Министерство образования и науки Российской Федерации

УДК
ГРНТИ
Инв. №

УТВЕРЖДЕНО:
Исполнитель: **Государственное учебно-научное учреждение Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова**
От имени Руководителя организации **______________ / Моисеев Е. И./** **М.П.**

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ОТЧЕТ

о выполнении 1 этапа Государственного контракта
№ 16.740.11.0570 от 30 мая 2011 г.

Исполнитель: Государственное учебно-научное учреждение Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова
Программа (мероприятие): Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., в рамках реализации мероприятия № 1.3.1 Проведение научных исследований молодыми учеными - кандидатами наук.
Проект: Свойства дискретных функций и операций над ними
Руководитель проекта: **______________/Федорова Валентина Сергеевна** (подпись)

Москва
2011 г.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

по Государственному контракту 16.740.11.0570 от 30 мая 2011 на выполнение поисковых научно-исследовательских работ для государственных нужд

Организация-Исполнитель: Государственное учебно-научное учреждение Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Руководитель темы:

кандидат физико-математических наук, без ученого звания	________________________ подпись, дата	Федорова В. С.

Исполнители темы:

кандидат физико-математических наук, без ученого звания	________________________ подпись, дата	Ларионов В. Б.

Реферат

Отчет 31 с., 1 ч., 0 рис., 0 табл., 104 источн., 0 прил.

Многозначная логика , дискретная функция , замкнутый класс , бесповторная функция , самодвойственность , монотонность , предикат , решетка , алгоритм , расшифровка.

В отчете представлены результаты исследований, выполненных по 1 этапу Государственного контракта № 16.740.11.0570 "Свойства дискретных функций и операций над ними" (шифр "2011-1.3.1-111-001") от 30 мая 2011 по направлению "Проведение научных исследований молодыми кандидатами наук в следующих областях:- математика; - механика" в рамках мероприятия 1.3.1 "Проведение научных исследований молодыми учеными - кандидатами наук.", мероприятия 1.3 "Проведение научных исследований молодыми учеными - кандидатами наук и целевыми аспирантами в научно-образовательных центрах" , направления 1 "Стимулирование закрепления молодежи в сфере науки, образования и высоких технологий." федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы.

Цель работы - Получение результатов для решения задач для дискретных функций, связанных с доказательством свойств и формированием неверного образа, а также для построения надструктур некоторых семейств классов функций многозначной логики.

Информационный поиск в научных электронных библиотеках и электронных базах научно-информационных источников, сравнительный теоретический анализ постановок новых задач, соответствующих математических моделей и методов их исследования.

Научные электронные библиотеки http://www.e-library.ru/, http://www.sciencedirect.com/, http://www.acm.org/ и электронные базы научно-информационных источников http://springerlink.com/, http://www.oxfordjournals.org/. ПК под управлением ОС Microsoft Windows. Пакет офисных программ Microsoft Office.

1. Аналитический обзор основных направлений исследований.
2. План проведения исследований.
3. Научно-технический отчёт по первому этапу.

Содержание

1. Введение

В настоящее время большую актуальность приобретают вопросы, связанные с математическим анализом различных процессов, происходящих в вычислительных устройствах, в первую очередь дискретных. Область математики, изучающая соответствующий круг проблем, в отечественной традиции носит название *математической кибернетики*, а в зарубежной – *theoretical computer science*. В рамках математической кибернетики выделяют множество различных направлений, среди которых можно отметить следующие: теория функциональных систем, теория дискретных функций, теория алгоритмического обучения.

Теория функциональных систем – один из основных разделов дискретной математики и математической кибернетики. Она позволяет описывать строение и оперирование реальных управляющих систем, встречающихся в живой и неживой природе, технике, общественных институтах. Основными в любой функциональной системе являются проблемы полноты и выразимости, а также классификации элементов, описания замкнутых классов и их структуры. Многозначные логики являются одним из важнейших примеров функциональных систем, поэтому исследования, направленные на изучение свойств замкнутых классов k-значной логики, представляются весьма актуальными.

Также одним из интенсивно развивающихся направлений в современной математической кибернетике является теория алгоритмического обучения, среди важнейших задач которой можно назвать задачу расшифровки функций. Первым серьезным успехом в этом направлении стала задача о расшифровке монотонной функции, решенная в 1966 г. Ж. Анселем (G. Hansel). В дальнейшем тема параллельно разрабатывалась в советской и американской научных школах, наиболее яркими представителями которых являются, например, Д. Н. Гайнанов, Л. Валиант (L. G. Valiant), Д. Англуин (D. Angluin), Л. Хеллерштайн (L. Hellerstein).

Популярными объектами задач расшифровки являются бесповторные функции, то есть функции, выразимые формулами без повторений переменных. Большой вклад в изучение свойства бесповторности был внесен отечественной научной школой: А. В. Кузнецовым, В. А. Гурвичем, В. А. Стеценко.

В рамках проекта планируется выполнение следующих основных направлений работ, обладающих научной новизной и практической значимостью:

- Изучение надструктуры классов самодвойственных функций многозначной логики.

- Изучение надструктуры классов функций многозначной логики, являющихся обобщением классов самодвойственных функций.
- Изучение надструктуры класса однородных функций многозначной логики.
- Исследование надструктуры классов монотонных функций многозначной логики, сохраняющих частично упорядоченное множество специального вида.
- Исследование вопроса о том, может ли надструктура некоторых семейств классов монотонных функций многозначной логики содержать большое число классов, не являющихся предикатно-описуемыми.
- Нахождение новых семейств классов монотонных функций многозначной логики, обладающих бесконечной надструктурой.
- Разработка алгоритмов порождения монотонных дискретных функций, частично совпадающих с заданной.
- Доказательство повторности дискретных функций специального вида.

2. Анализ проблем, постановка задач и составление плана проведения исследований

2.1. Анализ актуальных проблем и направлений исследований, постановка задач

2.1.1. Аналитический обзор подходов, методов и результатов в теории классификации функций многозначной логики

В современной математике и технике булевы дискретные функции, безусловно, занимают важное место и используются как в теоретических, так и во многих прикладных областях. Всевозможные цифровые устройства, системы искусственного интеллекта, управляющие системы решают сложнейшие задачи, выполняя при этом элементарные двоичные операции и храня данные в виде нулей и единиц. Однако сложность решаемых задач, а следовательно, и технических устройств постоянно растет. Уже подходят к своему пределу многие технологические возможности (например, увеличение плотности элементов на схемах и повышение рабочей частоты). Применение многозначной логики и многозначных дискретных функций является одним из путей решения указанных проблем.

Многозначная логика предоставляет более широкие возможности для разработки алгоритмов во многих областях. Она позволяет уменьшить как вычислительную сложность, так и размеры, число соединений в различных арифметико-логических устройствах, повысить плотность размещения элементов на схемах, найти альтернативные методы решения различных задач (см., например, [1], [2], эта же работа в электронном виде [3]).

Уже сейчас многозначная логика с успехом применяется при решении многих задач и в технических разработках. Среди них flash-память, различные арифметические устройства, системы искусственного интеллекта и обработки данных, обработка сложных цифровых сигналов и т. д. (см., например, [4]). Успешно развивается элементная база для схем, работающих в более чем двух логических состояниях; разрабатываются специальные диоды, элементы, реализующие функции многозначной логики. Одним из подходов к созданию таких элементов является использование углеродных нанотрубок (см., например, [5]). В связи с бурным развитием нанотехнологий данное направление представляется весьма перспективным.

Одной из основных задач в многозначной логике является *проблема выразимости функций*: заданную k-значную функцию или класс функций требуется выразить, используя суперпозицию функций некоторого имеющегося множества. Указанную задачу, несколько уменьшив общность постановки, можно переформулировать в задачу описания всех *замкнутых относительно операции суперпозиции* классов функций k-значной логики, то есть таких классов, которые содержат любую функцию, представимую суперпозицией произвольных функций этого класса.

По данной тематике существует ряд работ, некоторые из которых стали классическими.

Следуя традиции, будем обозначать через P_k множество всех k-значных функций k-значной логики. Множество всех замкнутых классов в P_k, упорядоченных по отношению включения, будем называть *решеткой замкнутых классов* k-значной логики.

Задача описания всех замкнутых классов функций двузначной логики была решена Э. Постом (E. L. Post) в работах [6], [7]. Было показано, что в P_2 существует 66 замкнутых классов плюс 8 счетных цепочек классов, причем каждый из них имеет конечный *базис*, или минимальное порождающее множество функций. Пять предполных классов в P_2 (класс $\mathbf{L}$ линейных, $\mathbf{M}$ монотонных, $\mathbf{S}$ самодвойственных, $\mathbf{T_0}$ сохраняющих ноль, $\mathbf{T_1}$ сохраняющих единицу булевых функций) образуют *критериальную систему для разрешения проблемы полноты*. Это означает, другими словами, что произвольный класс булевых функций является полным тогда и только тогда, когда он целиком не содержится ни в одном из пяти вышеупомянутых предполных классов функций.

В более простой форме результаты Поста появились позднее в СССР и Франции [8], [9], [10], [11]. В дальнейшем рядом авторов были предложены различные подходы к изучению замкнутых классов булевых функций, а также несколько вариантов доказательств результатов Поста (в хронологическом порядке: С. В. Яблонский – [12], [13]; С. С. Марченков – [14]; Г. П. Гаврилов – [15], [16]; А. Б. Угольников – [17]; С. С. Марченков и А. Б. Угольников – [18]). Отметим результаты А. И. Мальцева, изложенные в работах [19], [20], предложившего алгебраический подход. В рамках этого подхода рассматривается так называемая *алгебра* – множество функций k-значной логики, замкнутое относительно некоторого набора операций, через которые выражается операция суперпозиции. В частности, было показано, что суперпозиция функций может быть выражена через следующие всюду определенные операции над функциями:

перестановка переменных, отождествление, приписывание несущественных переменных, бинарная суперпозиция.

В статье [21] С. В. Яблонским были описаны все 18 предполных классов в P_3. Им же в работе [22] описываются некоторые предполные классы в P_k и их свойства для произвольных k (также см. статью Е. Ю. Захаровой [23]). И. Розенбергом (I. G. Rosenberg) в [24] были окончательно описаны все предполные классы k-значной логики. Было показано, что они образуют шесть семейств. Сами классы описываются через множества сохраняемых ими предикатов. Детальное описание и свойства указанных семейств и соответствующих предикатов можно найти в работе [25] С. В. Яблонского, Г. П. Гаврилова, А. А. Набебина.

В статье Е. Ю. Захаровой, В. Б. Кудрявцева, С. В. Яблонского [26] была установлена асимптотика числа предполных классов в P_k. Оказалось, что это число растет очень быстро с ростом k, поэтому критериальная система из предполных классов для разрешения проблемы полноты, подобная которой используется в двузначной логике, является неэффективной. Но самые большие трудности в изучении решетки замкнутых классов k-значных функций выявил результат Ю. И. Янова, А. А. Мучника [27], где было доказано, что в P_k существуют замкнутые классы со счетным базисом, а также замкнутые классы, не имеющие базиса. Следствием этого результата является континуальная мощность множества замкнутых классов k-значных функций при $k \geq 3$. Оказалось, что полностью описать решетку классов в P_k для $k \geq 3$, как это было сделано для P_2, невозможно.

В связи с указанными выше трудностями работы по изучению решетки замкнутых классов в P_k для $k \geq 3$ разделились на *два направления*. Первое из них – разработка более сильных операторов замыкания, которые позволяли бы сжимать решетку замкнутых классов до счетного или конечного множества, которое уже возможно описать и исследовать. Второе направление – изучение различных подмножеств решетки замкнутых классов в P_k.

В работах, выполненных в рамках первого направления, постепенно сложился ряд требований, которым должны удовлетворять вновь создаваемые *сильные операторы замыкания*. Прежде всего, такие операторы (обозначим их символом О) должны либо явно, либо производным образом содержать классический оператор суперпозиции. Это позволяет хотя бы частично использовать развитую технику и многочисленные результаты, имеющиеся для оператора суперпозиции. Кроме того, О-замкнутые классы оказываются в этом случае замкнутыми относительно суперпозиции, что также дает возможность применять, например, теоремы о порождающих системах и базисах, полученные для суперпозиции.

Другим важным требованием к О-классификациям является их эффективность, т.е. возможность получить при любом k достаточно конструктивное описание всех О-замкнутых классов в P_k. На практике это требование оборачивается конечностью либо счетностью О-классификации множества P_k.

Имеется еще несколько требований в отношении нетривиальности (невырожденности) О-классификаций, в отношении языков задания О-классификаций и в отношении применяемых функциональных и логических средств.

С использованием различных подходов к настоящему времени определен ряд операторов замыкания, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям. Например, отметим работу А. В. Кузнецова [28], в которой вводится понятие параметрического замыкания и доказывается, что существует 25 параметрически замкнутых классов булевых функций. С. С. Марченковым в статье [29] изучается параметрическое и 1L-замыкание. S-замыкание, при котором каждый замкнутый класс наряду с функцией содержит и все двойственные ей функции, исследуется С. С. Марченковым и Нгуеном Ван Хоа в работах [30], [31], [32]. В книге [33] С. С. Марченковым описаны все S-замкнутые классы трехзначных функций. В статьях [34], [35] определяется эквациональное замыкание и доказывается, что в P_k существует конечное число эквационально замкнутых классов.

Сравнительно недавно в теории функций многозначной логики появилась идея использовать для задания оператора замыкания системы функциональных уравнений. С. С. Марченков и руководитель данного проекта В. С. Федорова предложили в статьях [36], [37], [38] новое отношение выразимости для функций многозначной логики – выразимость на основе систем функциональных уравнений. С использованием этого отношения был определен новый сильный оператор замыкания – оператор SFE-замыкания. Его отличительная особенность состоит в том, что функция, получаемая в результате применения оператора SFE-замыкания к заданной системе функций Q, представляет собой единственное решение системы функциональных уравнений, имеющих в качестве функциональных констант лишь функции системы Q. Исследования оператора SFE-замыкания, проведенные В. С. Федоровой в статье [39], показали, что при любом k число FE-замкнутых классов в P_k конечно. В частности, при $k = 2$ имеется ровно два таких класса, а при $k = 3$ – шесть. Было также замечено, что все найденные SFE-замкнутые классы являются классами функций, самодвойственных относительно подходящих групп перестановок.

Ряд работ посвящен описанию операторов замыкания с дополнительными операциями программного типа. К таким работам относятся статьи В. Д. Соловьева [40] и В. А. Тайманова [41], где вводится операция разветвления по предикату, описываются все замкнутые с использованием указанной операции классы в P_k, доказывается, что их конечное число. Другие операторы замыкания описаны в работах [42], [43], [44], [45]. Большая часть этих операторов позволяет сжать решетку замкнутых классов k-значных функций до конечного множества.

Многие отечественные и зарубежные исследователи работали и работают в рамках второго из упомянутых направлений. В работе [24] И. Розенбергом изучен первый уровень решетки замкнутых классов функций k-значной логики, то есть все предполные классы этой решетки. Было показано, что их можно объединить в шесть семейств, различаемых по типу сохраняемых отношений. В его же работе [46] изучается второй уровень решетки в P_k: замкнутые классы функций k-значной логики, которые предполны в предполных классах. В случае k = 3 в статье Д. Лау (D. Lau) [47] второй уровень решетки замкнутых классов функций трехзначной логики описан полностью: их оказалось ровно 158, причем подрешетка пяти из них конечна, еще семи – счетна, а подрешетка остальных – континуальна.

Все *минимальные клоны* в P_k (то есть минимальные замкнутые классы, содержащие все функции вида $f(x_1,\dots,x_n) = x_i,\quad i\in\{1,\dots,n\}$ – так называемые *селекторные функции*) описаны в работе уже упоминавшегося И. Розенберга [48]. Они разделены автором на пять семейств, и доказано, что при фиксированном k их конечное число.

Структура классов самодвойственных функций трехзначной логики, расположенных между классом всех тождественных функций и классом всех функций, самодвойственных относительно подстановки x + 1 по модулю 3, изучалась в совместной статье С. С. Марченкова, Я. Деметровича и Л. Ханнака [49]. Были построены не все классы, а лишь те, которые переходят в себя при любом автоморфизме, все минимальные и все, содержащие некоторые специальные функции. Исполнителем работ по данному проекту В. Б. Ларионовым в работах [50], [51] было начато исследование некоторых классов функций многозначной логики, содержащих заданный класс самодвойственных функций.

В статье [52] A. Szendrei исследовал подструктуру классов линейных функций k-значной логики. Она была полностью описана в случае, когда число k свободно от квадратов, и доказано, что в противном случае подструктура классов линейных функций является бесконечной. Г. А. Бурле в работе [53] описал замкнутые классы в P_k, содержащие все функции одной переменной: оказалось, что они образуют цепочку, состоящую из m = k + 1 вложенных друг в друга классов.

Принципиальная возможность существования замкнутых классов монотонных функций многозначной логики с бесконечной надструктурой была доказана В. Б. Ларионовым в работах [54], [55], [56]. Как было показано в статье того же автора [57], минимальной логикой с такими классами функций является четырехзначная логика P_4. В статье [58] изучены свойства надструктуры классов монотонных функций, порожденных несвязным частично упорядоченным множеством, в работах [59], [60] был получен критерий наличия бесконечной надструктуры классов монотонных функций, сохраняющих частично упорядоченные множества с одним минимальным и двумя максимальными, двумя минимальными и одним максимальным, двумя минимальными и двумя максимальными элементами.

Достаточно большое количество работ посвящено изучению надструктуры класса полиномов. В уже упоминавшейся статье С. В. Яблонского [22] было показано, что для простого k любая k-значная функция может быть представлена полиномом по модулю k, то есть класс полиномов при указанном k совпадает со всем P_k. Там же было доказано, что при составном k класс полиномов не является даже предполным. А. А. Нечаевым в работе [61] описаны все предполные классы, содержащие класс полиномов.

А. Н. Череповым в работах [62], [63] и Д. Г. Мещаниновым в [64] была полностью описана надструктура класса полиномов при составном k, свободном от квадратов, а также при $k = p_1^2 \cdot p_2$, где p_1, p_2 – простые числа. В статье [65] Д. Г. Мещаниновым были установлены необходимые и достаточные условия представимости k-значной функции полиномом по модулю k, а также приведен алгоритм построения такого полинома для произвольной k-значной функции. А. Б. Ремизов в статье [66] показал, что при $k = p_1^3 \cdot p_2$, где p_1, p_2 – простые числа, существует бесконечная цепочка содержащих друг друга различных замкнутых классов, каждый из которых содержит класс полиномов. Для числа k, свободного от кубов, в той же статье была построена решетка классов между классом полиномов и пересечением всех предполных классов, содержащих класс полиномов. Было доказано, что эта решетка изоморфна s-мерному кубу, где s – число квадратов в разложении числа k. Данные результаты свидетельствует о сложности надструктуры класса полиномов в общем случае.

В статье [67] С. С. Марченковым были описаны все классы k-значной логики, содержащие *дуальный дискриминатор*, то есть функцию:

$$d(x,y,z)=\begin{cases} x, & \text{если } x=y,\\ z, & \text{если } x\neq y.\end{cases}$$

Отметим, что конечность множества подобных классов следует из работы К. Бейкера (K. A. Baker), А. Пиксли (A. F. Pixley) [68]. В статье [69] С. С. Марченков описал все 144 замкнутых класса функций трехзначной логики, содержащие *тернарный дискриминатор*, то есть функцию:

$$p(x,y,z)=\begin{cases} z, & \text{если } x=y,\\ x, & \text{если } x\neq y.\end{cases}$$

В работах G. Burosch, J. Dassow, W. Harnau, Д. Лау [70] и Д. Лау [71], [72] рассматриваются подклассы класса $P_{k,\ell}=\{f\in P_k,\ \ f(\tilde{x})\in\{0,1,\dots,\ell-1\}\text{ для любого }\tilde{x}\}$. Для каждой функции из $P_{k,\ell}$ определяется *проекция* – функция из P_ℓ, получающаяся сужением области определения до E_ℓ^n. Изучается вопрос о мощности множества I(A) классов такого, что I(A) $\subseteq$ $P_{k,2}$ и проекция любого класса из I(A) равна A.

К смежному направлению относится исследование решетки замкнутых классов частичных функций P_k^*. В работе [73] Р. Фрейвальдом была решена проблема полноты для случая k = 2, а затем Б. А. Ромовым в [74] – для остальных k. В статье [75] исследовалась надрешетка в P_2^* предполных классов из P_2. Подробный обзор изучения решетки замкнутых классов частичных k-значных функций приведен в современной монографии Д. Лау [76].

Еще одним близким направлением является исследование решетки *вектор-функций,* то есть функций вида $f:E^n\to E^m$. В. А. Тайманов в уже упоминавшейся статье [41] описал все замкнутые классы вектор-функций двухзначной логики P_2^k. Б. А. Ромов в цикле статей [77], [78], [79], [80] получил альтернативное описание указанных классов, перенес результаты теории Галуа на прямые произведения алгебр Поста, описал все минимальные k-основные предикаты.

В проекте предполагается в рамках второго направления получить результаты о строении фрагментов решетки замкнутых классов k-значных функций при k $\geq$ 3. В качестве основного инструмента исследований по данной тематике был выбран предикатный подход, но также широко применяются теория Галуа, аппарат теории графов, элементы теории частичного порядка, алгебраические свойства групп подстановок.

Отношение сохранения предиката функцией было определено А. В. Кузнецовым в книге [81]. В работе [82] он указывал на возможность построения теории Галуа для решетки замкнутых классов булевых функций. Само построение теории Галуа для решетки замкнутых классов k-значных функций независимо провели В. Г. Боднарчук, Л. А. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов в [83] и Д. Гейгер (D. Geiger) в [84] (см. также книгу С. С. Марченкова [85]). Ими был установлен антиизоморфизм между частично упорядоченным множеством замкнутых классов k-значных функций, содержащих все селекторные функции, и частично упорядоченным множеством замкнутых относительно некоторых операций классов предикатов, содержащих все диагонали. Этот результат позволил изучать решетку замкнутых классов функций новым методом: сначала устанавливаются требуемые свойства для решетки замкнутых классов предикатов, а затем, используя антиизоморфизм, указанные свойства переносятся на решетку замкнутых классов функций. Отметим в этой области статью С. С. Марченкова [86], в которой с помощью такой техники доказана минимальность предикатов, задающих предполные классы в P_k при $k \geq 2$.

С. В. Яблонским в работе [87] рассмотрена связь предикатной описуемости замкнутого класса функций многозначной логики со строением его верхней окрестности в решетке замкнутых классов. Было доказано, что если класс не является предикатно-описуемым, это эквивалентно тому, что в решетке замкнутых классов над ним находится бесконечное число минимальных надклассов или бесконечная цепочка замкнутых классов. Таким образом, свойство предикатной неописуемости свидетельствует о значительной сложности надструктуры данного класса.

Среди шести семейств предполных классов в P_k при $k \geq 3$, установленных И. Розенбергом в [24], существуют два, обозначаемые через **M** и **S** и являющиеся подмножествами соответственно множеств всех монотонных и самодвойственных классов функций k-значной логики.

В статье [88] В. В. Мартынюком установлено, что класс монотонных функций многозначной логики, сохраняющих некоторый частичный порядок, принадлежит семейству **M** (то есть является предполным) тогда и только тогда, когда указанный частичный порядок имеет в точности единственный минимальный и единственный максимальный элементы. В работе [22] С. В. Яблонским доказано, что класс функций, самодвойственных относительно некоторой подстановки, принадлежит семейству **S** тогда и только тогда, когда указанная подстановка разлагается в произведение циклов одинаковой длины, являющейся простым числом.

Понятно, что классы монотонных и самодвойственных функций многозначной логики, не входящие в два упомянутых семейства, близки по своим свойствам к предполным классам, что делает их весьма важным и интересным объектом изучения.

Отсюда естественным образом возникает вопрос: какое положение в решетке замкнутых классов занимают классы монотонных, самодвойственных и близких к ним функций, которые не являются предполными?

В работах проекта планируется описать структуру и основные свойства надрешетки некоторых семейств классов монотонных функций k-значной логики, а также функций, близких по своим свойствам к самодвойственным при произвольном $k \geq 3$.

2.1.2. Аналитический обзор подходов, методов и результатов в теории бесповторных функций и задачах расшифровки дискретных функций

Одним из интенсивно развивающихся направлений в современной дискретной математике является теория алгоритмического обучения, среди важнейших задач которой можно назвать *задачу расшифровки функций*. Суть ее заключается в следующем. Пусть фиксирован некоторый класс функций, для определенности булевых, и имеется черный ящик, в котором «содержится» некоторая неизвестная функция из этого класса. Требуется, задавая вопросы типа «Какое значение принимает неизвестная функция на данном входном наборе?», определить, какая именно функция находится в черном ящике. Предполагается, что каждый следующий вопрос может зависеть от ответов на предыдущие. Обычно под задачей расшифровки понимают именно эту ее интерпретацию. Одной из классических задач такого рода является задача расшифровки монотонных булевых функций, решенная в 1966 году Ж. Анселем (G. Hansel) [89]. С тех пор задача параллельно рассматривается в различных моделях расшифровки для функций из разных классов в советской (а затем российской) и американской научных школах.

Зарубежные исследователи пришли к таким постановкам в рамках вычислительной теории обучения (computational learning theory). Основная рассматриваемая в этой теории задача – точная идентификация неизвестного объекта из заранее известного класса. Алгоритм идентификации в данном случае имеет возможность выполнять запросы разных (вообще говоря) типов, предусматриваемых конкретной постановкой задачи. Рассматриваются, в частности, стандартные запросы значения функции в точке («точечные запросы», известные также как запросы принадлежности – membership queries). Возможная интерпретация заключается в том, что алгоритм взаимодействует с одним или несколькими *оракулами* – специальными агентами, каждый из которых обладает возможностью отвечать на вопросы одного конкретного типа. Оракулы в детерминированных постановках чаще всего считаются «непогрешимыми», то есть никогда не ошибающимися. Постановки такого типа тоже можно считать задачами расшифровки с возможностью обращаться к оговоренному набору оракулов.

Один из первых важных результатов в данной области принадлежит Л. Валианту (L. G. Valiant), который в 1984 году доказал [90], что задача расшифровки бесповторных в элементарном базисе функций допускает решение полиномиальным числом запросов трех специальных типов (запросы одного из этих типов являются обобщением стандартных точечных запросов). В той же работе предложена задача вероятностной расшифровки, известная также как probably approximately correct learning.

В 1987 г. Д. Англуин (D. Angluin) в статье [91] ввел в рассмотрение модель расшифровки с так называемыми запросами эквивалентности. *Запрос эквивалентности* позволяет выяснить, может ли находящаяся в черном ящика функция быть выражена некоторой формулой, которая подается на вход в качестве параметра запроса. Результатом такого запроса является ответ «да», фактически означающий окончание расшифровки, либо контрпример – пример входного набора, на котором неизвестная функция и функция, выражаемая запрашиваемой формулой, принимают разные значения. Такая модель расшифровки с помощью запросов эквивалентности и точечных запросов является классической для теории обучения с помощью запросов. После этого Д. Англуин, Л. Хеллерштейн (L. Hellerstein) и М. Карпински (M. Karpinski) в работе [92] установили возможность расшифровки бесповторных в элементарном базисе функций с использованием полиномиального числа запросов двух типов – стандартных точечных запросов и запросов эквивалентности. В уже упомянутой статье [92] содержится и подробное обсуждение того, какую роль играют запросы эквивалентности в теории обучения, а также описываются возможные способы их реализации в различных приложениях.

Алгоритм Д. Англуин, Л. Хеллерштейн и М. Карпински использует линейное относительно числа переменных число запросов эквивалентности и кубическое число точечных запросов. В той же работе установлена возможность расшифровки бесповторных в базисе из конъюнкции и дизъюнкции функций с использованием квадратичного числа точечных запросов, при этом запросы других типов не требуются. Обобщение метода расшифровки для элементарного базиса на случай базиса всех функций k переменных для произвольного натурального k получено в работе Н. Бшаути (N. H. Bshouty), Т. Ханкока (T. R. Hancock) и Л. Хеллерштейн [93]. Предложенный алгоритм использует полиномиальное число стандартных точечных запросов и линейное число запросов эквивалентности. В той же работе описана специальная модификация этого алгоритма, применимая в случае бесконечного базиса всех симметрических булевых функций.

С осуществлением принципиальных прорывов в возможностях вычислительной техники появились и новые направления в задаче о расшифровке функций, например развиваемые в работах таких авторов как A. Blum, M. Furst, J. Jackson, M. Kearns, Y. Mansour и S. A. Rudic [94], А. А. Вороненко [95], R. Uehara, K. Tsuchida и I. Wegener [96].

В проекте предполагается рассмотреть новую задачу типа расшифровки: задачу порождения неверного образа функции на основе исходно неверного предположения партнера о принадлежности ее какому-либо определенному классу и передачи ему верной информации о ее значениях в точках. Полученные результаты могут найти применение в системах защиты информации.

Частыми объектами задач расшифровки, как можно понять из вышеизложенного, являются *бесповторные функции*, то есть функции, которые можно выразить формулами без повторений переменных. В данном определении неявным образом фигурирует *базис* – множество «исходных» функций, на основе которых строятся формулы. Традиционно в качестве базиса рассматривается так называемый *элементарный* базис, состоящий из конъюнкции (логическое И), дизъюнкции (логическое ИЛИ) и отрицания, а также базис из конъюнкции и дизъюнкции. Выражение «бесповторная функция» обычно уточняется следующим образом: функция, бесповторная в некотором (заранее заданном) базисе. Иногда используется также термин «бесповторная функция» в смысле «функция, бесповторная в элементарном базисе», а также термин «монотонная бесповторная функция» в смысле «функция, бесповторная в базисе из конъюнкции и дизъюнкции».

Легко заметить, что даже в случае элементарного базиса задача расшифровки бесповторных функций без дополнительных возможностей и ограничений является вырожденной: всякий алгоритм расшифровки функции n переменных обязан хотя бы в одном случае задать все возможные 2^n вопросов. Действительно, чтобы отличить константу 0 от всевозможных элементарных конъюнкций, зависящих от n переменных и принимающих значение 1 лишь на одном наборе, требуется перебрать все возможные наборы значений переменных. Таким образом, в этой области возникает проблема нахождения невырожденных постановок задач, которую обычно преодолевают путем введения дополнительных возможностей или специальных ограничений, а иногда – и того и другого одновременно.

Одним из первых утверждений теории бесповторных функций была теорема А. В. Кузнецова о конечной полной системе тождеств для бесповторных формул, доказанная в статье [97]. Исследованию математических свойств и возможных приложений бесповторных в этих базисах функций посвящены известные как в нашей стране, так и за рубежом классические работы В. А. Гурвича [98], [99]. Связь между бесповторными функциями различного числа переменных обсуждалась в статье А. А. Вороненко [100], а однозначное представление бесповторных функций в более широких базисах получено в статье того же автора [101].

Из относительно недавних работ также можно отметить монографию А. А. Шалыто [102], а также совместную статью иностранных авторов J. Goldsmith, R. H. Sloan, B. Szorenyi, G. Turan [103], в которых подробно описывается применение бесповторных функций.

Представляется интересным получить обоснование повторности функции, исходя из информации о ее значениях лишь на нескольких наборах, поэтому в проекте предполагается рассмотреть новую эквивалентную формулировку свойства повторности в элементарном базисе и с ее помощью построить короткое обходное доказательство критерия Стеценко [104] для минимальных (по отношению «быть подфункцией») повторных функций.

2.2. Составление плана проведения исследований

План второго этапа:

1. Изучение надструктуры классов функций многозначной логики специального вида, являющихся некоторым обобщением классов самодвойственных функций, – так называемых квазисамодвойственных функций. Доказательство конечности надструктуры таких классов функций.
2. Публикация в трудах научной конференции, содержащая результаты решения исследуемых задач.
3. Обоснование повторности дискретной функции с использованием информации о ее значениях лишь на некоторых наборах. Доказательство новой эквивалентной формулировки свойства повторности в элементарном базисе, построение с ее помощью короткого обходного доказательства критерия Стеценко для минимальных по отношению «быть подфункцией» повторных функций.
4. Публикация статьи, содержащей результаты решения исследуемых задач, в высокорейтинговом российском или зарубежном журнале.
5. Подготовка научно-технического отчета по итогам второго этапа.

План третьего этапа:

6. Описание структуры и основных свойств надрешетки произвольного класса квазисамодвойственных функций многозначной логики.
7. Публикация в трудах научной конференции, содержащая результаты решения исследуемых задач.
8. Полное описание всех классов (и их взаимных включений), содержащих произвольный класс самодвойственных функций многозначной логики. Изучение основных свойств надструктуры класса самодвойственных функций многозначной логики.
9. Публикация статьи, содержащей результаты решения исследуемых задач, в высокорейтинговом российском или зарубежном журнале.
10. Подготовка научно-технического отчета по итогам третьего этапа.

План четвертого этапа:

11. Полное описание надструктуры класса однородных функций многозначной логики, изучение основных свойств этой надструктуры.
12. Публикация статьи, содержащей результаты решения исследуемых задач, в высокорейтинговом российском или зарубежном журнале.
13. Доказательство критерия наличия бесконечной надструктуры для классов монотонных функций многозначной логики, сохраняющих частично упорядоченное множество с тремя максимальными и одним минимальным или с тремя минимальными и одним максимальным элементом.
14. Публикация в трудах научной конференции, содержащая результаты решения исследуемых задач.
15. Подготовка научно-технического отчета по итогам четвертого этапа.

План пятого этапа:

16. Исследование вопроса о том, может ли надструктура некоторых семейств классов монотонных функций многозначной логики содержать большое число классов, не являющихся предикатно-описуемыми. Построение таких классов в надрешетке некоторых семейств классов монотонных функций многозначной логики.
17. Публикация статьи, содержащей результаты решения исследуемых задач, в высокорейтинговом российском или зарубежном журнале.
18. Подготовка научно-технического отчета по итогам пятого этапа.

План шестого этапа:

19. Изучение условий, достаточных для наличия бесконечной надструктуры у некоторых семейств классов монотонных функций многозначной логики, сохраняющих частично упорядоченное множество с единственным минимальным элементом. Описание новых семейств классов монотонных функций многозначной логики, обладающих бесконечной надструктурой.
20. Публикация статьи, содержащей результаты решения исследуемых задач, в высокорейтинговом российском или зарубежном журнале.
21. Решение задачи создания неверного образа монотонной дискретной функции на основе неверного предположения о ее монотонности и верной

информации о значениях в точках. Описание алгоритмов порождения монотонных дискретных функций, частично совпадающих с заданной.

22. Публикация статьи, содержащей результаты решения исследуемых задач, в высокорейтинговом российском или зарубежном журнале.

23. Подготовка итогового научно-технического отчета.

3. Заключение

В рамках первого этапа работ по Государственному контракту выполнены следующие исследования в соответствии с планом:

1. Изучено современное состояние теории дискретных функций. Проведена работа с оригинальными публикациями отечественных и зарубежных авторов. Изучены постановки новых задач, соответствующие математические модели и методы их исследования.

2. Подготовлен аналитический обзор основных направлений исследований в математике, связанных с дискретными функциями; составлен перечень наиболее актуальных проблем в этой области; описаны возможные методов решения исследуемых проблем.

3. Определен оптимальный вариант направления исследований и составлен план проведения исследований.

4. Подготовлен научно-технический отчет по первому этапу, включающий в себя следующие части:

    1) анализ актуальных проблем и направлений исследований, постановка задач: аналитический обзор подходов, методов и результатов в теории классификации функций многозначной логики, аналитический обзор подходов, методов и результатов в теории бесповторных функций и задачах расшифровки дискретных функций; в том числе перечень наиболее актуальных проблем в этой области и описание возможных методов их решения;

    2) детализированный план проведения исследований.

План проведения исследований первого этапа выполнен полностью.

4. Список использованных источников

1. http://www.multivaluedlogic.com
2. Калинников В. А. Применение многозначной логики в цифровой технике. Изд. отдел Объединенного института ядерных исследований, 2006.
3. http://www1.jinr.ru/Preprints/2005/217(P13-2005-217).pdf
4. http://web.cecs.pdx.edu/~mperkows/ISMVL/==applicati-ons.html
5. http://www.omnibaselogic.com
6. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. Volume 43, № 4. P. 163–165.
7. Post E. L. Two valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1951. V. 5.
8. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.
9. Benzaken C. Definitions et proprieties de certains familles de fonctions booleennes croissantes // C. R. Acad. Sci. Paris. 1964. T. 259, group I. P. 1369–1371.
10. Benzaken C. Les familles de fonctions booleennes deduites de certaines familles de fonctions booleennes croissantes. Criteres de determinatiou de l’indice d’une function croissante // C. R. Acad. Sci. Paris. 1965. T. 260, group I. P. 1528–1531.
11. Kuntzman J. Algebre de Boole. Paris Dunod, 1965.
12. Яблонский С. В. О замкнутых классах в P_2 // Проблемы кибернетики, вып. 39. М.: Наука, 1982. С. 262.
13. Яблонский С. В. О некоторых результатах в теории функциональных систем // Труды Международного конгресса математиков, Хельсинки, 1978. С. 963–971.
14. Марченков С. С. К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 1. С. 88–99.
15. Гаврилов Г. П. Индуктивное представление булевых функций и конечная порождаемость классов Поста // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 1. С. 3–26.
16. Гаврилов Г. П. Функциональные системы дискретной математики. М.: Изд-во МГУ, 1985.
17. Угольников А. Б. О замкнутых классах Поста // Известия вузов. Математика. 1988. № 7. С. 79–88.
18. Марченков С. С., Угольников А. Б. Замкнутые классы булевых функций. М.: Изд-во ИПМ Академии наук СССР, 1990.

19. Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 2. С. 5–24.
20. Мальцев А. И. Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Издательство НГУ, 1976.
21. Яблонский С. В. О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады Академии наук СССР. 1954. Т. 95, № 6. С. 1153–1156.
22. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического института имени В. А. Стеклова Академии наук СССР. 1958. Т. 51. С. 5–142.
23. Захарова Е. Ю. Критерий полноты системы функций из P_k // Проблемы кибернетики. 1967. № 18. С. 5–10.
24. Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1965. Volume 260. P. 3817–3819.
25. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А. Предполные классы в многозначных логиках. Издательский дом МЭИ, Москва, 1997.
26. Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В. О предполных классах в k-значной логике // Доклады Академии наук СССР. Т. 186, № 3. С. 509–512.
27. Янов Ю. И., Мучник А. А. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // Доклады Академии наук СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44–46.
28. Кузнецов А. В. О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости. Логический вывод, М.: Наука, 1979. С. 5–33.
29. Марченков С. С. О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискретная математика. 1999. Т. 11, № 4. С. 110–126.
30. Марченков С. С. S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. 1997. Т. 9, № 3, С. 125–152.
31. Нгуен Ван Хоа О семействах замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5, № 4. С. 87–108.
32. Нгуен Ван Хоа О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3 // Дискретная математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 82–95.
33. Марченков С. С. S-классификация функций трехзначной логики. Физматлит, Москва, 2001.
34. Марченков С. С. Эквациональное замыкание // Дискретная математика. 2005. Т. 17, № 2. С. 117–126.

35. Марченков С. С. О строении эквационально замкнутых классов // Дискретная математика. 2006. Т. 18, № 4. С. 18–30.
36. Марченков С. С., Федорова В. С. О решениях систем функциональных булевых уравнений // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15, № 6. С. 48-57.
37. Марченков С. С., Федорова В. С. О решениях систем функциональных уравнений многозначной логики // Доклады Академии наук. Т. 426, № 4. 2009. С. 448-449.
38. Марченков С. С., Федорова В. С. Решения систем функциональных уравнений многозначной логики // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2009. № 4. С. 29-33.
39. Федорова В. С. SFE-замкнутые классы трехзначной логики // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, выпуск 7. Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, МАКС Пресс, Москва. 2010. С. 23-33.
40. Соловьев В. Д. Замкнутые классы k-значной логики с операцией разветвления по предикату // Дискретная математика. 1990. Т. 2, № 4. С. 19–25.
41. Тайманов В. А. О функциональных системах k-значной логики с операциями программного типа // Доклады Академии наук СССР. 1983. Т. 268, № 6. С. 1307–1310.
42. Нгуен Ван Хоа Об L-эквивалентности систем функций в многозначной логике // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 1. С. 37–47.
43. Голунков Ю. В. Полнота систем функций в операторных алгоритмах, реализующих функции k-значной логики // Вероятностные методы и кибернетика. 1980. Вып. 17. С. 23–24.
44. Тарасова О. С. Классы k-значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2001. № 6. С. 54–57.
45. Тарасова О. С. Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операции суперпозиции и перестановки // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2004. № 1. С. 25–29.
46. Rosenberg I. G. Completeness properties of multi-valued logic algebras // Computer science and multivalued logic: Theory and Applications, second edition, D.C. Rine, ed., Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 144-186.
47. Lau D. Submaximale Klassen von P_3 // J. Inf. Process. Cybern. 1982. EIK 18, 4/5. P. 227–243.

48. Rosenberg I. G. Minimal clones I: The five types // Lectures in Universal Algebra (L. Szabo, A. Szendrei eds.), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 43, North Holland, 1986. P. 405–427.
49. Марченков С. С., Деметрович Я., Ханнак Л. О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач, вып. 34. Новосибирск, 1980. С. 38–73.
50. Ларионов В. Б. О надструктуре классов самодвойственных функций в многозначных логиках // Труды VIII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6–9 апреля 2009 г.), издательский отдел факультета ВМК МГУ, Москва, 2009. С. 197–201.
51. Ларионов В. Б. О положении самодвойственных k-значных функций в решетке замкнутых классов // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, вып. 6, издательский отдел факультета ВМК МГУ, Москва, 2009. С. 90–105.
52. Szendrei A. On closed sets of linear operations over finite sets of square – free cardinality // Electron. Inform. Verarb. und Kibern. 1978. Volume 14, № 14. P. 547–559.
53. Бурле Г. А. Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. 1967. № 10. С. 3–7.
54. Ларионов В. Б. О некоторых свойствах монотонных функций в многозначных логиках // Тезисы докладов XV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2–7 июня 2008 г.), издательство «Отечество», Казань, 2008. С. 71–72.
55. Ларионов В. Б. О положении некоторых классов монотонных k-значных функций в решетке замкнутых классов // Дискретная математика. 2009. Т. 21, № 5. С. 111–116.
56. Ларионов В. Б. О положении некоторых классов монотонных k-значных функций в решетке замкнутых классов // Материалы XVII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» имени академика О. Б. Лупанова (Новосибирск, 27 октября–1 ноября 2008 г.), Издательство Института математики, Новосибирск, 2008. С. 90-95.
57. Ларионов В. Б. О монотонных замкнутых классах функций многозначной логики с бесконечной надструктурой // Материалы VII молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (18–23 мая 2009 г.), М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2009. С. 7–12.
58. Ларионов В. Б. О надструктуре некоторого семейства замкнутых классов монотонных k-значных функций // Материалы XVIII Международной школы-

семинара «Синтез и сложность управляющих систем» имени академика О. Б. Лупанова (Пенза, 28 сентября–3 октября 2009 г.), изд-во механико-математического факультета МГУ, Москва, 2009. С. 56–61.

59. Ларионов В. Б. Критерий конечности надструктуры некоторых классов монотонных k-значных функций, сохраняющих частичный порядок с единственным минимальным элементом // Материалы X Международного научного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (1–6 февраля 2010 г.), изд-во механико-математического факультета МГУ, Москва, 2010. С. 186–189.
60. Ларионов В. Б. О надструктуре классов монотонных функций в многозначных логиках // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ, вып. 7, издательский отдел факультета ВМК МГУ, Москва, 2010. С. 42–59.
61. Нечаев А. А. Критерий полноты систем функций p^n-значной логики, содержащий операции сложения и умножения по модулю p^n // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач, вып. 34. Новосибирск, 1980. С. 74–89.
62. Черепов А. Н. Описание структуры замкнутых классов в P_k, содержащих класс полиномов // Проблемы кибернетики, вып. 40. М.: Наука, 1983. С. 5–18.
63. Черепов А. Н. Надструктура класса сохранения отношений сравнения в многозначной логике // Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (18-20 сентября 1985). Часть I, Иркутск, 1985. С. 135.
64. Мещанинов Д. Г. О надструктуре класса полиномов в P_k // Тезисы докладов VII Всесоюзной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (18-20 сентября 1985). Часть I, Иркутск, 1985. С. 37.
65. Мещанинов Д. Г. Метод построения полиномов для функций k-значной логики // Дискретная математика. 1995. Т. 7, № 3. С. 48-60.
66. Ремизов А. Б. О надструктуре замкнутого класса полиномов по модулю k // Дискретная математика. 1989. Т. 1, № 1. С. 3–15.
67. Марченков С. С. Клоновая классификация дуально дискриминаторных алгебр с конечным носителем // Математические заметки. 1997. Т. 61, вып. 3. С. 359–366.
68. Baker K. A., Pixley A. F. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Z. 1975. Volume 143. P. 165–174.
69. Марченков С. С. Дискриминаторные классы трехзначной логики // Математические вопросы кибернетики. 2003. Вып. 12. С. 12–26.
70. Burosch G., Dassow J., Harnau W., Lau D. On subalgebras of an algebra of predicates // J. Inf. Process Cybern. 1985. EIK 21, 1/2. P. 9–22.

71. Lau D. Uber abgeschlossene Mengen linearer Funktionen in mehrwertigen Logiken // J. Inf. Process. Cybern. 1988. EIK 24, 7/8. P. 367–381.
72. Lau D. Uber abgeschlossene Teilmengen von $P_{k,2}$ // J. Inf. Process. Cybern. 1988. EIK 24, 10. P. 495–513.
73. Фрейвальд Р. Критерии полноты для частичных функций алгебры логики и многозначных логик // Доклады Академии наук СССР. 1966. Т. 167, № 6. С. 1249–1250.
74. Ромов Б. А. О проблеме полноты в алгебре частичных функций многозначной логики // Кибернетика. 1990. № 1. С. 102–106.
75. Алексеев В. Б., Вороненко А. А. О некоторых замкнутых классах в частичной двухзначной логике // Дискретная математика. 1994. Т. 6, № 4. С. 58–79.
76. Lau D. Function algebras on finite sets. Springer Monographs in Mathematics, 2006.
77. Ромов Б. А. Алгоритм решения проблемы полноты в классе векторных функциональных систем // Математические модели сложных систем, Киев: ИК Академии наук УССР, 1973. С. 151–155.
78. Ромов Б. А. О решетке подалгебр прямых произведений алгебр Поста конечной степени // Математические модели сложных систем, Киев: ИК Академии наук УССР, 1973. С. 156–158.
79. Ромов Б. А. О полноте на квадрате функций алгебры логики и в системе $P_k \times P_\ell$ // Кибернетика. 1987. № 4. С. 9–14.
80. Ромов Б. А. Об одной серии максимальных подалгебр прямых произведений алгебр конечнозначных логик // Кибернетика. 1989. № 3. С. 11–16.
81. Кузнецов А. В. Алгебра логики и ее обобщения // Яновская С. А. Математическая логика и основания математики. Математика в СССР за сорок лет, Физматгиз, 1959. Т. 1. С. 13–120.
82. Кузнецов А. В. Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты // Успехи матем. наук. 1961. Т. XVI, № 2(98). С. 201–202.
83. Бондарчук В. Г., Калужнин В. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10. № 5. С. 1–9.
84. Geiger D. Closed systems of functions and predicates // Pacific J. Math. 1968. Volume 27. P. 95–100.
85. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. Физматлит, Москва, 2000.
86. Марченков С. С. Предполнота замкнутых классов в P_k: предикатный подход // Математические вопросы кибернетики, вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 117–132.

87. Яблонский С. В. О строении верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k // Доклады Академии наук СССР. 1974. Т. 218, № 2. С. 304–307.
88. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках // Проблемы кибернетики, вып. 3. М.: Наука, 1960. С. 49–61.
89. Hansel G. Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de variables // C. R. Acad. Sci. Paris, 1966, 262. P. 1088–1090. (Русский перевод: Ансель Ж. О числе монотонных булевых функций n переменных // Кибернетический сборник, изд-во Мир. Новая серия. Вып. 5, 1968. С. 53–57.)
90. Valiant L. G. A theory of the learnable // Communications of the ACM. 27, 1984. P. 1134–1142.
91. Angluin D. Queries and concept learning // Machine learning. V. 2, 1987. P. 319-342.
92. Angluin D., Hellerstein L., Karpinski M. Learning read-once functions with queries // Journal of the ACM. V. 40, 1993. P. 185–210.
93. Bshouty N. H., Hancock T. R., Hellerstein L. Learning boolean read-once formulas over generalized bases // Journal of Computer and System Sciences. 50:3, 1995. P. 521–542.
94. Blum A., Furst M., Jackson J., Kearns M., Mansour Y. and Rudic S. Weakly learning DNF and characterizing statistical query learning using Fourier analysis // Proceedings 26th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 1994. P. 253-262.
95. Voronenko A. A. Recognizing the nonrepeating property in an arbitrary basis // Computational Mathematics and Modeling. 2007. Vol. 18. No. 1. P. 55-65.
96. Uehara R., Tsuchida K. and Wegener I. Optimal attribute-efficient learning of disjunction, parity, and threshold functions // Lecture Notes in Computer Science, 1997, Volume 1208/1997. P. 171-184.
97. Кузнецов А. В. О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики // Труды математического института им. В.А.Стеклова. 1958. Т. 51. С. 186–225.
1. Гурвич В. А. О бесповторных булевых функциях // Успехи математических наук. 1977. 32. № 1. С. 183–184.
98. Гурвич В. А. Критерии бесповторности функций алгебры логики // Доклады Академии наук СССР, 1991. 318. № 3. С. 532–537.
99. Вороненко А. А. О длине проверяющего теста для бесповторных функций в базисе {0, 1, &, V, ¬} // Дискретная математика. Т. 17. № 2. 2005. С. 139–143.
100. Вороненко А. А. О проверяющих тестах для бесповторных функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Физматлит, 2002. С. 163–176.

101.Шалыто А. А. Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов. СПб. Наука. 2000. 780 с.
102.Goldsmith J., Sloan R. H., Szorenyi B., Turan G. Theory revision with queries: horn, read-once, and parity formulas // Artificial Intelligence. 2004. V. 156. № 2. P. 139–176.
103.Стеценко В. А. О предплохих базисах в P_2 // Математические вопросы кибернетики. Вып. 4. М.: Физматлит, 1992. С. 139-177.