭВМ и определяет эффективность алгоритма решения полной задачи вычисления поля. Метод расчета электромагнитных полей в горизонтально-слоистых средах обобщается и на слоистые среды с криволинейными границами раздела сред, из которых наибольший интерес для геофизических исследований представляют цилиндрическая и сферическая слоистые среды.

Рассмотрим метод расчета электромагнитного поля произвольного источника, в случае плоскопараллельной градиентной слоистой среды [2]. Электромагнитное поле выражается через векторный потенциал $A(x, y, z)$:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = i\omega \left[\mathbf{A} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mu}{k^2} \operatorname{div} \frac{\mathbf{A}}{\mu} \right) \right],$$

где $k^2 = \omega^2 \epsilon' \mu$; $\mu = \mu(z)$ — магнитная проницае-

мость среды; $\varepsilon'(z) = \varepsilon_0 + i \frac{\sigma(z)}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость. Векторный потенциал удовлетворяет уравнению:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) - \frac{k^2}{\mu} \left[\mathbf{A} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mu}{k^2} \operatorname{div} \frac{\mathbf{A}}{\mu} \right) \right] = \mathbf{j},$$

где \mathbf{j} — плотность тока источника.

Если ввести векторный потенциал в виде:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \widehat{G}(M, M_0) \mathbf{j}(M_0) dv_{M_0},$$

где $\widehat{G}(M, M_0)$ — тензорная функция Грина:

$$\widehat{G} = \begin{pmatrix} G_0(M, M_0) & 0 & 0 \\ 0 & G_0(M, M_0) & 0 \\ \mu \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial x} & \mu \frac{\partial g(M, M_0)}{\partial y} & \frac{\mu(z)}{\varepsilon'(z_0)} G_1(M, M_0) \end{pmatrix},$$

то функции G_0 , G_1 и g , определяющие тензор Грина, будут решениями следующих уравнений:

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} G_0 \right) + \frac{k^2}{\mu} G_0 = -4\pi \delta(r_{MM_0}),$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\varepsilon'} \operatorname{grad} G_1 \right) + \frac{k^2}{\varepsilon'} G_1 = -4\pi \delta(r_{MM_0}),$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\varepsilon'} \operatorname{grad} g \right) + \frac{k^2}{\varepsilon'} g = -G_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu \varepsilon'} \right),$$

где $\delta(r_{MM_0})$ — дельта функция. Так как рассматриваемые функции зависят только от z , z_0 и $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$, мы можем представить их в виде

$$G_0 = \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \Phi_0(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda,$$

$$G_1 = \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \Phi_1(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda,$$

$$g = \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \varphi(\lambda, z, z_0) \lambda d\lambda.$$

При этом функции Φ_0 , Φ_1 и φ определятся с помощью решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{a(z)} \frac{d}{dz} V_a^\gamma \right] - \frac{\eta^2}{a(z)} V_a^\gamma = 0, \quad \eta^2 = \lambda^2 - k^2 \text{ при } z \neq z_0 \quad (3)$$

с граничными условиями при $z = z_0$

$$V_a^\gamma(z = z_0 - 0) - V_a^\gamma(z = z_0 + 0) = 2\gamma, \quad (4)$$

$$\frac{1}{a(z_0 - 0)} \frac{\partial V(z_0 - 0)}{\partial z} - \frac{1}{a(z_0 + 0)} \frac{\partial V(z_0 + 0)}{\partial z} = 2(1 - \gamma). \quad (5)$$

Функция V_a^γ определяет наши функции так:

$$\Phi_0 = V_\mu^0, \quad \Phi_1 = V_{\varepsilon'}^0, \quad \varphi = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ V_{\varepsilon'}^1 - \frac{1}{\mu} \frac{dV_\mu^0}{dz} \right\}.$$

Таким образом, задача в конечном счете сводится к численному решению обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями (4)–(5). На практике часто проводят расчет для кусочно-постоянных функций $\mu(z)$, $\varepsilon(z)$, $\sigma(z)$. В этом случае решение уравнения (1) можно выписать аналитически, используя рекуррентные формулы пересчета от одного слоя к другому.

При больших расстояниях точки наблюдения от местоположения источника для расчета полей приходится вычислять интегралы от быстроосциллирующих функций ($\rho \gg 1$). В этом случае удобно использовать асимптотики поля. Основой для получения таких асимптотик явились исследования по асимптотическому поведению специального класса несобственных интегралов, содержащих бесселевы функции [3]. С помощью этого метода были исследованы асимптотики электромагнитных полей в слоистых средах [4–5].

Данный метод может быть применен и в слоистых средах с криволинейными границами, если они являются координатными поверхностями в системе координат, в которой разделяют переменные

в уравнениях Максвелла. Проиллюстрируем эти возможности на примере расчета осесимметричного электромагнитного поля в цилиндрической среде, когда характеристики среды зависят только от координаты ρ цилиндрической системы координат [6]. Если в такой среде поле возбуждается магнитным диполем $m\delta(r)$, расположенным на оси, то поля имеют отличными от нуля только компоненты E_φ , H_ρ и H_z , причем

$$H_\rho = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}; \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi),$$

а $E_\varphi(\rho, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\mu(\rho)\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\varphi) \right] + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + k^2(\rho) E_\varphi = -i\omega m \mu(\rho) \delta(r).$$

Если представить $E_\varphi(\rho, z)$ в виде

$$E_\varphi = \int_0^\infty u(\lambda, \rho) \cos \lambda z d\lambda,$$

то для функции $u(\lambda, \rho)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mu(\rho) \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\mu(\rho)\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho u) \right] - (\lambda^2 - k^2(\rho)) u = 0 \quad \text{при } \rho \neq 0 \quad (6)$$

с условием возбуждения

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho u(\rho)) = \frac{i\omega m \mu(0)}{8\pi} \quad (7)$$

и условием излучения при $\rho \rightarrow \infty$.

Уравнение (6) удобно решать, введя новую функцию

$$Y(\rho) = \frac{i\omega H_z}{E_\varphi} = \frac{1}{\mu(\rho)\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho u). \quad (8)$$

Тогда с учетом условия (7) находим

$$u(\rho) = \frac{i\omega\mu(0)m}{8\pi\rho} e^{\int_0^\rho \mu(\rho) Y(\rho) d\rho}, \quad (9)$$

а функция $Y(\rho)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$Y'(\rho) + \mu(\rho)Y^2 - \frac{1}{\rho}Y = \frac{\lambda^2 - k^2(\rho)}{\mu(\rho)}. \quad (10)$$

Если при $\rho \geq R$, мы имеем $\mu = \mu_n = \text{const}$, $k = k_n = \text{const}$, то решение (10) есть

$$Y(\rho) = -\frac{\gamma_n}{\mu_n} \frac{K_0(\gamma_n \rho)}{K_1(\gamma_n \rho)}, \quad \text{где } \gamma_n = \sqrt{\lambda^2 - k_n^2}, \quad \rho \geq R.$$

Взяв $Y(R)$ в качестве начального значения, найдем из (10) $Y(\rho)$ при $0 < \rho < R$, а затем, согласно (9), искомую функцию $u(\rho)$.

Развитые методы расчета электромагнитных полей в слоистых средах позволяют эффективно решать прямые задачи электромагнитных зондирований слоистых сред и дают основу для интерпретации наблюдаемых данных.

§ 3. Интегральные уравнения плоских задач электродинамики неоднородных сред

Следующим шагом в усложнении моделей среды является переход к двумерным моделям, когда параметры среды зависят от координат y, z , т. е. $\epsilon(y, z)$, $\mu(y, z)$, $\sigma(y, z)$. Если при этом источники поля также не зависят от координаты x , то мы приходим к плоским задачам электродинамики. Согласно уравнениям (1)–(2) в этом случае полное электромагнитное поле разлагается на систему двух независимых полей:

1. Поле E -поляризации: $\mathbf{E} = \{E_x, 0, 0\}$, $\mathbf{H} = \{0, H_y, H_z\}$, причем

$$H_y = -\frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}; \quad H_z = \frac{i}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y},$$

а E_x удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \frac{k^2}{\mu} E_x = -i\omega j_x, \quad (11)$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$.

2. Поле H -поляризации: $E = \{0, E_y, E_z\}$, $\vec{H} = \{H_x, 0, 0\}$, причем

$$E_y = \frac{i}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = -\frac{i}{\omega \varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y},$$

а H_x удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \frac{k^2}{\varepsilon} H_x = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{j_y}{\varepsilon} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{j_z}{\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения (11)–(12) одного типа. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать задачи для уравнения

$$\operatorname{div}(\gamma(M) \operatorname{grad} u) + \gamma(M) k^2(M) u = f(M). \quad (13)$$

В случае E -поляризации имеем $\gamma = 1/\mu$, $u = E_x$, $f = -i\omega j_x$, а в случае H -поляризации $u = H_x$, $\gamma = 1/\varepsilon$, $f = -\left(\operatorname{rot} \frac{j}{\varepsilon}\right)_x$. Всегда считаем, что

$\operatorname{Im} k > 0$. Предполагается, что функция распределения источников электромагнитного поля $f(M)$ имеет локальный характер и равна нулю на границах разрыва параметра $\gamma(M)$.

На всех границах разрыва параметра γ непрерывны u и $\gamma \frac{\partial u}{\partial n}$. На бесконечности в силу условия $\operatorname{Im} k > 0$, достаточно потребовать убывания функции вида

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} u = 0.$$

Заметим, что при произвольной зависимости параметра γ от координат y и z задача достаточно сложна и сведение ее к интегральным уравнениям затруднительно. Рассматриваемый ниже метод [7]

дает возможность редуцировать задачи типа (13) к сравнительно простым интегральным уравнениям 2-го рода при некоторых дополнительных условиях на параметры среды. Основная идея метода заключается в следующем.

Предположим, что плоскость yoz можно разбить на N областей V_p ($p=1, 2, 3... N$), ограниченных достаточно гладкими контурами C_p (некоторые из областей V_p будут неограниченными), в каждой из которых обозначим параметр $\gamma = \gamma_p(y, z)$. При этом параметр $\gamma_p(y, z)$, рассматриваемый в данной области V_p , должен допускать доопределение на всю плоскость yoz . Результат продолжения обозначим $\tilde{\gamma}_p(y, z)$. От функции $\tilde{\gamma}_p(y, z)$ потребуем, чтобы она позволяла определить фундаментальное решение $G_p(M, M_0)$ для уравнения вида

$$\operatorname{div}(\tilde{\gamma}_p(M) \operatorname{grad} u) + \tilde{\gamma}_p k^2(M)u = 0 \quad (14)$$

на всей плоскости.

Функция $G_p(M, M_0)$ является функцией координат двух точек плоскости $M(y, z)$ и $M_0(y_0, z_0)$, удовлетворяет по координатам каждой из них уравнению (14), граничным условиям на границах разрыва параметра $\tilde{\gamma}_p$.

$$[G_p] = \left[\tilde{\gamma}_p \frac{\partial G_p}{\partial n} \right] = 0, \quad (15)$$

а также условию убывания на бесконечности. (Квадратные скобки означают разность предельных значений на границе разрыва.) При совпадении точек M и M_0 функция $G_p(M, M_0)$ имеет особенность типа

$$\frac{1}{2\pi \tilde{\gamma}_p} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}; \quad r_{MM_0} = \sqrt{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Таким образом, получается набор N задач на плоскости, для каждой из которых должна быть известна функция G_p ($p=1, 2, 3... N$). Если определить функции $G_p(M, M_0)$ для всех p , то можно, как показано ниже, свести исходную задачу для

уравнения (13) к системе интегральных уравнений по контурам C_p , которые являются границами раздела областей V_p . При выводе воспользуемся формулой Грина для уравнения $\operatorname{div} \gamma \operatorname{grad} u = 0$

$$\begin{aligned} \int_V \{u \operatorname{div} (\gamma \operatorname{grad} v) - v \operatorname{div} (\gamma \operatorname{grad} u)\} d\tau_M = \\ = \int_C \gamma(M) \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} dl_M, \end{aligned} \quad (16)$$

где V — некоторая область на плоскости yoz , ограниченная контуром C . $u(M)$ и $v(M)$ — регулярные функции, $\gamma(M)$ — непрерывно-дифференцируемая функция.

Формула (16) получается непосредственно из теоремы Гаусса—Остроградского, если ее применить к векторам $A = \gamma u \operatorname{grad} v$ и $B = \gamma v \operatorname{grad} u$.

Заметим также, что формулу (16) можно применять и к кусочно-дифференцируемой функции $\gamma(M)$ при условии, что выполнены соответствующие граничные условия для функций u и v .

Чтобы получить интегральные соотношения и уравнения, применим формулу (16) к функции $u(M)$ и $G_p(M, M_0)$ в области V_p .

Будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{C_p} \gamma_p(M) \left\{ u \frac{\partial G_p}{\partial n} - G_p \frac{\partial u}{\partial n} \right\} dl_M + u_p^0(M_0) = \\ = \begin{cases} u(M_0), & M_0 \in V_p \\ 0, & M_0 \in \overline{V_p}, \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$u_p^0(M_0) = - \int_{V_p} G_p(M, M_0) f(M) d\tau_M.$$

Просуммировав теперь выражение (17) по всем областям V_p , получим

$$u(M_0) = \sum_{p=1}^N \int_{C_p} \gamma_p(M) \left\{ u \frac{\partial G_p}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} G_p \right\} dl_M +$$

$$+ \sum_{p=1}^N u_p^0(M_0). \quad (18)$$

В выражение (18) каждая граница раздела областей S_p входит дважды как граница двух соседних областей.

Рассмотрим отдельно члены в сумме (18), содержащие интегралы по контуру l_{pq} ($p, q=1, 2, 3, \dots, N$); l_{pq} — граница раздела двух областей с номерами p и q соответственно. Если нормаль к контуру l_{pq} выбрать внешней к области с номером p , то будем иметь следующую цепочку равенств, учитывая условия сопряжения:

$$\begin{aligned} & \int_{l_{pq}} \gamma_p(M) \left\{ (u)_p \frac{\partial G_p}{\partial n} - \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_p G_p \right\} dl_M - \\ & - \int_{l_{pq}} \gamma_q(M) \left\{ (u)_q \frac{\partial G_q}{\partial n} - \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_q G_q \right\} dl_M = \\ & = \int_{l_{pq}} (u)_p \left\{ \gamma_p(M) \frac{\partial G_p}{\partial n} - \gamma_q(M) \frac{\partial G_q}{\partial n} \right\} dl_M - \\ & - \int_{l_{pq}} \gamma_p(M) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_p \{ G_p - G_q \} dl_M = \\ & = \int_{l_{pq}} (u)_p \left\{ \gamma_p(M) \frac{\partial G_p}{\partial n} - \gamma_q(M) \frac{\partial G_q}{\partial n} \right\} dl_M - \\ & - \int_{l_{pq}} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_p \{ \gamma_p(M) G_p - \gamma_q(M) G_q \} dl_M + \\ & + \int_{l_{pq}} \{ \gamma_p(M) - \gamma_q(M) \} G_q \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_p dl_M, \end{aligned}$$

где $(u)_{p,q}$, и $(\partial u / \partial n)_{p,q}$ — предельные значения u и $\partial u / \partial n$ на контуре l_{pq} изнутри области $V_{p,q}$.

С учетом последних соотношений представление (18) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u(M_0) = & \sum_{p,q} \int_{l_{pq}} \left\{ (u)_p \left\{ \gamma_p \frac{\partial G_p}{\partial n} - \gamma_q \frac{\partial G_q}{\partial n} \right\} dl_M - \right. \\
 & - \sum_{p,q} \int_{l_{pq}} \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)_p \{ \gamma_p G_p - \gamma_q G_q \} dl_M + \\
 & + \sum_{p,q} \int_{l_{pq}} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_p (\gamma_p - \gamma_q) G_q dl_M + \sum_{p=1}^N u_p^0(M_0).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что в сумме по p и q содержатся только члены, соответствующие соседним областям. Если предположить, что функции $\gamma_p(M)$ — непрерывно-дифференцируемые функции точек контура l_{pq} , то разности

$$\gamma_p(M) G_p - \gamma_q(M) G_q \text{ и } \gamma_p(M) \frac{\partial G_p}{\partial n} - \gamma_q(M) \frac{\partial G_q}{\partial n}$$

в силу

$$\gamma_p G_p(M, M_0) \sim \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + O(1)$$

при $r_{MM_0} \rightarrow 0$ (точка M_0 стремится к M) непрерывны при пересечении точкой M_0 контуров l_{pq} вдоль нормали к контуру. Соответствующие интегралы допускают дифференцирование по направлению нормали к контуру l_{pq} по точке M_0 . При этом интегралы, получившиеся в результате дифференцирования, существуют как функции точки контура l_{pq} в собственном или несобственном смысле (прямые значения на контуре), а при переходе точки через контур остаются непрерывными. Интеграл с ядром G_q представляет собой потенциал простого слоя, нормальная производная которого разрывна при переходе через контур l_{pq} .

Возьмем точку M_0 в представлении (19) в областях V_n ($n=1, 2, 3, \dots, N$) и V_m ($m=1, 2, 3, \dots, N$),

имеющих общую границу l_{mn} , после чего продифференцируем (19) по направлению n_0 , проходящей через точку M_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(M_0)}{\partial n_0} &= \sum_{p,q} \int_{l_{pq}} \left\{ (u)_p \left(\gamma_p \frac{\partial^2 G_p}{\partial n_0 \partial n} - \gamma_q \frac{\partial^2 G_q}{\partial n_0 \partial n} \right) dl_M - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{p,q} \int_{l_{pq}} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_p \left(\gamma_p \frac{\partial G_p}{\partial n_0} - \gamma_q \frac{\partial G_q}{\partial n_0} \right) dl_M + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p,q} \int_{l_{pq}} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_p (\gamma_p - \gamma_q) \frac{\partial G_q}{\partial n_0} dl_M + \sum_{p=1}^N \frac{\partial u_p^0}{\partial n_0}(M_0) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Если теперь в соотношениях (19) и (20) точку M_0 опустить на контур l_{mn} (изнутри той области, для которой n_0 — внешняя нормаль), то получим следующую систему интегральных уравнений относительно $(u)_m$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_m$ на контуре l_{mn} ($m, n = 1, 2, 3, \dots, N$):

$$\begin{aligned} (u)_m - \sum_{p,q} \int_{l_{pq}} \left\{ (u)_p \left(\gamma_p \frac{\partial G_p}{\partial n} - \gamma_q \frac{\partial G_q}{\partial n} \right) \right\} dl_M + \\ + \sum_{p,q} \int_{l_{pq}} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_p \{ \gamma_p(M) (G_p - G_q) \} dl_M + \sum_{p=1}^N u_p^0(M_0); \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma_m(M_0)}{\gamma_n(M_0)} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_m - \sum_{p,q} \int_{l_{pq}} (u)_p \left\{ \gamma_p \frac{\partial^2 G_p}{\partial n_0 \partial n} - \right. \\ \left. - \gamma_q \frac{\partial^2 G_q}{\partial n_0 \partial n} \right\} dl_M + \sum_{p,q} \int_{l_{pq}} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_p \left(\gamma_p \frac{\partial G_p}{\partial n_0} - \frac{\partial G_q}{\partial n_0} \right) dl_M = \\ = \sum_{p=1}^N \frac{\partial u_p^0(M_0)}{\partial n_0}. \end{aligned} \quad (22)$$

Если все l_{pq} ограничены, то система интегральных уравнений (21) и (22) является фредгольмов-

ской. Исходя из единственности решения исходной задачи можно доказать, что эта система имеет единственное решение (в классе $C_N^{(1)}$), откуда следует существование ее решения. В общем случае эта система будет содержать интегралы по бесконечной области. При этом единственность сохраняется, но методы нахождения решения могут отличаться от обычных численных методов, применяемых для уравнений Фредгольма.

Система уравнений (21) и (22) наиболее проста в том смысле, что она максимально учитывает специфику задачи, используя фундаментальные решения (функции Грина) $G_p(M, M_0)$, к определению которых и свелось в конечном итоге решение исходной задачи. Естественно, что функции $G_p(M, M_0)$ для всего конкретного набора N задач должны вычисляться достаточно просто, ибо трудности первоначальной задачи не должны заменяться трудностями в нахождении функции Грина. Исходя из этого, наиболее удобно использовать явные выражения для вычисления фундаментальных решений или хотя бы иметь достаточно простой алгоритм для их вычисления. Широкий класс задач, для которых функции $G_p(M, M_0)$ могут быть вычислены, выделяется следующим предположением. Пусть параметр γ_p ($p=1, 2, 3, \dots$) меняется лишь вдоль одного избранного направления. Тогда пространство с параметрами ϵ_p, μ_p представляет собой одномерную слоистую среду, параметры которой изменяются вдоль одной координаты z_p (соответствующая система координат на плоскости yoz выбирается таким образом, чтобы ось oz была направлена вдоль изменения параметров ϵ_p, μ_p — $\epsilon_p(z_p), \mu_p(z_p)$). С помощью интегральных преобразований для указанного класса задач возможно либо явное построение фундаментальных решений в виде интегралов от элементарных функций, либо их вычисление можно свести к решению обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами.

В теории электромагнитных методов, применяемых как в рудной, так и в структурной электро-разведке, наибольший интерес представляет ис-

следование поведения электромагнитных полей в неоднородных средах с кусочно-постоянным распределением проводимости. Нетрудно указать большое количество структур, достаточно интересных для геофизических исследований, в которых функции $G_p^{e, m}(M, M_0)$ для всех значений p могут быть вычислены в явном виде (однократные интегралы от элементарных функций). В настоящее время разработан ряд универсальных и достаточно удобных алгоритмов расчета функций Грина [8—12], обладающих большой эффективностью. Во многих случаях для решения систем интегральных уравнений типа (21—22) можно воспользоваться методом частичного обращения оператора [13, 14] с последующим решением полученного уравнения методом последовательных приближений или сведениям его к системе линейных алгебраических уравнений.

Подчеркнем, что решение одной и той же задачи может приводить к различным способам разбиения плоскости на области V_p . Выбор того или иного разбиения зависит как от метода численного решения интегральных уравнений, так и от характера необходимой выходной информации. В силу этого затруднительно дать общий рецепт для выбора разбиения плоскости на области V_p и способов продолжения параметра γ_p . Необходимо, однако, сказать, что упрощение функций Грина $G_p(M, M_0)$ ведет к увеличению числа уравнений и поэтому выбор разбиения должен быть оптимальным с точки зрения простоты алгоритма вычисления $G_p(M, M_0)$ и количества интегральных уравнений.

Отметим также, что фактически без изменения метод может быть применен к решению пространственных скалярных задач. Наиболее важным классом задач такого типа для геоэлектрики являются задачи расчета поля постоянного тока в неоднородных проводящих средах и, в частности, задачи теории электрического каротажа сопротивлений при одновременном учете конечной мощности пластов, размеров скважины и зоны проникновения бурового раствора. При осесимметричном

возбуждении такие задачи сводятся к одномерным интегральным уравнениям по образующим цилиндрических поверхностей раздела сред.

§ 4. Обобщение формул Стрэттона—Чу на горизонтально-слоистые среды

Рассмотренный в предыдущем разделе метод может быть перенесен и на трехмерные модели. Отметим, что при выводе интегральных уравнений для плоских задач электродинамики мы пользовались представлением решения с помощью фундаментальной функции Грина слоистой среды, методы построения которой известны. Для пространственных задач электродинамики слоистых сред аналогичных представлений электромагнитных полей с помощью фундаментальных решений до недавнего времени не существовало. Тем не менее для однородных сред такие представления были получены Стрэттоном—Чу [15—16], и основой этих представлений было фундаментальное решение скалярного уравнения Гельмгольца $(\Delta + k^2)u = 0$

$$g(M, M_0) = \frac{\exp(ikR_{MM_0})}{4\pi R_{MM_0}},$$

$$R_{MM_0} = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть в данной слоистой среде выделена область V , ограниченная достаточно гладкой поверхностью S . Источники поля могут быть расположены как внутри, так и вне S , предположим только, что они отсутствуют на самой поверхности S . Основная цель настоящего раздела — вывод интегральных представлений вне и внутри S при заданных источниках возбуждения и значениях электромагнитных полей на поверхности S .

Как известно, для однородной изотропной среды такие представления имеют вид:

$$\mathbf{E}(M) = \int_V \left\{ i\omega\mu g(M, M_0) \mathbf{I} - [\mathbf{I}' \times \text{grad}(M, M_0)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{P}{\varepsilon} \operatorname{grad} g(M, M_0) \} d\tau_{M_0} + \int_S \{ i\omega\mu (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) g(M, M_0) + \\
 & + \mathbf{n} \times \mathbf{E} \times \operatorname{grad} g(M, M_0) + (\mathbf{nE}) \operatorname{grad} g(M, M_0) \} dS,
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(M) = & \int_V \{ i\omega\varepsilon \mathbf{I}' g(M, M_0) + (\mathbf{I} \operatorname{grad} g(M, M_0)) + \\
 & + \frac{P'}{\mu} \operatorname{grad} g(M, M_0) \} d\tau_{M_0} + \int_S \{ i\omega\varepsilon g(M, M_0) (\mathbf{nE}) - \\
 & - (\mathbf{n} \times \mathbf{E} \times \operatorname{grad} g(M, M_0)) - (\mathbf{nH}) \operatorname{grad} g(M, M_0) \} dS_M;
 \end{aligned} \tag{24}$$

\mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S , внешней по отношению к области, занимающей объем V . Заметим, что при заданных значениях $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ и $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ выбор нормальных компонент $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})$ и $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})$ не может быть сделан произвольно, а вытекает из уравнений Максвелла

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) = \frac{i}{\omega\varepsilon} (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{H}); \tag{25}$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) = -\frac{i}{\omega\mu} (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{E}). \tag{26}$$

Если внутри области V источники электромагнитного поля отсутствуют, то объемные интегралы в (23) и (24) исчезают, а остаются только интегралы по поверхности S от касательных компонент электромагнитных полей (с учетом соотношений (25) и (26)), которые можно интерпретировать как плотности поверхностных токов (электрических и магнитных):

$$\mathbf{j} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}; \quad \mathbf{j}' = \mathbf{n} \times \mathbf{E},$$

откуда непосредственно следует принцип эквивалентности.

Если область V неограниченно расширяется (при этом поверхность S удаляется в бесконечность), то исчезает поверхностный интеграл,

а представления (23) и (24) дают выражения электромагнитного поля в пространстве, заполненном однородной средой.

Представления, аналогичные (23) и (24), в слоистой среде не имеют места. Если такие представления написать, то они будут содержать интегралы по плоскостям L_j (поверхности разрыва параметров среды). Поэтому фундаментальное решение уравнения Гельмгольца для однородного пространства $g(M, M_0)$ необходимо заменить функциями, учитывающими слоистую структуру среды. При этом основное отличие от однородного пространства заключается в матричном (тензорном) характере представлений. Это обстоятельство, вполне очевидное с физической точки зрения из-за условий сопряжения на границах разрыва параметров среды, приводит к необходимости построения матриц фундаментальных решений. Сами же представления являются интегральными операторами, переводящими векторы электромагнитного поля с границы области в любую точку внутри нее.

Введем две матрицы 3-го порядка $\widehat{G}_e(M, M_0)$ и $\widehat{G}_m(M, M_0)$, которые назовем матрицами фундаментальных решений, и представим их в виде суммы диадных произведений:

$$\widehat{G}_{e,m}(M, M_0) = \sum_{\alpha=1}^3 g_{\alpha}^{e,m} \cdot l_{\alpha},$$

где $g_{\alpha}^{e,m} = \{g_{1\alpha}^{e,m}, g_{2\alpha}^{e,m}, g_{3\alpha}^{e,m}\}$ — вектор-столбец матрицы $\widehat{G}_{e,m}(M, M_0)$, а l_1, l_2, l_3 — орты декартовой системы координат.

Матричные элементы являются функциями координат двух точек пространства M и M_0 и удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta g_{\alpha\beta}^{e,m} + k^2(M) g_{\alpha\beta}^{e,m} = 0,$$

а диагональные элементы матриц $\widehat{G}_{e,m}$ имеют при совпадении аргументов особенность типа

$$g_{\alpha\alpha}^e(M, M_0) \sim \frac{\mu(M_0)}{R_{MM_0}}, \quad g_{\alpha\alpha}^m \sim \frac{\varepsilon(M_0)}{R_{MM_0}}.$$

Так как считается, что параметр k удовлетворяет условию $\text{Im } k > 0$, то на бесконечности наложим на матричные элементы условия убывания:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R g_{\alpha\beta}^{e,m} = 0 \quad (R \text{ — расстояние до точки } M).$$

Кроме того, матричные элементы удовлетворяют некоторым условиям сопряжения на плоскостях разрыва параметров μ и ε , которые будут сформулированы ниже.

Для получения этих условий и вывода интегральных представлений воспользуемся векторным аналогом формулы Грина

$$\begin{aligned} \int_T \{ \mathbf{Q} \text{ rot rot } \mathbf{P} - \mathbf{P} \text{ rot rot } \mathbf{Q} \} d\tau = \\ = \int_F \{ (\mathbf{P} \times \text{rot } \mathbf{Q}) - (\mathbf{Q} \times \text{rot } \mathbf{P}) \} nds, \end{aligned} \quad (27)$$

где T — некоторый объем, ограниченный регулярной поверхностью F , а \mathbf{Q} и \mathbf{P} — регулярные вектор-функции.

Для проведения необходимых преобразований и получения условий сопряжений на плоскостях разрыва $\mu(\varepsilon)$ применим формулу (27) к векторам $\frac{\mathbf{E}}{\mu} \left(\frac{\mathbf{H}}{\varepsilon} \right)$ и $\mathbf{g}_{\alpha}^e (\mathbf{g}_{\alpha}^m)$ в области T , считая, что они в этой области регулярны, а на поверхности F сторонние источники отсутствуют:

$$\begin{aligned} \int_T \left\{ \mathbf{g}_{\alpha}^e \text{ rot rot } \frac{\mathbf{E}}{\mu} - \frac{\mathbf{E}}{\mu} \text{ rot rot } \mathbf{g}_{\alpha}^e \right\} d\tau = \\ = \int_F \left\{ \frac{\varepsilon \mathbf{E}}{\mu} \times \text{rot } \mathbf{g}_{\alpha}^e - \mathbf{g}_{\alpha}^e \times \text{rot } \frac{\mathbf{E}}{\mu} \right\} nds. \end{aligned} \quad (28)$$

Используя элементарные векторные тождества и уравнения Максвелла, можно привести соотношение (28) к следующему виду (аналогично выводу Стрэттона—Чу [15], [16]):

$$\int_T \left\{ i\omega \mathbf{I} \mathbf{g}_{\alpha}^e - \frac{1}{\mu} \mathbf{I}' \text{ rot } \mathbf{g}_{\alpha}^e - \frac{1}{\mu\varepsilon} P \text{ div } \mathbf{g}_{\alpha}^e \right\} d\tau =$$

$$= \int_F i\omega (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \mathbf{g}_\alpha^e + \frac{1}{\mu} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \operatorname{rot} \mathbf{g}_\alpha^e + \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{g}_\alpha^e \} ds, \quad (29)$$

где в объемном интеграле содержатся только известные величины — плотности сторонних токов и зарядов, а поверхностные интегралы содержат значения касательных и нормальных к поверхности F компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Чтобы получить условия сопряжения для матричных элементов (компонент векторов $\mathbf{g}_\alpha^e(M, M_0)$ $\alpha = 1, 2, 3$), достаточно рассмотреть всего одну границу раздела сред. Предположим, что рассматриваемая область V пересекает всего одну границу разрыва параметра μ , которую примем за плоскость $z=0$; часть области V , лежащую над плоскостью раздела, обозначим V_1 , а под плоскостью раздела — через V_2 ; соответственно этому

$$\mu(M) = \mu_1 \quad (M \in V_1) \quad \text{и} \quad \mu(M) = \mu_2 \quad (M \in V_2).$$

Применим формулу (29) в областях V_1 и V_2 и сложим полученные выражения. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ i\omega \mathbf{g}_\alpha^e(M, M_0) - \frac{1}{\mu(M)} \mathbf{I}' \operatorname{rot} \mathbf{g}_\alpha^e(M, M_0) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{P}{\mu \epsilon} \operatorname{div} \mathbf{g}_\alpha^e \right\} d\tau - \int_S \left\{ i\omega \mathbf{g}_\alpha^e (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\mu} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \operatorname{rot} \mathbf{g}_\alpha^e + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{g}_\alpha^e \right\} ds - \\ & - \int_L \left\{ i\omega (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) [\mathbf{g}_\alpha^e] - (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \left[\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{g}_\alpha^e \right] - \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{1}{\mu \epsilon} \operatorname{div} \mathbf{g}_\alpha^e \right] (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \right\} dl_M = E_\alpha(M_0); \\ & \quad M_0 \in V; \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

где $E_1 \equiv E_x$; $E_2 \equiv E_y$; $E_3 \equiv E_z$.

Для того чтобы интегралы по плоскости L тождественно обращались в нуль, достаточно потребовать выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} (g_{\alpha}^e)_{x,y}^+ &= (g_{\alpha}^e)_{x,y}^-; \quad \left(\frac{1}{\mu} (\text{rot } g_{\alpha}^e)_{x,y}\right)^+ = \left(\frac{1}{\mu} (\text{rot } g_{\alpha}^e)_{x,y}\right)^-; \\ \left(\frac{1}{\mu\epsilon} \text{div } g_{\alpha}^e\right)^+ &= \left(\frac{1}{\mu\epsilon} \text{div } g_{\alpha}^e\right)^- \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (30)$$

Выписав покомпонентно условия (30), придем к следующей системе условий на составляющие векторов $g_{\alpha}^e(M, M_0)$ ($\alpha = 1, 2, 3$):

$$[g_{1\alpha}^e] = 0; \quad (31)$$

$$[g_{2\alpha}^e] = 0; \quad (32)$$

$$\left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial g_{1\alpha}^e}{\partial z}\right] = \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial g_{3\alpha}^e}{\partial x}\right]; \quad (33)$$

$$\left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial g_{2\alpha}^e}{\partial z}\right] = -\left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial g_{3\alpha}^e}{\partial y}\right]; \quad (34)$$

$$\left[\frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial g_{3\alpha}^e}{\partial z}\right] = \left[\frac{1}{\mu\epsilon}\right] \left(\frac{\partial g_{1\alpha}^e}{\partial x} + \frac{\partial g_{2\alpha}^e}{\partial y}\right). \quad (35)$$

Иными словами, из условия тождественного обращения в нуль интегралов по плоскостям раздела вытекает пять граничных условий. В выборе шестого условия для однозначного определения матричных элементов имеется определенная свобода, которой можно распорядиться таким образом, чтобы максимально упростить матрицы фундаментальных решений. Например, можно потребовать непрерывности третьей строки матрицы, т. е.

$$[g_{3\alpha}^e] = 0.$$

Это условие, хотя оно и возможно, не упрощает остальных условий (31—35). Если же потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\left[\frac{1}{\mu} g_{3\alpha}^e\right] = 0, \quad (36)$$

то условия (33) и (34) принимают вид:

$$\left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial g_{1\alpha}^e}{\partial z} \right] = \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial g_{2\alpha}^e}{\partial z} \right] = 0,$$

что значительно упрощает матрицы фундаментальных решений, так как можно положить элементы $g_{21}^e, g_{12}^e, g_{13}^e, g_{23}^e$ равными нулю.

Таким образом, матрица фундаментальных решений $\widehat{G}_e(M, M_0)$ условиями (31—36) определяется однозначно и может быть эффективно построена. Аналогичную структуру будет иметь и матрица $\widehat{G}_m = (M, M_0)$, которая получается из $\widehat{G}_e(M, M_0)$ заменой μ на ε , а ε на μ .

Заметим, что фактически условия (31—36) сводятся к трем независимым системам из 4 уравнений на каждой границе разрыва параметров μ или ε .

Построение явных выражений для матричных элементов можно провести методом интегральных преобразований, используя, например, двойное преобразование Фурье по переменным x и y , применяемое к уравнениям и граничным условиям. При этом матричные элементы получаются в виде двойных интегралов (типа обратного преобразования Фурье), которые соответствующей заменой переменных сводятся к однократным интегралам. Можно воспользоваться непосредственно преобразованием Ханкеля по координате $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Получаемая в результате краевая задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений по координате z введением фундаментальной функции [2] сводится к уравнению Рикатти, которое легко решается в случае кусочно-постоянных параметров среды. Этот алгоритм наиболее удобен при большом количестве границ разрыва, так как дает рекуррентные формулы для расчета матричных элементов при различных положениях точек M и M_0 .

Для примера приведем явные выражения для матриц \widehat{G}_e и \widehat{G}_m в случае двухслойной среды (два полупространства, одна граница раздела; парамет-

ры μ_1, ε_1 при $z > 0$ и μ_2, ε_2 при $z < 0$):

$$\widehat{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix};$$

точки M и M_0 находятся в разных полупространствах:

$$g_{11} = g_{22} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \frac{2\mu_1\mu_2 e^{-\eta_1 h_1 - \eta_2 h_2}}{\mu_1\eta_2 + \mu_2\eta_1} \lambda d\lambda;$$

$$g_{33} = 2\mu(M) \varepsilon(M) \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \frac{e^{-\eta_1 h_1 - \eta_2 h_2}}{\varepsilon_1\eta_2 + \varepsilon_2\eta_1} \lambda d\lambda;$$

$$g_{31} = 2\mu(M) \frac{x - x_0}{\rho} g; \quad g_{32} = 2\mu(M) \frac{y - y_0}{\rho} q;$$

$$q = \int_0^{\infty} J_1(\lambda \rho) e^{-\eta_1 h_1 - \eta_2 h_2} \frac{\varepsilon_2 \mu_2 \eta_1^2 - \varepsilon_1 \mu_1 \eta_2^2}{(\mu_1\eta_2 + \mu_2\eta_1)(\varepsilon_1\eta_2 + \varepsilon_2\eta_1)} \frac{d\lambda}{\lambda};$$

$$h_1 \equiv |z|; \quad h_2 \equiv |z_0|.$$

Точки M и M_0 находятся в одном полупространстве:

$$g_{\alpha\alpha} = \mu(M_0) \frac{e^{ik(M_0) R_{MM_0}}}{R_{MM_0}} + \delta(M_0) q;$$

$$q = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) e^{-\eta(M_0)(h_1 + h_2)} \Phi_{\alpha}(\lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\eta(M_0)};$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\mu_1\eta_2 - \mu_2\eta_1}{\mu_1\eta_2 + \mu_2\eta_1}; \quad \Phi_3 = \frac{\varepsilon_1\eta_2 - \varepsilon_2\eta_1}{\varepsilon_1\eta_2 + \varepsilon_2\eta_1};$$

$$g_{31} = 2\mu(M_0) \frac{x - x_0}{\rho} q; \quad g_{32} = 2\mu(M_0) \frac{y - y_0}{\rho} q;$$

$$\delta(M_0) = \begin{cases} 1, & z_0 < 0, \\ -1, & z_0 > 0; \end{cases} \quad \eta_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2} \quad (j = 1, 2);$$

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Заменой μ на ε аналогичные представления получаются для элементов матрицы $\widehat{G}_m(M, M_0)$.

Теперь вернемся к рассмотрению исходной задачи.

Применим формулу (29) к векторам $\frac{\mathbf{E}}{\mu(M)}$ и $\mathbf{g}_\alpha^e(M, M_0)$ в каждой области с постоянными параметрами ε, μ вне области V и сложим. При этом в силу граничных условий на плоскостях разрыва μ и ε интегралы по этим плоскостям исчезнут и в результате получим следующее интегральное представление для декартовых компонент вектора \mathbf{E} :

$$E_\alpha(M_0) = \int_{V_1} \left\{ i\omega \mathbf{I} \mathbf{g}_\alpha^e - \frac{1}{\mu} \mathbf{I}' \operatorname{rot} \mathbf{g}_\alpha^e + \frac{P}{\varepsilon\mu} \operatorname{div} \mathbf{g}_\alpha^e \right\} d\tau_M - \\ - \int_S \left\{ i\omega (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \mathbf{g}_\alpha^e + \frac{1}{\mu} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \operatorname{rot} \mathbf{g}_\alpha^e + \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \operatorname{div} \mathbf{g}_\alpha^e \right\} ds_M. \quad (37)$$

Аналогично, применяя (8) к векторам $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{H}}{\varepsilon(M)}$; $\mathbf{Q} = \mathbf{g}_\alpha^m(M, M_0)$, получим интегральные представления для компонент напряженности магнитного поля:

$$H_\alpha(M_0) = \int_{V_1} \left\{ i\omega \mathbf{I} \mathbf{g}_\alpha^m + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I} \operatorname{rot} \mathbf{g}_\alpha^m + \frac{P'}{\varepsilon\mu} \operatorname{div} \mathbf{g}_\alpha^m \right\} d\tau_M + \\ + \int_S \left\{ i\omega (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \mathbf{g}_\alpha^m - \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \operatorname{rot} \mathbf{g}_\alpha^m - \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \operatorname{div} \mathbf{g}_\alpha^m \right\} ds_M. \quad (38)$$

Интегральные представления (37) и (38) для декартовых компонент полей можно записать в векторной форме, если ввести следующие операции:

$$\operatorname{div} \widehat{G} \equiv \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial z} \quad (\operatorname{div} \widehat{G} \text{ — вектор});$$

$$\operatorname{rot} \widehat{G} = \mathbf{l}_1 \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \right) + \mathbf{l}_2 \left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \right) + \\ + \mathbf{l}_3 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) \quad (\operatorname{rot} \widehat{G} - \text{тензор 2-го ранга}).$$

Окончательный результат сформулируем в виде теоремы, которая является обобщением соответствующего результата для однородной среды [16].

Теорема. Пусть в области T , ограниченной регулярной поверхностью S , выполнены уравнения Максвелла, условия сопряжения и условия на бесконечности. Тогда для всех точек M_0 внутри области T имеют место следующие представления:

$$\mathbf{E}(M_0) = \int_T \left\{ i\omega \mathbf{I} \widehat{G}_e - \frac{1}{\mu} \mathbf{I}' \operatorname{rot} \widehat{G}_e + \frac{P}{\varepsilon \mu} \operatorname{div} \widehat{G}_e \right\} d\tau - \\ - \int_S \left\{ i\omega (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \widehat{G}_e + \frac{1}{\mu} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \operatorname{rot} \widehat{G}_e + \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{div} \widehat{G}_e \right\} ds_M; \quad (39)$$

$$\mathbf{H}(M_0) = \int_T \left\{ i\omega \mathbf{I}' \widehat{G}_m + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{I} \operatorname{rot} \widehat{G}_m + \right. \\ \left. + \frac{P'}{\mu \varepsilon} \operatorname{div} \widehat{G}_m \right\} d\tau_M + \int_S \left\{ i\omega (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \widehat{G}_m - \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \operatorname{rot} \widehat{G}_m - \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \operatorname{div} \widehat{G}_m \right\} ds_M. \quad (40)$$

Здесь \mathbf{n} — вектор внешней нормали к объему T , а под произведением тензора на вектор понимается новый вектор, получаемый по обычным законам операторного исчисления.

Заметим, что этот результат действительно является обобщением формул Стрэттона — Чу (23) и (24), которые можно переписать в матричном (операторном) виде, если учесть, что:

$$G = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & g \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{rot} \widehat{G} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial g}{\partial x} \\ -\frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial x} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{div} \widehat{G} = \operatorname{grad} g (M, M_0), \quad g \equiv \frac{e^{ikR_{MM_0}}}{4\pi R_{MM_0}}.$$

Например:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_0) = & \int_V \left\{ i \omega \mu \mathbf{I} \widehat{G} - \mathbf{I}' \operatorname{rot} \widehat{G} + \frac{1}{\varepsilon} P \operatorname{div} \widehat{G} \right\} d\tau_M - \\ & - \int_S \{ i \omega \mu (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \widehat{G} + (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \operatorname{rot} \widehat{G} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) \operatorname{div} \widehat{G} \} ds_M. \end{aligned}$$

Отметим, что интегральные представления магнитных полей могут быть получены из леммы Лоренца и вытекающей из нее теоремы эквивалентности [17], путем построения полей источников, расположенных на границе области.

Относительно использования леммы Лоренца сделаем одно замечание. Хотя сама лемма носит достаточно общий характер и при пересчете полей с границы внутрь области принципиально могут быть использованы любые вспомогательные источники (в частности источники, электрическое поле, которых обращается в нуль на границе области), для получения интегральных уравнений выбор вспомогательных источников резко ограничен и практически лемма Лоренца дает только те интегральные уравнения, которые могут быть получены из обобщенной формулы Стрэттота — Чу. В этом смысле оба метода получения интегральных уравнений эквивалентны.

Но метод вспомогательных источников [17] полезен с физической точки зрения, а также удобен тем, что задачу представления электромагнитного поля в некоторой области разбивает на две: 1) построение полей вспомогательных источников,

которые удовлетворяют в рассматриваемой области уравнениям Максвелла с необходимыми граничными условиями; 2) запись самого интегрального представления с помощью полей вспомогательных источников (теорема эквивалентности). Таким образом, лемма Лоренца сама по себе не дает способа построения полей вспомогательных источников и не определяет однозначно их выбор. Напротив, формула Стрэттона — Чу и ее обобщения дают эффективный способ построения матриц фундаментальных решений и интегральные представления электромагнитных полей с помощью этих матриц.

§ 5. Численное исследование конкретных задач электроразведки

1. Численные исследования в методе частотного зондирования. Метод частотного зондирования (ЧЗ) применяется в структурной разведке для выявления характера залегания слоев осадочного чехла земной коры. Основной моделью здесь является слоистая среда. В качестве источника поля чаще всего используется горизонтальный электрический диполь, иногда вертикальный магнитный диполь. Измеряется поле на поверхности Земли в зависимости от частоты при различных расстояниях от источника поля. Частотная зависимость измеренного поля позволяет определить распределение проводимости по глубине (обратная задача частотного зондирования). Основой теории метода ЧЗ является исследование электромагнитных полей в слоистых средах. В НИВЦ МГУ широко разрабатывались методы расчета электромагнитных полей в слоистых средах, что позволило развить интерпретацию данных метода частотного зондирования. На рис. 1 приведен график зависимости ρ_m/ρ_1 нормированной вертикальной компоненты магнитного поля H_z , возбужденного горизонтальным электрическим диполем в четырехслойной среде. Параметры среды приведены на рисунке. Оцифровка кривых идет по относительному расстоянию r/H , где r расстояние от точки измерения до

диполя, а $H = \sum_i h_i$ — суммарная мощность слоев. Легко видеть, как по мере увеличения разности увеличивается разрешающая способность. Если при $r/H=2$ мы имеем типичную двуслойку, т. е.

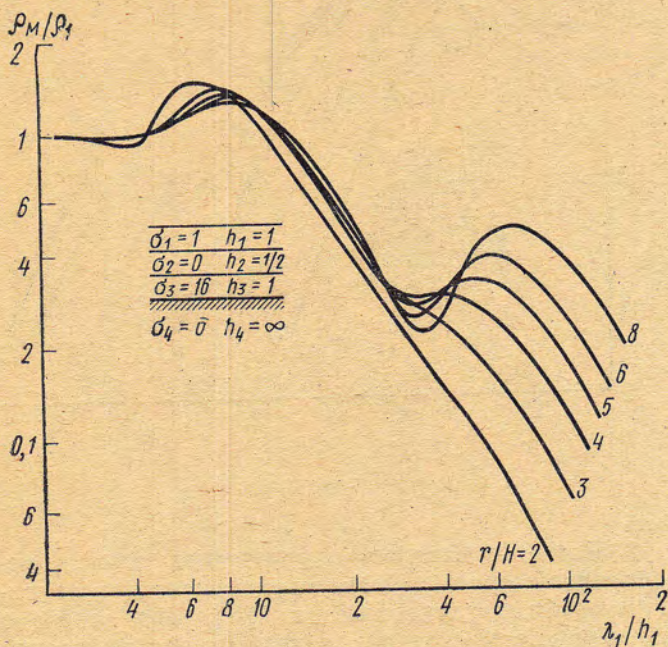


Рис. 1

первые три слоя усредняются, то при $r/H=6$ все три слоя разрешены и можно определить их параметры. На рис. 2 приведены аналогичные кривые для нормированного H_z для той же четырехслойной среды, но поле здесь возбуждено не горизонтальным электрическим, а вертикальным магнитным диполем. Здесь также видно влияние разности на разрешающую способность метода. На основе развитых методов в НИВЦ МГУ были проведены широкие расчеты кривых частотного

зондирования, изданы таблицы и альбомы рассчитанных кривых [18—21], что позволило резко улучшить интерпретацию полевых наблюдений.

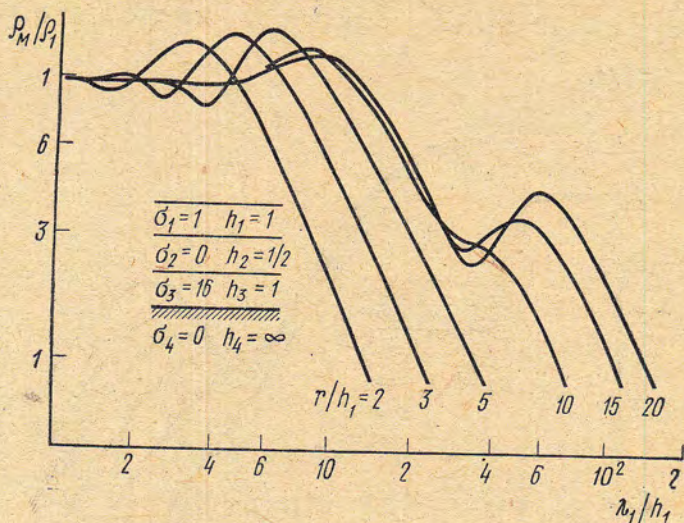


Рис. 2

2. Расчеты магнитотеллурического поля в неоднородной среде. Магнитотеллурическое зондирование было предложено в [22]. Оно основано на изучении частотной зависимости импеданса (отношения горизонтальной компоненты электрического поля к горизонтальной компоненте магнитного поля), измеренного на поверхности естественного электромагнитного поля Земли. В [23] было показано, что для слоистой среды по частотной зависимости импеданса можно восстановить распределение электропроводности Земли по глубине. Наличие неоднородностей в Земле приводит к искажению кривых магнитотеллурического зондирования. Встает вопрос: как, с одной стороны, избавиться от искажающего влияния неоднородностей при определении среднего распределения электропроводности с глубиной, а, с другой стороны, как использовать эту информацию для

определения местоположения и характера неоднородности в Земле? Для решения этой проблемы было проведено широкое математическое моделирование типичных геологических ситуаций. На

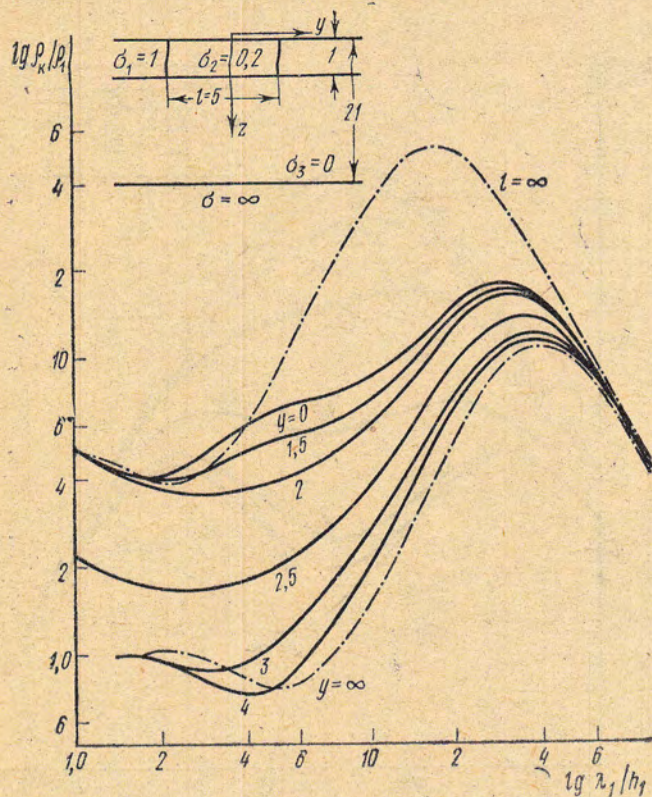


Рис. 3

этой основе было проведено численное исследование магнитотеллурического поля в неоднородных средах [24—28] и изданы альбомы палеток для магнитотеллурического зондирования (МТЗ) неоднородных сред [29—33].

Типичные палетки приведены на рис. 3—4. На рис. 3 даны кривые кажущегося сопротивления

ния (нормированный квадрат модуля импеданса) для трехслойной среды, когда в первом слое имеется включение с пониженным сопротивлением. Пунктирные кривые для слоистой среды без включения ($l = \infty$) или с бесконечно широким

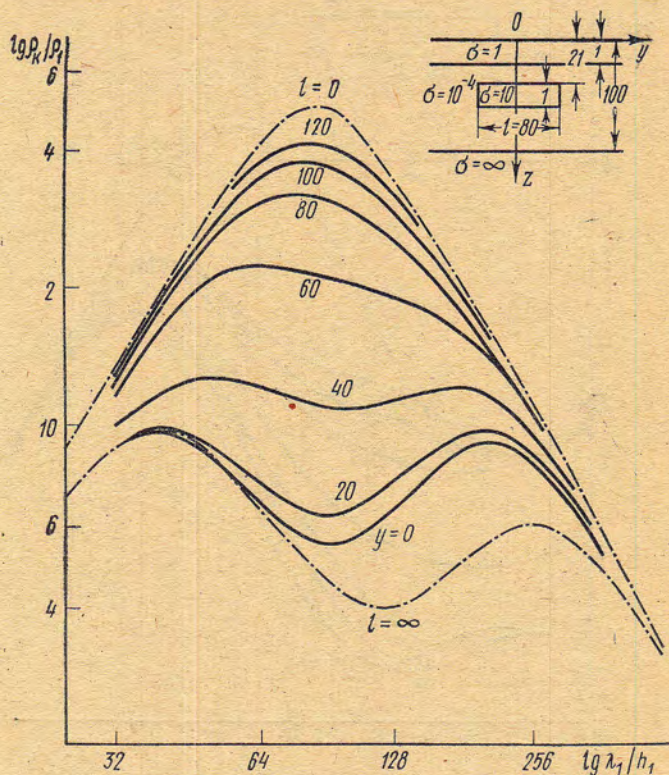


Рис. 4

включением ($l = 0$). Из сравнения кривых легко видеть искажающее влияние включения на кривые МТЗ. На рис. 4 приведены кривые МТЗ для случая, когда проводящая неоднородность находится во втором слое. Такая модель характерна для анализа возможности обнаружения конечных проводящих слоев, расположенных на большой

глубине в земной коре. Математическое моделирование МТЗ в типичных неоднородных средах позволило создать методы интерпретации МТЗ с учетом искажающего влияния поверхностных неоднородностей.

3. Численное исследование математических моделей теории рудной электроразведки. Основная задача рудной электроразведки состоит в изучении аномалий электромагнитных полей, порождаемых объектами рудного происхождения. По совокупности зависимостей аномального электромагнитного поля от пространственных координат и частоты поля определяют основные элементы залегания рудного тела и его электропроводность. Выбор оптимальной методики измерений, оценка глубинности электроразведочных методов основана на дальнейшем анализе электромагнитных полей вблизи источников аномалий с учетом слоистой структуры вмещающей среды. При этом большое значение имеет выбор класса математических моделей рудных объектов. В наших исследованиях в качестве моделей рудных объектов выбирались два класса моделей: а) идеально проводящая полоса, моделирующая объекты жильного типа; б) цилиндрическое тело прямоугольного сечения, моделирующее пласты конечной мощности. На основе метода интегральных уравнений для задач дифракции электромагнитных полей на телах, погруженных в слоистую среду, были разработаны эффективные вычислительные алгоритмы и программы, проведен подробный анализ результатов, применительно к различным модификациям рудной электроразведки [34—38].

На рис. 5 в качестве иллюстрации приведены данные расчета аномального поля H_y^a в зависимости от удаления неоднородности x/y , где $\kappa = |k|$, k — волновое число во вмещающей среде. Модель представляет собой вертикальный пласт конечной мощности, расположенный в проводящем полупространстве. Проводимость пласта — σ_2 , а вмещающего полупространства — σ_1 , кривые оцифрованы величиной $\gamma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$. На рисунке од-

новременен нанесены пунктирные кривые для случая, когда проводящее тело находится в однородном пространстве. Легко видеть влияние границы раздела «земля — воздух» на аномальное поле. На рис. 6 приведены те же результаты, но для случая горизонтального залегания пласта. Характер кривых при этом резко изменяется.

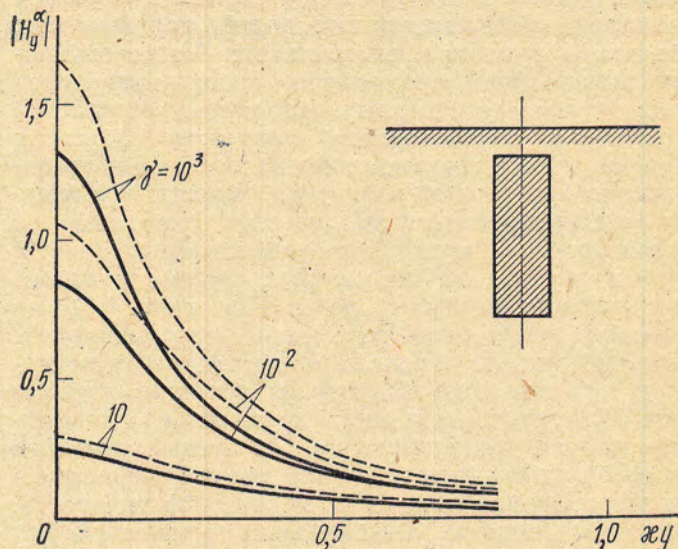


Рис. 5

Проведенные расчеты позволили существенно улучшить методику интерпретации данных индуктивных методов рудной электроразведки.

4. Численное исследование математических моделей электромагнитного каротажа неоднородных сред. Электромагнитный каротаж состоит в измерении электромагнитного поля на оси скважины в процессе перемещения каротажной установки (зонда) вдоль скважины. По каротажным диаграммам определяют свойства горных пород, пройденных скважиной. Для решения этой задачи необходим детальный анализ электромагнитных полей в неоднородных средах для различных

классов математических моделей, соответствующих реальным геолого-геофизическим условиям и темпам каротажных установок. Целью такого анализа могут быть количественная оценка разреша-

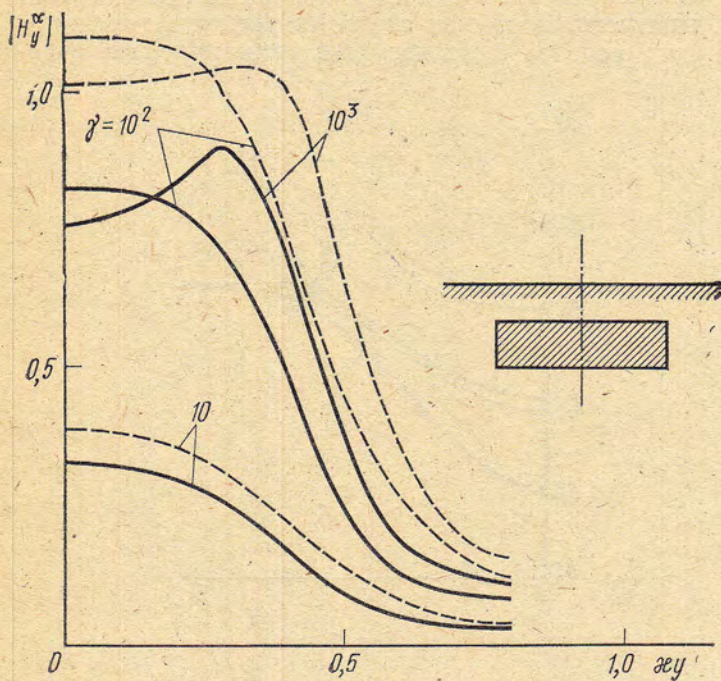


Рис. 6

ющей способности и глубинности электромагнитного каротажа, оптимизация методик измерения и параметров установок. Развитию эффективных вычислительных алгоритмов, созданию комплексов программ (на основе метода интегральных уравнений) для численного решения прямых задач теории электромагнитного каротажа неоднородных сред посвящены работы [40—42]. На основе развитых методов в НИВЦ МГУ был проведен широкий цикл исследований математических моделей электромагнитного каротажа с целью анализа

влияния различных факторов геоэлектрического строения среды на электромагнитное поле в скважине. В частности, было изучено влияние скважины, ограниченной мощности пластов, неоднородной структуры зоны проникновения промывочной жидкости. В рамках соответствующих математических моделей была получена количественная оцен-

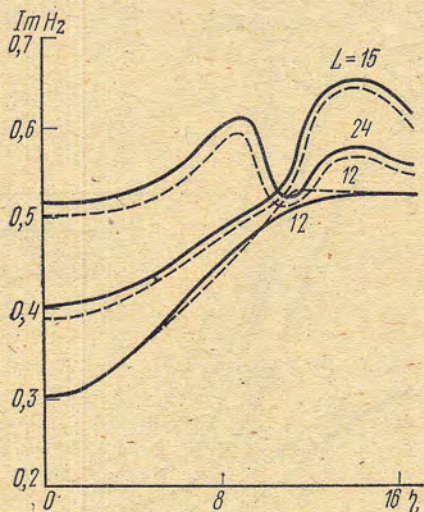


Рис. 7

ка разрешающей способности и глубинности методов индукционного и высокочастотного электромагнитного каротажа. Результаты численного анализа (и, в частности, кривых профилирования индукционного и высокочастотного каротажа для различных значений параметров среды) приведены в сборниках трудов НИВЦ МГУ [43—46].

Здесь в качестве иллюстрации приведены кривые профилирования двухкатушечными зондами различной длины компоненты H_z напряженности магнитного поля на оси скважины для двух типичных моделей строения среды: а) модель «скважина — пласт конечной мощности в однородных вмещающих породах» (рис. 7), б) модель «пласт с

зоной проникновения» (рис. 8). Основные параметры моделей нормированы на радиус скважины и проводимость бурового раствора.

Так как кривые профилирования симметричны относительно оси, проходящей через точку $z=L/2$ (L — нормированная длина двухкатушечного зонда)*, то приведена только одна ветвь кривых профилирования в зависимости от параметра $\eta = z -$

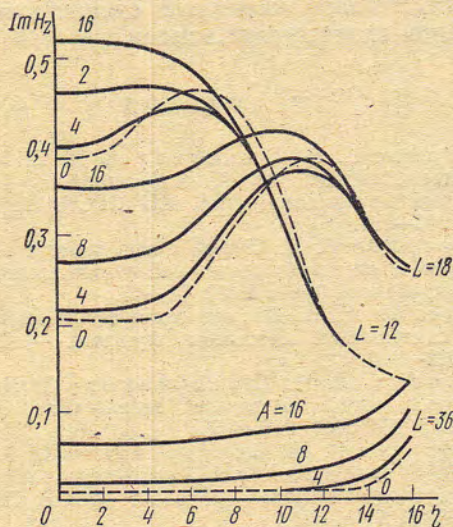


Рис. 8

$-L/2$. На рис. 7 представлена зависимость $\text{Im } H_z$ для слабо проводящего пласта ($\sigma=0.01$) во вмещающей среде с проводимостью $\sigma=0.5$ в сравнении с соответствующими зависимостями (пунктирные кривые) для плоскопараллельной слоистой среды. При этом модуль волнового числа $\kappa=0.2$, мощность пласта $H=10$, проводимость бурового раствора равна $\sigma_c=1$. Индексом кривых является длина зонда L . Зависимости, приведенные на рис. 8, иллюстрируют влияние радиального размера A зоны проникновения на кривые профилирования. В качестве предельной кривой выбрана кривая для одномерной модели слоистой среды

(пунктир) при отсутствии зоны проникновения ($A=0$). Кривые даны для случая слабо проводящего пласта ($\sigma=0.5$) с повышающей зоной проникновения ($\sigma=0.35$) и следующих параметров модели: проводимость вмещающей среды $\sigma=0.01$, модуль волнового числа равен 0.5, мощность пласта $H=10$. Проведенные расчеты позволили провести исследование по разрешающей способности различных методов каротажа скважин и выбору оптимальной конструкции зондов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. Метод расчета электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах.— «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1956, № 3, 245—251.
2. Дмитриев В. И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде.— «Вычислительные методы и программирование», 1968, № 10, 55—65.
3. Тихонов А. Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. — ДАН, 1959, 125, № 5, 982—985.
4. Тихонов А. Н., Шахсуваров Д. Н. Электромагнитное поле диполя в дальней зоне.— «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1959, № 7, 946—955.
5. Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. О высокочастотной асимптотике электромагнитного поля в слоистой среде.— «Изв. АН СССР. Сер. физика Земли», 1970, № 2, 44—51.
6. Дмитриев В. И. Осесимметричное электромагнитное поле в цилиндрической слоистой среде.— «Изв. АН СССР. Сер. физика Земли», 1972, № 11, 56—61.
7. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред.— «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», 1970, № 6, 1458—1464.
8. Дмитриев В. И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. М., Изд-во Моск. ун-та, 1969.
9. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Об интегральных уравнениях некоторого класса граничных задач электродинамики неоднородных сред.— «Вычислительные методы и программирование», 1971, № 16, 48—64.
10. Дробница В. В., Цецохо В. А. Метод расчета плоского электромагнитного поля в среде со слоем переменной толщины.— В кн. Мат. проблемы геофизики, вып. 2. Изд. «Наука» СО АН СССР, 1971, 251—284.
11. Соколов В. П., Табаровский Л. А. О расчете полей в скважине методом деформации путей в комплексной переменной интегрирования.— Препринт ИГиГ СО АН СССР, 1971.

12. Несмеянова Н. И. О построении фундаментальных решений для некоторых осесимметричных задач электродинамики слоистых сред.— В кн.: Численные методы в геофизике, вып. 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, 42—51.

13. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Решение некоторого класса интегральных уравнений на полупрямой.— «Вычислительные методы и программирование», 1965, № 3, 317—328.

14. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О численных методах решения некоторого класса дифракционных задач.— «Вычислительные методы и программирование», 1969, № 13, 139—144.

15. Stratton J. A., Chu L. J. Diffraction Theory of Electromagnetic Waves.— «Phys. Rev.», 1939, v. 56, p. 99—107.

16. Müller C. Grundprobleme der mathematischen Theorie electromagnetischer Schwingungen. «Springer», 1957.

17. Табаровский Л. А. Построение интегральных уравнений для задач дифракции методом вспомогательных источников. Изд-во СО АН СССР, 1971.

18. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Шахсуваров Д. Н. Таблицы амплитуд и фаз электромагнитного поля в слоистом пространстве, вып. 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1967.

19. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И., Скугаревская О. А. Таблицы амплитуд и фаз электромагнитного поля в слоистом пространстве, вып. 2. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968.

20. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. Таблицы амплитуд и фаз электромагнитного поля в слоистом пространстве, вып. 3. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968.

21. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И., Скугаревская О. А., Федорова Э. А. Таблицы амплитуд и фаз электромагнитного поля в слоистом пространстве, вып. 4. М., Изд-во Моск. ун-та, 1968.

22. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубинных слоев Земной коры.— ДАН, 1950, 73, № 2, 295—297.

23. Тихонов А. Н. К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований.— «Журн. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, 5, № 3, 545—548.

24. Дмитриев В. И. Метод расчета магнито-теллурического поля в неоднородном слое с произвольным изгибом нижней поверхности.— «Прикл. геофизика», 1965, № 41, 73—85.

25. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Кокотушкин Г. А. О влиянии локальных поверхностных неоднородностей на глубинное магнито-теллурическое зондирование.— «Вычислительные методы и программирование», 1973, № 20, 187—206.

26. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И. Влияние поверхностных неоднородностей на глубинное магнитотеллурическое зондирование.— «Вычислительные методы и программирование», 1969, № 13, 237—243.

27. Дмитриев В. И., Мерщикова Н. А. Исследование магнитотеллурического зондирования градиентных сред.— «Вычислительные методы и программирование», 1975, № 24, 123—130.

28. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Кокотушкин Г. А. Методы расчета магнитотеллурических полей в горизонтально неоднородных средах.— В кн.: «Магнитотеллурические поля в неоднородных средах». М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 5—52.

29. Дмитриев В. И., Кокотушкин Г. А. Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования в неоднородных средах. М., Изд-во Моск. ун-та, 1971.

30. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Кокотушкин Г. А. Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования в неоднородных средах, ч. II. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.

31. Дмитриев В. И., Кокотушкин Г. А. Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования в неоднородных средах, ч. III. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975.

32. Дмитриев В. И., Бердичевский М. Н., Кокотушкин Г. А. Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования в неоднородных средах, ч. IV. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975.

33. Дмитриев В. И., Таварткиладзе Ш. А. Альбом палеток для магнитотеллурического зондирования с учетом изменения рельефа земной поверхности, ч. V. М., Изд-во Моск. ун-та, 1975.

34. Дмитриев В. И. Решение основной задачи теории индукционного метода электроразведки.— «Изв. АН СССР. Сер. геофиз.», 1960, № 8, 1124—1134.

35. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Дифракция плоского электромагнитного поля на идеально проводящей полосе, погруженной в слоистую среду.— «Изв. АН СССР. Сер. физика Земли», 1967, № 5, 62—70.

36. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. О разрешающей способности индуктивных методов электроразведки.— «Изв. АН СССР. Сер. физика Земли», 1968, № 11, 88—93.

37. Дмитриев В. И., Барышникова И. А., Захаров Е. В. Проводящий пласт в среде конечного сопротивления в поле плоской электромагнитной волны.— «Изв. АН СССР. Сер. физика Земли», 1974, № 2, 66—71.

38. Дмитриев В. И., Барышникова И. А., Захаров Е. В. Аномальные электромагнитные поля пластовых тел. М., «Недра», 1977.

39. Захаров Е. В., Мелешкина Т. М. Алгоритм расчета аномальных электромагнитных полей системы пластовых тел, погруженных в слоистую среду.— В кн.: Численные методы в геофизике, вып. 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973, с. 52—73.

40. Дмитриев В. И., Захаров Е. В., Ильин И. В. О методе численного решения задачи индукционного каротажа в неоднородных средах.— «Изв. АН СССР. Сер. физика Земли», 1972, № 2, 50—58.

41. Захаров Е. В., Ильин И. В. О численном решении задачи высокочастотного электромагнитного каротажа неоднородных сред.— «Изв. АН СССР. Сер. физика Земли», 1976, № 11, 44—51.

42. Захаров Е. В., Несмеянова Н. И. Метод расчета осесимметричного электромагнитного поля в задачах каротажа неоднородных сред.— «Изв. АН СССР. Сер. физика Земли», 1977, № 7, 75—81.

43. Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1973.

44. Электромагнитный каротаж неоднородных сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1976.

45. Несмеянова Н. И. О методе численного решения задачи индукционного каротажа для модели «пласт-зона проникновения». — В кн.: Численные методы в геофизике, вып. 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 93—101.

46. Захаров Е. В., Ильин И. В. Расчет кривых профилирования индукционного каротажа для многокатушечных систем в модели «Скважина — пласт конечной мощности». — В кн.: Численные методы в геофизике, вып. 1. М., Изд-во Моск. ун-та, 1978, с. 74—92.